ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 10 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 533.951

УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РЕЛЯТИВИСТСКИМ ПУЧКОМ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОГО ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

В. С. Кривицкий, В. Н. Цытович

Рассчитан эффект усиления нерезонансных электромагнитных волн высоких частот ($\omega \gg \omega_{pe}$, $\omega_{pe}=\sqrt{4\pi ne^2/m}$, e — заряд электрона, m — масса электрона, n — концентрация) стационарным релятивистским пучком, взаимодействующим с излучением, которое находится в черенковском резонансе с частицами пучка. Инкремент усиления электромагнитных волн имеет максимум при углах $\theta=(\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}}) \sim \max\{\omega_{pe}/\omega,\ mc^2/\varepsilon\} \ll 1$ — угол между волновым вектором усиливаемых волн $\boldsymbol{k}$ и направлением импульса $\boldsymbol{p}$ частиц пучка, ε — энергия частиц пучка. При $\omega \ll \omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$ максимальное по углам θ значение инкремента растет как ω^2 с ростом частоты ω усиливаемых волн, а при $\omega \gg \omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$ падает как ω^{-2}, достигая максимума при $\omega \sim \omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$. Показано, что из-за анизотропии внешнего излучения Вавилова — Черенкова возможно отсутствие области углов с поглощением излучения.

1. Рассмотрим пучок заряженных частиц, движущийся в поле внешнего резонансного излучения. Высокочастотными электромагнитными волнами будем называть волны с $\omega \gg \omega_{pe}$, для которых не выполнено ни условие черенковского резонанса $\omega \neq \boldsymbol{kv}$, ни условие рассеяния $\omega - \omega_0 \neq (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)\,\boldsymbol{v}$, где ω_0 и $\boldsymbol{k}_0$ — частота и волновой вектор интенсивного резонансного излучения, в котором находится пучок. Резонансное поле удовлетворяет черенковскому условию $\omega_0 = \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}$. Поэтому рассматриваемый процесс иной, нежели широко используемый в так называемых лазерах на свободных электронах, которые основаны на индуцированном рассеянии. Предполагается, что спонтанное излучение Вавилова — Черенкова пренебрежимо мало по сравнению с индуцированным. Возможность усиления нерезонансных волн высоких частот в такой системе исследовалась в [1–5], однако конкретный расчет усиления для описанной выше системы не проводился. В [6] обсуждалась принципиальная физическая схема механизма усиления

Полученные результаты могут быть применены к движению пучка электронов в узком канале шириной $a \ll \lambda_0 = 2\pi/k_0$. При этом, согласно [7], пучок излучает так же, как и при движении в среде с показателем преломления $N_0 = k_0 c/\omega_0 > 1$ без канала; в высокочастотной области наличие среды и канала не сказывается, поскольку при $\omega \gg \omega_{pe}$ диэлектрическую проницаемость любой среды можно описывать плазменной формулой $\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$. Для дальнейшего существенно лишь то, что $v > \omega_0/k_0$ и в черенковском резонансе с резонансными волнами находятся частицы пучка, но не среды.

Принципиальное преимущество рассматриваемого метода усиления по сравнению с традиционными состоит в том, что данный механизм работает и для частот, намного превосходящих частоты резонансных полей и все характерные частоты системы. При больших частотах ω усиливаемых волн, как показано ниже, инкремент усиления падает с ростом частоты достаточно медленно, $\sim 1/\omega^2$ (степенным образом, а не экспоненциально), и остается отличным от нуля для очень больших ω (квантовое ограничение $\hbar\omega \ll \varepsilon$ не является жестким), Поперечное поле черенковского излучения будем считать случайным и описывать с помощью коррелятора

$$\langle E_{k_0 i} E_{k'_0 j}\rangle = |E_{k_0}|^2 (\delta_{ij} - k_{0i}k_{0j}/k_0^2)\,\delta(k_0+k'_0), \tag{1}$$

где $\langle\ \rangle$ означают усреднение по статистическому ансамблю, $k_0=\{\omega_0; \boldsymbol{k}_0\}$, $\delta(k_0)=\delta(\omega_0)\delta(\boldsymbol{k}_0)$; E_{k_0} — фурье-компонента поля E:

$$E(t, \boldsymbol{r}) = \int E_{k_0} \exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r} - i\omega_0 t)\, d\omega_0\, d\boldsymbol{k}_0. \tag{2}$$

Частоту и волновой вектор усиливаемых волн обозначим через ω, $\boldsymbol{k}$: $\omega=\sqrt{\omega_{pe}^2+k^2c^2}\approx kc+(\omega_{pe}^2/2kc)$, $kc\gg\omega_{pe}$; ω_{pe} — плазменная частота системы, состоящей из среды и пучка. Здесь учтено, что диэлектрическую проницаемость любой среды при $\omega\gg\omega_{pe}$ можно описать плазменной формулой $\varepsilon=1-\omega_{pe}^2/\omega^2$. В дальнейшем считаем, что частицы среды не находятся в резонансе с полем излучения, т. е. черенковский резонанс возможен только для частиц пучка. Поэтому во все формулы свойства среды войдут лишь через показатель преломления N_0.

