

УДК 535.41

## ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ ЗЕРКАЛ В МНОГОЛУЧЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ

*A. B. Белинский, A. С. Чиркин*

Проведен расчет коэффициента передачи и полосы пропускания многолучевого интерферометра с учетом дифракционных эффектов на неоднородностях зеркал. Кроме того, выполнены расчеты эффективного коэффициента отражения зеркал и дисперсии фазовых флуктуаций.

Реальные зеркала, используемые в интерферометрах, неизбежно обладают микродефектами отражающих поверхностей. Статистические свойства таких зеркал хорошо описываются моделью случайного фазового экрана. Эта же модель широко используется и в радиофизике, и в оптике при анализе распространения электромагнитных волн в различных неоднородных средах (см., например, [1, 2]), при этом корректно определены статистические характеристики волн в свободном пространстве за фазовым экраном. Вопрос о влиянии случайных фазовых неоднородностей зеркал в интерферометре Фабри — Перо (ИФП) на его пропускание и другие параметры рассмотрен в ряде работ (см., например, [3, 4]), применимость результатов которых ограничена приближением геометрической оптики. Вместе с тем малость размеров неоднородностей зеркал обуславливает необходимость учета дифракционных эффектов.

Рассмотрим ИФП, образованный зеркалами, расположеннымными симметрично относительно начала системы координат на расстоянии  $2l$  друг от друга. Для простоты примем коэффициенты отражения зеркал по интенсивности одинаковыми, равными  $R$ , а коэффициенты пропускания по интенсивности равными  $1 - R$ , фазы амплитудных коэффициентов отражения и пропускания обозначим через  $\varphi_1(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_2(\mathbf{r})$ , (вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости зеркал) и  $\xi_1(\mathbf{r})$ ,  $\xi_2(\mathbf{r})$  соответственно, где индексы «1» и «2» относятся к первому и второму зеркалу, причем  $\xi_i(\mathbf{r}) \approx [(n-1)/2]\varphi_i(\mathbf{r})$ ,  $n$  — показатель преломления материала подложки зеркал. Тогда, пользуясь квазиоптическим приближением для описания распространяющихся навстречу друг другу волн в ИФП, для комплексной амплитуды  $A(\mathbf{r}, l)$  волны на выходе интерферометра можно получить интегральное уравнение

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, l) = & \operatorname{Re}^{i4kl} \iint_{\tilde{S}} A(\mathbf{r}_2, l) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2 + \\ & + (1 - R)^{1/2} e^{i2kl} \int_{\tilde{S}} A_0(\mathbf{r}_1) e^{i\xi_1(\mathbf{r}_1)} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) d^2 r_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_0(\mathbf{r}_1)$  — амплитуда входной волны, падающей на ИФП слева направо,  $k$  — волновое число,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) = \frac{k}{4\pi l} \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{4l} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 - \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (2)$$

— функция Грина,

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, l) \exp \{i[\varphi_1(\mathbf{r}_1) + \varphi_2(\mathbf{r}_2)]\} \quad (3)$$

— ядро уравнения. В (1) интегрирование проводится по площади зеркал  $S$ .

В общем случае точно решить уравнение (1) не удается. Для получения же приближенных результатов примем во внимание следующие обстоятельства. Дифракция ограниченных световых пучков с радиусом корреляции  $r_\phi$  характеризуется пространственным масштабом  $l_d \approx kar_\phi$  ( $r_\phi < a$ ), где  $a$  — поперечный размер пучка. На расстояниях  $z \gg l_d$  ( дальняя зона) радиус корреляции рассеянного поля  $r_p \approx \sqrt{z/ka}$  гораздо больше  $r_\phi$ . Таким образом, при  $2l > kar_\phi$  радиус корреляции  $r_0$  поля на выходе интерферометра больше радиуса корреляции  $r_\phi$  неоднородностей зеркал. В случае же короткого интерферометра, когда  $r_0 \approx r_\phi$ , величина  $r_\phi$  может превосходить радиус первой зоны Френеля, равный  $\sqrt{2\lambda l}$ . В обоих случаях правомерна замена

$$\iint_S A(\mathbf{r}_2, l) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2 \approx A(\mathbf{r}, l) \iint_S K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2. \quad (4)$$