2. Нелинейную проницаемость, описывающую усиление высокочастотных волн, можно найти из соотношения (полученного на основе бесстолкновительного уравнения; см. [1, 2])

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^{N(\mathrm{tr})} &= \frac{2\pi i}{\omega}\int\frac{\langle j_{ki}^{(3)} E_{k'j}\rangle}{|E_k|^2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}\right)dk' = -\frac{2\pi e^4}{\omega}\int |E_{k_0}|^2\,\frac{v_i}{\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}\times\\ &\times\left[\delta_{qm}\left(1-\frac{\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}}{\omega_0}\right)+\frac{k_{0q}v_m}{\omega_0}\right]\frac{\partial}{\partial p_q}\,\frac{1}{\omega-\omega_0-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{v}}\times\\ &\times\left[\delta_{ln}\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\omega}\right)+\frac{k_l v_n}{\omega}\right]\frac{\partial}{\partial p_l}\,\frac{1}{-\omega_0+\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}+i\delta}\left[\delta_{sr}\left(1-\frac{\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}}{\omega_0}\right)+\right.\\ &\left.+\frac{k_{0s}v_r}{\omega_0}\right]\frac{\partial\Phi_p}{\partial p_s}\left(\delta_{mr}-\frac{k_{0m}k_{0r}}{k_0^2}\right)\left(\delta_{in}-\frac{k_i k_n}{k^2}\right)dk_0\,\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},\end{aligned} \tag{3}$$

где $dk_0=d\omega_0 d\boldsymbol{k}_0$; Φ_p — функция распределения частиц пучка, нормированная стандартным образом: $n_b=\int\Phi_p\,d\boldsymbol{p}/(2\pi)^3$. Раскачка (затухание) электромагнитных волн определяется из соотношения $\gamma_k^N=-\omega^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_k^{N(\mathrm{tr})}\times\left((\partial/\partial\omega)\,\omega^2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_k^{(\mathrm{tr})}\right)^{-1}\big|_{\omega=\omega(k)}$, где $\varepsilon_k=\varepsilon_k^L+\varepsilon_k^N$, $\varepsilon_k^L=1-\omega_{pe}^2/\omega^2$ — линейная часть диэлектрической проницаемости; $\omega=\omega(\boldsymbol{k})$ — зависимость, порождаемая дисперсионным уравнением для электромагнитных волн. Мнимость в $\varepsilon_k^{N(\mathrm{tr})}$ возникает из-за черенковского резонанса, описываемого последним знаменателем в (3): $\mathrm{Im}[1/(-\omega_0+\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}+i\delta)]=-\pi\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})$. Следует, однако, заметить, что раскачка (или затухание) электромагнитных волн определяется, вообще говоря, не только нелинейной частью диэлектрической проницаемости $\varepsilon_k^{N(\mathrm{tr})}$, но и мнимой добавкой к линейной диэлектрической проницаемости, возникающей вследствие нестационарности (или пространственной неоднородности) системы, т. е. из-за квазилинейного изменения со временем функции распределения пучка (и, следовательно, линейной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_k^{L(\mathrm{tr})}$)

$$\frac{\partial\Phi_p}{\partial t} = \pi e^2\int dk_0\,\frac{|E_{k_0}|^2}{\omega_0^2 k_0^2}\left(\boldsymbol{k}_0\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)(k_0^2 v^2-\omega_0^2)\,\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})\left(\boldsymbol{k}_0\frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{p}}\right). \tag{4}$$

Для изменения числа квантов $N_{\boldsymbol{k}}(t)=2\pi^2|E_{\boldsymbol{k}}^{(0)}(t)|^2(1/\omega^2)(\partial/\partial\omega)\,\omega^2\times\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\mathrm{tr})}(\omega; t)\,|_{\omega=\omega_{\boldsymbol{k}}(t)}$ нерезонансных волн при нестационарной $\Phi_p(t)$ имеет место уравнение [8]

$$\frac{\partial N_{k}(t)}{\partial t} = - |E_{k}^{(0)}(t)|^2 \, 2\pi^2 \times$$

$$\times \left[2 \operatorname{Im} \varepsilon_{k}^{N(\mathrm{tr})} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{k}^{L(\mathrm{tr})}(\omega; t)}{\partial\omega\, \partial t} + \frac{2}{\omega} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{k}^{L(\mathrm{tr})}(\omega; t)}{\partial t} \right] \Bigg|_{\omega=\omega_{k}(t)}, \tag{5}$$

где $\tilde{\varepsilon}_{k}^{L(\mathrm{tr})}$ — часть полной линейной поперечной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{k}^{L(\mathrm{tr})}$, причем

$$\varepsilon_{k}^{L(\mathrm{tr})}(\omega; t) = 1 +$$

$$+ \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left(\delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right) \frac{v_l}{\omega - \boldsymbol{kv}} \left[\delta_{lj} \left(1 - \frac{\boldsymbol{kv}}{\omega} \right) + \frac{k_l v_j}{\omega} \right] \frac{\partial \Phi_p(t)}{\partial p_l},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k}^{L(\mathrm{tr})}(\omega; t) = \tag{6}$$

$$= \frac{2\pi e^2}{\omega^2} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left(\delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right) \frac{v_i (k_l v_j - \delta_{lj}(\boldsymbol{kv}))}{\omega - \boldsymbol{kv}} \frac{\partial \Phi_p(t)}{\partial p_l},$$

а $\partial\Phi_p(t)/\partial t$, возникающая в (5), определяется (4).

В замкнутой системе, эволюционирующей благодаря взаимодействию частиц с резонансными полями $|E_{k_0}|^2$ (т. е. с нестационарной Φ_p в силу (4)), сумма в квадратных скобках в (5) обращается в нуль и раскачка (затухание) числа квантов отсутствует — N_k сохраняется как адиабатический инвариант [8]. При нестационарной Φ_p также происходит изменение энергии электромагнитных волн, но лишь в той мере, в какой адиабатически меняется их частота (из-за нестационарности Φ_p). Но в открытой системе со стационарной Φ_p это уже не имеет места, и в ней возможно усиление (затухание) нерезонансных волн за счет нелинейного взаимодействия, поскольку, в принципе, в такой системе возможна ситуация, когда отсутствует квазилинейная релаксация или ей можно пренебречь. Тогда эффекты, связанные с нестационарностью, учитывать не нужно. Пусть, например, имеется источник частиц Q_p в правой части кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{p}} = Q_p, \tag{7}$$

где Q_p будет в стационарном режиме компенсировать уход частиц из резонансной области за счет квазилинейной релаксации (4) пучка:

$$\frac{\partial \Phi_p(t)}{\partial t} = 0, \quad Q_p = -\pi e^2 \int d\boldsymbol{k}_0 \frac{|E_{k_0}|^2}{\omega_0^2 k_0^2} \left(\boldsymbol{k}_0 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \right) (k_0^2 v^2 - \omega_0^2) \times$$

$$\times \delta(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{v}) \left(\boldsymbol{k}_0 \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{p}} \right),$$

что, в принципе, всегда можно обеспечить (Q_p может описывать, например, ионизацию среды, осуществляемую каким-либо образом, и т. д.). В этом случае система стационарна и добавки типа (5) к $\operatorname{Im} \varepsilon_{k}^{N(\mathrm{tr})}$ не возникают; а если Q_p имеет чисто регулярный характер и не входит в правую часть кинетического уравнения для случайной части функции распределения, то никаких новых добавок к $\varepsilon_{k}^{(\mathrm{tr})}$ из-за Q_p не возникнет и усиление (затухание) нерезонансных волн будет описываться лишь $\operatorname{Im} \varepsilon_{k}^{N(\mathrm{tr})}$. Это мы и будем предполагать в дальнейшем.

Дважды интегрируя (3) по частям, получим

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N} = -\frac{\pi^2 e^4}{m^2 \omega} \int \frac{dk_0}{\omega_0^2} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} |E_{\boldsymbol{k}_0}|^2 \left(v^2 - \frac{\omega_0^2}{k_0^2}\right) \left\{\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_0 - (\omega\omega_0/c^2)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2} \times \right.$$

$$\times \left[2 + \frac{2\omega\,(\omega^2/k^2c^2 - 1)}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}} + \frac{3(\omega^2/k^2c^2 - 1)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2} ((\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2 - k^2 v^2)\right] + \tag{8}$$

$$\left. + \frac{2k^2\omega_0(\omega^2/k^2c^2 - 1)^2}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^3} + \frac{2\boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{k}(1 - \omega^2/k^2c^2)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2}\right\} \frac{\delta(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})}{(\varepsilon/mc^2)^2} \left(\boldsymbol{k}_0 \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{p}}\right),$$

где $\varepsilon = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Проиллюстрируем теперь то обстоятельство, что усиление высокочастотных волн возникает даже при изотропном распределении частиц. Ограничимся, простоты ради, случаем $\omega \gg \omega_{pe}$, когда $\omega = kc$. Тогда, при $\Phi_p = \Phi(\varepsilon)$, подставив $(\boldsymbol{k}_0 (\partial\Phi_p/\partial\boldsymbol{p})) = (\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}) \times (\partial\Phi/\partial\varepsilon) = \omega_0 (\partial\Phi/\partial\varepsilon)$ и проинтегрировав в (8) по углам $(\widehat{\boldsymbol{k}; \boldsymbol{v}})$, получим

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N} = -\frac{\pi^2 e^4}{m^2 \omega} \int \frac{dk_0}{\omega_0^2} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} |E_{\boldsymbol{k}_0}|^2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 \omega_0 \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \left(v^2 - \frac{\omega_0^2}{k_0^2}\right) \frac{k}{\omega^2 v} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\omega_0}{k_0 c} x\right) \left(x - \frac{\omega_0}{k_0 c}\right) \left[\left(1 - \frac{\omega_0}{k_0 c} x\right)^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{k_0^2 c^2}\right)(1 - x^2)\right]^{-3/2}, \tag{9}$$

где $x = \cos(\widehat{\boldsymbol{k}_0; \boldsymbol{k}})$. В простейшем нерелятивистском пределе $v \ll c$, $\omega_0/k_0 \ll c$ формула (9) упрощается и, интегрируя по частям по ε,

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N} = \frac{\pi^2 e^4}{m^3 \omega^3} \int \frac{dk_0}{\omega_0} \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_0}{k_0} |E_{\boldsymbol{k}_0}|^2 \int\limits_{v > |\omega_0|/k_0} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \Phi_p \frac{v^2 + \omega_0^2/k_0^2}{v^3}. \tag{10}$$

Как видно из (10), усиливаются волны в направлении преимущественного распространения резонансных полей. Для изотропных полей $|E_{\omega_0; -\boldsymbol{k}_0}|^2 = |E_{\omega_0; \boldsymbol{k}_0}|^2$ и величина $\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N}$ обращается в нуль, но это есть лишь результат использованного приближения $v \ll c$, $\omega_0/k_0 c \ll 1$. С учетом следующих членов разложения по этим малым параметрам эффект поглощения для изотропных резонансных полей не равен нулю. Но это показывает, что даже малая анизотропия способна привести к раскачке высокочастотных электромагнитных волн.

В общем случае изотропии как Φ_p, так и $|E_{\boldsymbol{k}_0}|^2$ в (8) сначала можно проинтегрировать по углам $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{k}_0$:

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N} = -\frac{\pi^2 e^4}{2m^2 \omega} \int \frac{dk_0 |E_{k_0}|^2}{k_0} \int\limits_{v > |\omega_0|/k_0} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{v} \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 \left(v^2 - \frac{\omega_0^2}{k_0^2}\right) \times$$

$$\times \left\{\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}/v^2 - \omega/c^2}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2} \left[2 + \frac{2\omega\,(\omega^2/k^2c^2 - 1)}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}} + 3\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2 - k^2 v^2}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2} \times \right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{\omega^2}{k^2c^2} - 1\right)\right] + \frac{2k^2(\omega^2/k^2c^2 - 1)^2}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^3} + \frac{(2\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}/v^2)(1 - \omega^2/k^2c^2)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2}\right\}.$$

Это выражение нужно далее проинтегрировать (усреднить) по углу между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}$ (введем обозначение $\varepsilon_0 = mc^2/\sqrt{1 - \omega_0^2/k_0^2 c^2}$):

$$\gamma_k^N = -\frac{e^4 c^2}{4\omega}\int \frac{dk_0\,|E_{k_0}|^2}{k_0}\int\limits_{\varepsilon>\varepsilon_0} d\varepsilon\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon_0}\right)^2-\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{\omega}{v^2}\,\frac{(1-v^2/c^2)\,(2+2\,(\omega^2/k^2c^2-1))}{\omega^2-k^2v^2}-\frac{1+(1/2)\,(\omega^2/k^2c^2-1)}{kv^3}\times\right. \quad (12)$$

$$\left.\times\ln\frac{\omega+kv}{\omega-kv}+\frac{2k^2\omega\,(\omega^2/k^2c^2-1)^2}{(\omega^2-k^2v^2)^2}+\frac{\omega\,(1-\omega^2/k^2c^2)}{v^2\,(\omega^2-k^2v^2)}\right\}.$$