Приближение (4) означает, что вследствие дифракционного рассеяния функция  $A(\mathbf{r}, l)$  оказывается более плавной, чем  $\exp(i\varphi_i(\mathbf{r}))$ . Естественно также полагать, что амплитуда  $A_0(\mathbf{r})$  изменяется медленнее функции  $\exp(i\xi_1(\mathbf{r}))$ , хотя выполнение последнего для получения решения (1) необязательно.

В принятых предположениях из (1) получаем

$$A(\mathbf{r}, l) \approx [(1 - R)^{1/2} e^{i2kl} Q(\mathbf{r})] [1 - |RD(\mathbf{r}) e^{i4kl}|^{-1} A_0(\mathbf{r})], \quad (5)$$

где введено

$$Q(\mathbf{r}) = \iint_S e^{i\xi_1(\mathbf{r}_1)} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) d^2 r_1, \quad D(\mathbf{r}) = \iint_S K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2. \quad (6)$$

Согласно (5) интенсивность  $I(\mathbf{r})$  на выходе ИФП равна

$$I(\mathbf{r}) = \frac{(1 - R)^2 |Q(\mathbf{r})|^2 I_0(\mathbf{r})}{1 + R^2 |D(\mathbf{r})|^2 - 2R |D(\mathbf{r})| \cos[4kl + \arg D(\mathbf{r})]}, \quad (7)$$

где учтен также коэффициент пропускания выходного зеркала.

Статистику флюктуаций фаз  $\varphi_i(\mathbf{r})$  будем считать гауссовой с. корреляционной функцией

$$\langle \varphi_i(\mathbf{r}_1) \varphi_i(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma_\varphi^2 \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{2r_\phi^2} \right], \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где  $r_\phi$  — радиус корреляции, причем  $\langle \varphi_1(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r}) \rangle = 0$ .

Используемым на практике в ИФП зеркалам соответствуют малые фазовые неоднородности, т. е. дисперсии фазовых флюктуаций при отражении  $\sigma_\varphi^2 = \langle \varphi_i^2(\mathbf{r}) \rangle \ll 1$ . В связи с этим с точностью до членов более высокого порядка, чем  $\sigma_\varphi^2$ , можно записать:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}) &\approx \iint_S \left[ 1 + i\xi_1(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{2} \xi_1^2(\mathbf{r}_1) \right] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) d^2 r_1, \\ D(\mathbf{r}) &\approx \iint_S \left\{ 1 + i[\varphi_1(\mathbf{r}_1) + \varphi_2(\mathbf{r}_2)] - \frac{1}{2} [\varphi_1(\mathbf{r}_1) + \varphi_2(\mathbf{r}_2)]^2 \right\} \times \\ &\quad \times G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, l) d^2 r_1 d^2 r_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку многолучевые интерферометры более чувствительны к фазовым флюктуациям (флюктуациям  $\arg D$ ), нежели к амплитудным флюктуациям, величины  $|D|$  и  $|Q|$  в выражении (7) можно заменить средними значениями, т. е. взять  $\langle |D| \rangle$  и  $\langle |Q| \rangle$ :

$$\langle |Q(r)| \rangle \simeq 1 - \sigma_{\xi_1}^2/2 + \sigma_{\alpha}^2/2, \quad \langle |D(r)| \rangle \simeq 1 - \sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\alpha}^2/2, \quad (10)$$

где  $\sigma_{\xi_1}^2 = ((n-1)\sigma_{\varphi}/2)^2$  — дисперсия фазовых флуктуаций первого зеркала на проход,  $\sigma_{\alpha}^2$  — дисперсия величины

$$\alpha'(\mathbf{r}) = \operatorname{Re} \int_S \xi_1(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) d^2 r_1, \quad (11a)$$