Для ультрарелятивистских частиц $mc^2/\varepsilon \ll 1$, $\omega_{pe}/\omega \ll 1$ имеем

$$\gamma_k^N = \frac{e^4}{4\omega^2}\int dk_0\,\frac{|E_{k_0}|^2}{k_0}\int\limits_{\varepsilon>\varepsilon_0} d\varepsilon\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon_0}\right)^2-\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{2\,(mc^2/\varepsilon)^2-\omega_{pe}^2/\omega^2}{(mc^2/\varepsilon)^2+\omega_{pe}^2/\omega^2}-\ln\frac{4}{(mc^2/\varepsilon)^2+\omega_{pe}^2/\omega^2}+\frac{2\omega_{pe}^4/\omega^4}{((mc^2/\varepsilon)^2+\omega_{pe}^2/\omega^2)^2}\right\}. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по частям, получим в предельных случаях

$$\gamma_k^N = -\frac{e^4}{2\omega^2}\int dk_0\,\frac{|E_{k_0}|^2}{k_0}\int\limits_{\varepsilon>\varepsilon_0}\Phi d\varepsilon\times$$

$$\times\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\frac{1}{\varepsilon}\begin{cases}\ln(4\omega^2/\omega_{pe}^2)-1, & \omega\ll\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)\\ \ln(4\varepsilon^2/(mc^2)^2)-3+\varepsilon^2/\varepsilon_0^2, & \omega\gg\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)\end{cases} \quad (14)$$

Как нетрудно видеть, это выражение при $\omega_{pe}/\omega \ll 1$, $mc^2/\varepsilon \ll 1$ всегда отрицательно, т. е. всегда имеет место затухание.

Аналогично в нерелятивистском пределе из (12) получим

$$\gamma_k^N = -\frac{2\pi^2 e^4}{3m^3c^2\omega^2}\int dk_0\,\frac{|E_{k_0}|^2}{k_0}\int\limits_{v>|\omega_0|/k_0}\frac{dp}{(2\pi)^3}\,\Phi_p\,\frac{1}{v}, \quad (15)$$

т. е. также всегда поглощение.

Из сравнения (10) и (15) видно, что анизотропный случай содержит фактор $k_0c/\omega_0 \gg 1$. Это означает, что раскачка сменяет затухание при таком, например, слабоанизотропном распределении $|E_{k_0}|^2$: $|E_{k_0}|^2 = |E_{\omega_0;|k_0|}|^2 + \alpha\,|E_{\omega_0,k_0}|^2$; где $\omega_0/k_0c < \alpha \ll 1$, первый член в $|E_{k_0}|^2$ соответствует изотропной части поля резонансного излучения, а второй — анизотропной.

3. Рассмотрим случай достаточно узкого ультрарелятивистского пучка с небольшим угловым θ_0 и энергетическим $\Delta\varepsilon$ разбросом ($\theta_0 \ll 1$, $mc^2 \ll \varepsilon$, $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$, направление движения пучка примем за ось z, θ_0^2 — средний квадратичный разброс направления скорости частиц пучка относительно этого направления). Будем рассматривать также электромагнитные волны, распространяющиеся под малыми углами θ по отношению к пучку (как показывают нижеприведенные расчеты, $|\gamma_k^N|$ максимален при $\theta \sim \max\{mc^2/\varepsilon; \omega_{pe}/\omega\} \ll 1$). Произведем теперь разложение по малым параметрам θ, mc^2/ε, ω_{pe}/ω. Для знаменателей в (8) получим $\omega - \boldsymbol{kv} \approx (\omega/2)\,((mc^2/\varepsilon)^2+\theta^2+(\omega_{pe}^2/\omega^2))$ и, следовательно, $(\omega - \boldsymbol{kv})^{-1}$ примерно в $(\varepsilon/mc^2)^2$ раз больше этого же значения, усредненного по всем углам $\boldsymbol{v}$, т. е. в изотропном случае. Поэтому в (8) членами вне квадратных скобок можно пренебречь. В скалярном произведении $(\boldsymbol{kk}_0)$ можно выделить компоненты $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}_0$, перпендикулярные и параллельные скорости $\boldsymbol{v}$: $(\boldsymbol{kk}_0)=(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp})+(\boldsymbol{kv})(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})/v^2$. При интегри-

ровании по частям в (8) учтем, что $(\boldsymbol{k}_0\partial/\partial\boldsymbol{p})(\boldsymbol{kv})=\varepsilon^{-1}(c^2(\boldsymbol{kk}_0)-(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})\times$ $\times(\boldsymbol{kv}))=\varepsilon^{-1}[c^2(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp})+(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})(\boldsymbol{kv})(c^2/v^2-1)]$. Второй член в квадратных скобках имеет порядок $c^2kk_0(mc^2/\varepsilon)^2$, в то время как первый член имеет порядок $c^2kk_0\theta$. Поэтому можно полагать $(\boldsymbol{k}_0\partial/\partial\boldsymbol{p})(\boldsymbol{kv})\approx$ $\approx(c^2/\varepsilon)(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp})$. Точно так же входящий перед квадратными скобками в (8) коэффициент можно представить в виде $\boldsymbol{kk}_0-(\omega\omega_0/c^2)=$ $=\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp}+(\boldsymbol{kv})\,\omega_0/v^2-\omega\omega_0/c^2$ (учтено, что в силу δ-функции $\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}=$ $=\omega_0$), и по тем же соображениям сумма двух последних членов мала по сравнению с первым. И, наконец, дифференцирование v^2 в скобке $(v^2-\omega_0^2/k_0^2)$ в (8) также даст дополнительный малый множитель $(mc^2/\varepsilon)^2$. Усреднение по углам $\boldsymbol{k}_0$ множителя $(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp})^2$ дает $\int d^{(2)}(\boldsymbol{k}_0/k_0)(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{k}_{0\perp})^2\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})=(\omega^2\theta^2/2c^2)(k_0^2-\omega_0^2/c^2)\int d^{(2)}(\boldsymbol{k}_0/k_0)\times$ $\times\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})$. При этом мы считаем, что $|E_{\boldsymbol{k}_0}|^2$ зависит только от углов $(\widehat{\boldsymbol{k}_0;z})$, причем $\cos(\widehat{\boldsymbol{k}_0;z})\approx\cos(\widehat{\boldsymbol{k}_0;\boldsymbol{v}})$. Итак, после интегрирования по частям получим $\gamma_{\boldsymbol{k}}^N=\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N+}+\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N-}$, где

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N+}=\frac{16\pi^2e^4c^2}{m^2\omega^2}\int d\boldsymbol{k}_0\,\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{|E_{\boldsymbol{k}_0}|^2k_0^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\times$$

$$\times\frac{\theta^2\Phi_p\,\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})}{\varepsilon\{(mc^2/\varepsilon)^2+\theta^2+\omega_{pe}^2/\omega^2\}^5}\left\{\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+\theta^4+2\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\frac{7\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\right.\tag{16}$$

$$\left.+\frac{8\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-\frac{4\theta^2\,\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right\};$$

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N-}=-\frac{8\pi^2e^4c^2}{m^2\omega^2}\int d\boldsymbol{k}_0\,\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{|E_{\boldsymbol{k}_0}|^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\times$$

$$\times\frac{(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}-\omega_0)\Phi_p}{\varepsilon\{(mc^2/\varepsilon)^2+\theta^2+\omega_{pe}^2/\omega^2\}^4}\left\{\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+\theta^4+\frac{3\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\frac{4\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-\right.\tag{17}$$

$$\left.-\frac{2\theta^2\,\omega_{pe}^2}{\omega^2}+2\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right\}[(k_0^2c^2-(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})^2)\delta'(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})+2\omega_0\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})].$$

Нетрудно видеть, что $\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N+}$ всегда положительно, а $\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N-}$ для изотропного излучения всегда отрицательно.

Будем считать, что $|E_{\boldsymbol{k}_0}|^2=|E_{\omega_0;|\boldsymbol{k}_0|}|^2H^2(x_0)$, где $H^2(x_0)$ — существенно положительная функция $x_0=\cos(\widehat{\boldsymbol{k};z})\approx\cos(\widehat{\boldsymbol{k}_0;\boldsymbol{v}})$, $\int\limits_{-1}^{1}H^2(x_0)\times$ $\times2\pi dx_0=4\pi$ — нормировка $H^2(x_0)$. Тогда $\delta'(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})=-(k_0v)^{-1}\times$ $\times(\partial/\partial x_0)\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})$, и, интегрируя по частям по x_0, мы видим, что $-(k_0v)^{-1}(\partial/\partial x_0)(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})^2=-2(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})=-2\omega_0$, и этот член сокращается со вторым членом в квадратных скобках в (17); помимо этого эти члены все равно должны обратиться в нуль, будучи домножены на $(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}-\omega_0)\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})=0$. По этим же причинам не нужно дифференцировать по x_0 величину $H^2(x_0)$. Подстановка $\omega_0=\pm k_0v$ также даст нуль в силу наличия фактора $(1-\omega_0^2/k_0^2c^2)$. Таким образом, по x_0 нужно дифференцировать лишь множитель $(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}-\omega_0)$. Интегрируя по x_0, получим

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}^{N-}=-\frac{8\pi^2e^4c^2}{m^2\omega^2}\int d\boldsymbol{k}_0\,\frac{|E_{\omega_0;\,|\boldsymbol{k}_0|}|^2k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{\Phi_p}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\times$$

$$\times \frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{-4}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+\theta^4+\frac{3\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{4\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+2\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-2\theta^2\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]. \qquad (18)$$

Соответственно (16) после интегрирования по углам x_0 дает

$$\gamma_k^{N+}=\frac{16\pi^2e^4c^2}{m^2\,\omega^2}\int dk_0\frac{|E_{\omega_0;|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{dp}{(2\pi)^3}\,\frac{\Phi_p}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}\,\theta^2\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{-5}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+\theta^4+\right. \qquad (19)$$
$$\left.+2\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\frac{7\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\frac{8\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-4\theta^2\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right].$$

Из (18) и (19) получим общее выражение инкремента:

$$\gamma_k^N=\frac{8\pi^2e^4c^2}{m^2\omega^4}\int dk_0\frac{|E_{\omega_0,|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{dp}{(2\pi)^3}\,\frac{\Phi_p}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\times$$
$$\times\frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}\left\{\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{-5}\left[\theta^6-\frac{3\omega_{pe}^6}{\omega^6}-\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^6-\right.\right.$$
$$-7\theta^4\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}+13\,\theta^2\frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\theta^4\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4- \qquad (20)$$
$$\left.\left.-\frac{7\omega_{pe}^4}{\omega^4}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-\frac{5\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+12\theta^2\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\omega^2}\right)^2\right]\right\}.$$

При малых углах $\theta\ll\max\{mc^2/\varepsilon;\ \omega_{pe}/\omega\}$, как видно из (20), доминирует затухание.