$\sigma_{\alpha}^2$  — дисперсия величины

$$\alpha(\mathbf{r}) = \operatorname{Re} \iint_S [\varphi(\mathbf{r}_1) + \varphi(\mathbf{r}_2)] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, l) d^2 r_1 d^2 r_2. \quad (11b)$$

В соответствии с (9) в общем случае  $\langle \arg D \rangle \neq 0$ . Последнее можно учесть, введя вместо  $l$  эквивалентную полудлину  $l_{\text{экв}}$  интерферометра. В рассматриваемом приближении флукуационная часть  $\arg D(\mathbf{r})$  есть просто  $\alpha(\mathbf{r})$  (11б), функция распределения которой  $w(\alpha)$  является гауссовой.

Таким образом, среднее значение интенсивности на выходе интерферометра определяется выражением

$$\langle I(4kl_{\text{экв}}) \rangle = (1-R)^2 \langle |Q| \rangle^2 I_0 \times \quad (12)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [1+R^2 \langle |D| \rangle^2 - 2R \langle |D| \rangle \cos(4kl_{\text{экв}} + \alpha)]^{-1} w(\alpha) d\alpha.$$

Опуская громоздкие промежуточные преобразования, приведем лишь конечный результат определения дисперсии  $\sigma_{\alpha}^2$  с учетом условия  $a_0 \gg (4l/k)^{1/2}$  ( $a_0$  — размер зеркал), которое было использовано и при выводе (10),

$$\sigma_{\alpha}^2 = \left( 1 + \frac{1}{2} \{ [1 + (2l/L_k)^2]^{-1} + [1 + (4l/L_k)^2]^{-1} \} \right) \sigma_{\varphi}^2, \quad (13)$$

где  $L_k = kr_{\varphi}^2/2$  — длина продольной корреляции фазовых флуктуаций на зеркале.

Обращает на себя внимание аналогия выражения (12) с соответствующим выражением геометрооптического приближения. Разница состоит в замене  $\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})$  на  $\alpha$ , а также в добавлении множителя  $\langle |D| \rangle$  перед  $R$  и  $\langle |Q| \rangle$  перед коэффициентом пропускания зеркала. Следовательно, дифракционные эффекты в рассматриваемом приближении слабых фазовых неоднородностей зеркал сводятся к введению соответствующих эффективных значений дисперсии фазовых неоднородностей  $\sigma_{\alpha}^2$ , коэффициентов отражения и пропускания зеркал в выражениях геометрооптического подхода.

Для высокодобротного интерферометра ( $R \gtrsim 0.9$ ) со слабыми неоднородностями зеркал ( $\sigma_{\varphi} \leq \pi/10$ ) (12) можно преобразовать к виду

$$\langle I(\Delta\psi) \rangle = \sqrt{\pi} v I_{\max} \operatorname{Re} \{ [1 - \Phi(v + i\tilde{\Delta\psi})] \exp[(v + i\tilde{\Delta\psi})^2] \}, \quad (14)$$

где  $\Delta\psi = 4kl_{\text{экв}}$  —  $(4kl_{\text{экв}})_{\max}$ ,  $(4kl_{\text{экв}})_{\max}$  — значение  $4kl_{\text{экв}}$ , соответствующее ближайшему интерференционному максимуму,  $\tilde{\Delta\psi} = \Delta\psi/\sqrt{2}\sigma_{\alpha}$ ,  $I_{\max} = (1-R)^2 \langle |Q| \rangle^2 I_0 (1 - R \langle |D| \rangle)^{-2}$ ,  $v = \sqrt{2/\sigma_{\alpha}^2 F}$ ,  $F = 4R \langle |D| \rangle / (1 - R \langle |D| \rangle)^2$ , а  $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt$  — функция ошибок.