Если $\omega\ll\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$, то выражение в фигурных скобках в (20) сводится к $[\theta^2+\omega_{pe}^2/\omega^2]^{-5}[\theta^6-7\theta^4(\omega_{pe}^2/\omega^2)+13\theta^2(\omega_{pe}^4/\omega^4)-3\omega_{pe}^6/\omega^6]$. Максимальный по θ инкремент достигается при $\theta=0{,}7\omega_{pe}/\omega$ и имеет оценку

$$\gamma_{k\max\theta}^N\approx\frac{16\pi^2e^4\omega^2n_b(mc^2)^2}{m^2\,\omega_{pe}^4\,\varepsilon^3}\int\frac{dk_0\,|E_{k0}|^2k_0c}{4\pi\omega_0^2}, \qquad (21)$$

где $n_b=\int(dp/(2\pi)^3)\Phi_p$ — концентрация электронов пучка в лабораторной системе. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что инкремент растет с ростом частоты. Однако этот рост ограничен принятым допущением $\omega\ll\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$.

В противоположном случае, когда $\omega\gg\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$, получим для выражения в фигурных скобках в (20) $[\theta^2+(mc^2/\varepsilon)^2]^{-3}[\theta^2-(mc^2/\varepsilon)^2]$. Максимальный по θ инкремент достигается при $\theta=1{,}4(mc^2/\varepsilon)$ и имеет оценку

$$\gamma_{k\max\theta}^N\approx\frac{16\pi^2e^4n_b\varepsilon}{m^2\omega^2(mc^2)^2}\int\frac{dk_0\,|E_{k_0}|\,k_0c}{4\pi\omega_0^2}. \qquad (22)$$

Хотя в отличие от (21) $\gamma_{k\max\theta}^N$ падает с ростом частоты ω, он зато содержит большой множитель ε/mc^2 в числителе, а не в знаменателе. Оптимальное усиление получается, таким образом, при $\omega/\omega_{pe}\sim$ $\sim\varepsilon/mc^2(\sim 1/\theta)$. Тогда (21) и (22) дают

$$\gamma_{k\,\max\theta}^{N\max\omega}=C\,\frac{16\pi^2e^4n_b}{m^2\omega_{pe}^2\,\varepsilon}\int\frac{dk_0|E_{k_0}|^2k_0c}{4\pi\omega_0^2}, \tag{23}$$

где $C\sim 1$. Простой численный расчет показывает, что γ_k^N максимально при $\theta=1{,}3(mc^2/\varepsilon)$, $\omega_{pe}/\omega=1{,}2(mc^2/\varepsilon)$, в случае изотропной $|E_{k_0}|^2$ при $\omega_0\ll k_0c$ константа $C=0{,}1$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет угловой разброс пучка на инкремент γ_k^N. Пусть угловое распределение частиц пучка описывается соотношением

$$\Phi(\theta_p)=\begin{cases}(\pi\theta_0^2)^{-1}, & 0<\theta_p<\theta_0\\ 0, & \theta_p>\theta_0\end{cases} \tag{24}$$

с нормировкой $2\pi\int\Phi(\theta_p)\theta_p d\theta_p=1$. Здесь $\theta_p=(\widehat{p;z})$, θ_0^2 — средний квадрат угла отклонения импульса частиц от оси z (строго запись $\theta_p>\theta_0$ в (24) следует понимать как $\theta_0<\theta_p<\pi$). Обозначим $\theta_k=(\widehat{k;z})$. Выберем декартову систему координат в пространстве таким образом, чтобы вектор $\boldsymbol{k}$ лежал в плоскости $(x;z)$; ось y дополняет систему до правой. Обозначим через θ угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{p}$, через φ — угол между осью x и проекцией вектора $\boldsymbol{p}$ на плоскость $(x;y)$. Будем считать, что $\theta_p\ll 1$, $\theta_k\ll 1$. Угол θ выражается через θ_p с точностью до членов порядка $(\theta_p^4+\theta_k^4)$: $\theta^2=\theta_k^2+\theta_p^2-2\theta_k\theta_p\cos\varphi$. При $\omega\ll\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$, воспользовавшись (20) и (24), получим

$$\gamma_k^N=I\,\frac{8\pi^2e^4c^2n_b}{m^2\,\omega^2}\times$$
$$\times\int dk_0\,\frac{|E_{\omega_0,|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2\,\varepsilon}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}, \tag{25}$$

где

$$I=(2\pi\theta_0^2)^{-1}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\theta_0^2}d\theta_p^2\,\psi(\theta^2), \tag{26}$$

а функция

$$\psi(\theta^2)=\left[\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{-5}\left[\theta^6-7\theta^4\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}+13\theta^2\,\frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4}-\frac{3\omega_{pe}^6}{\omega^6}\right].$$

При $\theta_0\ll\theta_k$ получим $\theta^2=\theta_k^2$ и интеграл (26) оценится очень просто: $I=\psi(\theta_k^2)$. Зависимость γ_k^N от углов θ_k дается при этом (20) с $mc^2/\varepsilon=0$ в фигурных скобках и с заменой в (20) θ на θ_k. В случае же $\theta_0\gg\theta_k$ оценим интеграл (26) следующим образом: перейдем в (26) от интегрирования по θ_p^2 к интегрированию по θ^2. Опуская промежуточные выкладки, получим, используя соотношение $\theta_0\gg\theta_k$, $I\approx\theta_0^{-2}\int_{\theta_k^2}^{\theta_0^2}d\theta^2\psi(\theta^2)$.

Вычислив этот интеграл, получим, что при $\theta_0\ll\omega_{pe}/\omega$ зависимость γ_k^N от θ_k дается формулой (20) с $mc^2/\varepsilon=0$ в фигурных скобках и с заменой θ на θ_k, а при $\omega_{pe}/\omega\ll\theta_0$ —

$$\gamma_k^N=\frac{8\pi^2e^4c^2n_b}{m^2\,\omega^2}\int dk_0\,\frac{|E_{\omega_0;|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{(mc^2)^2}{\varepsilon^3}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}\begin{cases}3\theta_k^2\,\omega^4/\theta_0^2\,\omega_{pe}^4, & \theta_k\ll\omega_{pe}/\omega\\ 1/\theta_k^2\,\theta_0^2, & \omega_{pe}/\omega\ll\theta_k\ll\theta_0.\\ 1/\theta_k^4, & \theta_0\ll\theta_k\end{cases}\tag{27}$$

Максимальное по θ_k значение γ_k^N достигается при $\theta_k\sim\omega_{pe}/\omega$ и в случае $\theta_0\ll\omega_{pe}/\omega$ имеет оценку (21), а в случае $\omega_{pe}/\omega\ll\theta_0$ меньше (21) в $\omega^2\theta_0^2/\omega_{pe}^2$ раз.

Аналогичные результаты получим и при $\omega\gg\omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$. Равенство (26) и в этом случае остается в силе, только теперь $\psi(\theta^2)=[\theta^2+(mc^2/\varepsilon)^2]^{-3}[\theta^2-(mc^2/\varepsilon)^2]$. При этом в случае $\theta_0\ll mc^2/\varepsilon$ зависимость γ_n^N от θ_k дается (20) с $\omega_{pe}/\omega=0$ в фигурных скобках и с $\theta=\theta_k$, а при $mc^2/\varepsilon\ll\theta_0$ —

$$\gamma_k^N=\frac{8\pi^2e^4c^2n_b}{m^2\,\omega^2}\int d\,k_0\frac{|E_{\omega_0;\,|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{(mc^2)^2}{\varepsilon^3}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\frac{H^2(\omega_0/k_0c)}{2k_0\,c}\begin{cases}\theta_k^2\,\varepsilon^4/\theta_0^2\,(mc^2)^4, & \theta_k\ll mc^2/\varepsilon\\ 1/\theta_k^2\,\theta_0^2, & mc^2/\varepsilon\ll\theta_k\ll\theta_0.\\ 1/\theta_k^4, & \theta_0\ll\theta_k\end{cases}\tag{28}$$

Максимальное по θ_k значение γ_k^N достигается при $\theta_k\sim mc^2/\varepsilon$, в случае $\theta_0\ll mc^2/\varepsilon$ имеет оценку (22), а в случае $mc^2/\varepsilon\ll\theta_0$ меньше (22) в $\varepsilon^2\,\theta_0^2/(mc^2)^2$ раз.

Оптимальное же усиление получается, следовательно, при $\omega/\omega_{pe}\sim\sim\varepsilon/mc^2\sim1/\theta_k$. При $mc^2/\varepsilon\gg\theta_0$ значение $\gamma_{k\,\max\theta}^{N\max\omega}$ дается (23), а при $\theta_0\gg mc^2/\varepsilon$ меньше (23) в $\varepsilon^2\theta_0^2/(mc^2)^2$ раз.

4. Обратимся опять к (17), для того чтобы решить вопрос о влиянии на γ_k^N анизотропии излучения Вавилова — Черенкова. В (17) член с $\partial H^2(x_0)/\partial x_0$ давал нуль за счет наличия произведения $(\boldsymbol{k}_0\,\boldsymbol{v}-\omega_0)\times\times\delta(\omega_0-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v})=0$, что являлось результатом разложения по малым параметрам θ, ω_{pe}/ω, mc^2/ε (будем считать их величинами одного порядка, так как именно в этом случае инкремент максимален). Следующий член разложения, отличный от нуля, имел бы относительную малость (по отношению к (17)) порядка $(mc^2/\varepsilon)^2$ при $\omega_0/k_0c\sim1$: вместо $(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}-\omega_0)$ мы теперь имеем $c^2/\omega[(\boldsymbol{kv})(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}/v^2)-\omega\omega_0/c^2]=$ $=(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{v}-\omega_0)-[\theta^2+\omega_{pe}^2/\omega^2-(mc^2/\varepsilon)^2](\boldsymbol{k}_0\,\boldsymbol{v})/2$. Поэтому для того, чтобы анизотропия могла изменить знак (17), уничтожив тем самым область углов θ_k с поглощением, нужна большая степень анизотропии — излучение $|E_{k_0}|^2$ должно быть сосредоточено в узком диапазоне углов $\Delta\theta_{k_0}\sim mc^2/\varepsilon$ (поскольку $\partial H^2(x_0)/\partial x_0\sim H^2/\Delta\theta_{k_0}^2$ $x_0=\cos\theta_{k_0}$).

Член $\delta\gamma_k^N$, содержащий $\partial H^2(x_0)/\partial x_0$ и возникающий в (17) вследствие анизотропии $|E_{k_0}|^2$, равен, согласно (17),

$$\delta\gamma_k^N=\frac{4\pi^2\,e^4\,c^2}{m^2\,\omega^2}\int d\,k_0\frac{dp}{(2\pi)^3}\,\frac{|E_{\omega_0;|k_0|}|^2\,k_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{\Phi_p}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\times$$

$$\times\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\frac{\omega_0}{2\,k_0^2\,c^2}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2+\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{-4}\left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4+\theta^4+\frac{3\omega_{pe}^4}{\omega^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{4\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2-2\theta^2\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}+2\theta^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right]\left[\theta^2+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}-\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\right]\times\tag{29}$$

$$\times\left.\frac{\partial H^2(x_0)}{\partial x_0}\right|_{x_0=\omega_0/k_0c}.$$

Сравним это выражение с (9), когда $\Phi_p=\Phi(\varepsilon)$ изотропна. При $\theta\ll 1$ для x в (9) имеем $x\approx x_0$; при $mc^2/\varepsilon\to 0$ выражение $(x_0-\omega_0/k_0c)\times\times[(1-(\omega_0/k_0c)x_0)^2+(v^2/c^2-\omega_0^2/k_0^2c^2)(1-x_0^2)]^{-3/2}$ в (9) эквивалентно сумме $-\ln\varepsilon^2/(mc^2)^2\delta'(x_0-\omega_0/k_0c)$ и несингулярного члена, а член $\delta\gamma_k^N$ в (9), возникающий в связи с анизотропией $|E_{k_0}|^2$, имеет вид ($|E_{k_0}|^2=|E_{\omega_0;|k_0|}|^2H^2(x_0)$; интегрируем (9) по x_0 по частям):

$$\delta\gamma_k^N=-\frac{\pi^2e^4c^2}{m^2\omega^2}\int dk_0\frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{|E_{\omega_0;|k_0|}|^2k_0^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\times$$
$$\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\,\frac{\omega_0}{2k_0^2c^2}\ln\frac{\varepsilon^2}{(mc^2)^2}\,\frac{\partial H^2(x_0)}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=\omega_0/k_0c}. \tag{30}$$