Из (14) можно приближенно получить полуширину полосы пропускания  $\Delta\psi'$  реального ИФП, взятой по половинному уровню,

$$\Delta\psi' \simeq [(2/F)^2 + 2\sigma_{\alpha}^2 \ln 2]^{1/2}. \quad (15)$$

Полученные выражения (10), (13) — (15) определяют влияние дифракции на фазовых неоднородностях зеркала на его эффективный коэффициент отражения  $R_{\text{эфф}} = \langle |D| \rangle R$ , дисперсию  $\sigma_a^2$  фазовых флуктуаций волн в ИФП и на его пропускание. В предельном случае  $2l \ll L_k$  получаем результат геометрооптического приближения:  $\langle |D| \rangle = 1$  и  $\sigma_a^2 = 2\sigma_\varphi^2$ . Следовательно, явление дифракции уменьшает значения  $R_{\text{эфф}}$  и  $\sigma_a^2$ . Минимальные значения последних достигаются при сильном влиянии дифракции ( $2l \gg L_k$ ) и равны  $R_{\min} = (1 - \sigma_\varphi^2/2)R$ ,  $\sigma_a^2 = \sigma_\varphi^2$ .

Заметим также, что выведенные зависимости справедливы, если поперечный размер освещающего пучка значительно меньше размера зеркал. Строго говоря, при этом следует также принимать во внимание снижение  $\langle |D| \rangle$  за счет потерь, обусловленных боковым выходом излучения из интерферометра вследствие рассеяния на микродефектах зеркал. На практике этот фактор может быть учтен, если в качестве  $R$  использовать не интегральный коэффициент отражения, а лишь коэффициент, определяющий долю зеркально отраженного излучения.

Графики зависимости  $\Delta\psi'$  от отношения длины ИФП к длине продольной корреляции  $L_k$ , представленные на рис. 1, количественно характеризуют влияние дифракционных эффектов на полосу пропускания интерферометра.

Если уменьшение  $R_{\text{эфф}}$  за счет влияния дифракции представляется вполне естественным, то уменьшение  $\sigma_a^2$  кажется, на первый взгляд, несколько неожиданным. Следует заметить, что аналогичный эффект имеет место и в свободном пространстве при дифракции пучков на случайному фазовому экране [1]. При этом структура выражений (10), (13) аналогична выражениям для дисперсии амплитудных и фазовых флуктуаций в свободном пространстве. Тем не менее, при описании выходного поля интерферометра весьма существенными являются резонансные эффекты (см., например, (12)).

В заключение отметим также возможность анализа в рамках принятого нами подхода не только интенсивности выходной волны ИФП, что представляет наименьшие вычислительные трудности, но и ее амплитудных и фазовых характеристик, в том числе статистических, поскольку полученное решение вида (5) описывает поведение комплексной амплитуды поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
- Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику — М.: Наука, 1981.
- Жиглинский А. Г., Кучинский В. В. Реальный интерферометр Фабри—Перо. — Л: Машиностроение, 1983.
- Сирая Т. Н., Эцина А. Л., Эцин И. Ш. — Опт. и спектр., 1978, 45, № 1, с. 193.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
21 марта 1985 г.

#### DIFFRACTION EFFECTS AT MIRROR INHOMOGENEITY OF MULTIBEAM INTERFEROMETER

A. V. Belinskij, A. S. Chirkin

In the present paper the transfer coefficient and the interferometer transmission band have been firstly obtained taking into account diffraction phenomena at mirror inhomogeneity. Besides, calculations of the mirror reflection coefficient and phase fluctuation variance have been arrived out,

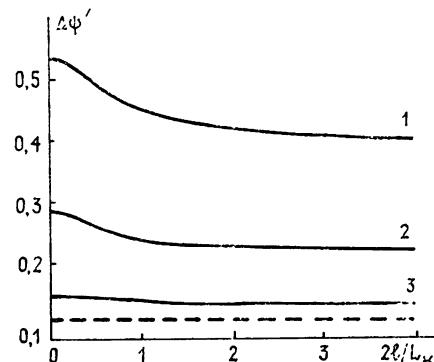


Рис. 1. Кривая 1 —  $\sigma_\varphi = \pi/10$ , 2 —  $\sigma_\varphi = \pi/20$ , 3 —  $\sigma_\varphi = \pi/50$ , пунктир соответствует идеальным зеркалам (везде  $R=0.9$ ).