Произведение выражений в квадратных скобках в (29) при $\omega_{pe}/\omega\ll\ll mc^2/\varepsilon$ имеет максимум при $\theta\sim mc^2/\varepsilon$ и по порядку величины равно $(\varepsilon/mc^2)^2$ (условие $\omega_{pe}/\omega\ll mc^2/\varepsilon$ при оценке (29) связано с тем, что сравниваемое с ним выражение (9) в целях простоты было выведено для $\omega_{pe}/\omega\ll mc^2/\varepsilon$; естественно, все полученные результаты остаются справедливыми и в случае оптимальных условий усиления, когда $\theta\sim\sim mc^2/\varepsilon\sim\omega_{pe}/\omega$). Поэтому, сравнивая (29) и (30), заключаем, что связанные с анизотропией $|E\quad|^2$ члены в случае узкого пучка и в случае изотропного распределения Φ отличаются примерно в $(\varepsilon/mc^2)^2\times\times[\ln(\varepsilon/mc^2)^2]^{-1}$ раз.

Вернемся еще раз к (29) и рассмотрим вопрос о зависимости $\delta\gamma_k^N$ от разброса θ_0. Рассмотрение полностью аналогично соответствующему исследованию для γ_k^N, проделанному ранее. Результат при $\theta_k\sim mc^2/\varepsilon\sim\sim\omega_{pe}/\omega$ имеет вид

$$\delta\gamma_k^N\approx\frac{16\pi^2e^4}{m^2\omega_{pe}^2}\int dk_0\frac{|E_{\omega_0;|k_0|}|^2}{\omega_0}\frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{\Phi_p}{\varepsilon}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4\left(1-\frac{\omega_0^2}{k_0^2c^2}\right)^2\times$$
$$\times\frac{\partial H^2(x_0)}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=\omega_0/k_0c}\begin{cases}(\varepsilon/mc^2)^2, & mc^2/\varepsilon\gg\theta_0\\ \theta_0^{-2}\ln(\theta_0^2\varepsilon^2/(mc^2)^2), & mc^2/\varepsilon\ll\theta_0\end{cases}. \tag{31}$$

Из (31) также видно, что для узкого пучка ($\theta_0\ll mc^2/\varepsilon$) и для изотропного ($\theta_0\sim 1$) распределения $\delta\gamma_k^N$ отличаются в $(\varepsilon/mc^2)^2/\ln(\varepsilon/mc^2)^2$ раз.

Подчеркнем в заключение еще раз тот факт, что в данном случае для усиления электромагнитных волн пучком мы вынуждены поддерживать каким-то внешним механизмом стационарность Φ_p (что принципиально всегда возможно, хотя, быть может, достаточно сложно). Ситуация в некотором смысле сходна с движением заряда в среде со скоростью, превосходящей фазовую скорость света: за счет излучения Вавилова — Черенкова, создаваемого зарядом, на последний действует тормозящая его сила, и для поддержания его равномерного движения нужно прикладывать к заряду некую внешнюю силу [9]; само же излучение заряда определяется лишь «сверхсветовым» характером его движения, а не этой внешней силой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsytovich V. N. — Proc. X Int. conf. of Phen. in Ionized Gases, Oxford 1971, Contr. papers, 1970, p. 333.
2. Цытович В. Н. — Физика плазмы, 1980, 6, вып. 5, с. 1105.
3. Tsytovich V. N., Stenflo L., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1975, 11, № 5, p. 251.
4. Hirose A. — Comments Plasma Phys. Contr. Fus., 1984, 8, № 4, p. 117.
5. Tsytovich V. N., Wilhelmsson H. — Comments Plasma Phys. Contr. Fus., 1983, 7, № 5, p. 155; Tsytovich V. N., Stenflo L. — Lett. Astr., 1983, 89, p. 233.

6. Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1985, **89**, вып. 3, с. 842.
7. Гинзбург В Л., Франк И. М. — ДАН СССР, 1949, **56**, № 7, с. 699.
8. Исаков С. Б, Кривицкий В. С., Цытович В. Н. Препринт ИОФ АН СССР, № 255. — М., 1985.
9. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1981, с. 135.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию
25 февраля 1985 г,
после доработки
4 ноября 1985 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE AMPLIFICATION BY THE RELATIVISTIC PARTICLE BEAM IN THE EXTERNAL FIELD OF INTENSIVE VAVILOV — CHERENKOV RADIATION

V. S. Krivitsky, V. N. Tsytovich

The effect of non-resonance electromagnetic wave amplification for high frequency ($\omega \gg \omega_{pe}$) is calculated. Amplification is due to the interaction of the relativistic particle beam with the radiation which is in Cherenkov resonance with the particles of the beam. The increment of the electromagnetic wave amplification is maximum when the beam. The growthrate of the electromagnetic wave amplification is maximum when the angle θ between the direction of the wave vector of the electromagnetic wave and the direction the beam particles is $\theta \sim \max\{\omega_{pe}/\omega;\ mc^2/\varepsilon\} \ll 1$, where ε is the beam particles energy. The maximum value upon θ of growthrate increases as ω^2 when $\omega \ll \ll \omega_{pe}\varepsilon/mc^2$, attains the maximum value when $\omega \sim \omega_{pe}(\varepsilon/mc^2)$ and decreases as ω^{-2} when $\omega \gg \omega_{pe}\varepsilon/mc^2$. It is shown that the anysotropy of external Vavilov — Cherenkov radiation may be chosen in a such way that the angular domain of absorption for high frequency waves is absent.

ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, ил. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин Формулы и буквенные обозначения вписываются **черными чернилами во второй экземпляр.** Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в **первом экземпляре не делается.**

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.