ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1986*

УДК 536.621

О ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ НЕРАВНОВЕСНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Г. Н. Бочков, А. Л. Орлов

Для анализа неравновесного электрического шума используются обобщенные нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения в сочетании с определенными статистическими моделями переноса заряда в нелинейной системе. Установлена взаимооднозначная связь между спектральной плотностью мощности токовых флуктуаций и вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента при любых значениях среднего тока, отвечающая пуассоновской и квазигауссовой статистике переноса заряда. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом

В настоящей работе для расчета неравновесного электрического шума используются нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения (ФДС) [1, 2], устанавливающие связь между статистическими характеристиками неравновесных флуктуаций и макроскопическими диссипативными параметрами нелинейных систем. В сочетании с определенными гипотезами о статистике переноса заряда эта связь становится однозначной. Проверка статистических гипотез осуществляется путем обращения к известным экспериментам. Выявляются простые закономерности флуктуационно-диссипационного описания шума, и различные «виды шума», которые в литературе традиционно перечисляются и рассматриваются по отдельности («тепловой», «дробовой», «генерационно-рекомбинационный», «диффузионный» и др.) [9, 10, 12] естественно сливаются в один тепловой шум, зависящий от степени неравновесности и нелинейности системы.

Известно, что: 1) формула, подобная формуле Найквиста — Каллена — Велтона, справедлива и в нелинейных системах, если теория ограничивается линейным откликом на внешние возмущения [3, 4]. В частности, если $S^U(I)$ — спектральная плотность флуктуаций напряжения U при фиксированном постоянном токе I, то $S^U(0)=2kT\times$ $\times[d\langle U\rangle/dI]_{I=0}$ (T — температура, k — постоянная Больцмана); 2) аналогичное формуле Найквиста выражение [5, 6]

$$S^U(I)=2kTR_{\text{дис}}\equiv kT(d^2/dI^2)\langle U(I)\rangle I$$

$\left(R_{\text{дис}}=\dfrac{d\langle U\rangle}{dI}+\dfrac{1}{2}I\dfrac{d^2\langle U(I)\rangle}{dI^2}\right.$ — диссипативное сопротивление) справедливо с точностью до квадратичных по току I членов *.

Однако не существует универсальной формулы, связывающей спектральную плотность неравновесных флуктуаций напряжения с нелинейными откликами (обобщенными восприимчивостями) выше второго порядка. Нельзя, например, выразить $S^U(I)$ через параметры вольт-амперной характеристики (ВАХ), если последняя — полином третьего (или более высокого) порядка при любой величине заданного тока.

Определить спектральные характеристики электрических шумов при любой величине тока I (или заданного напряжения V) удается,

* Также заметим, что значительно позднее [5, 6] этот результат был получен в [7].

используя обобщенные ФДС [1,2] в сочетании с адекватными реальной микроструктуре исследуемого процесса макроскопическими статистическими моделями переноса заряда *.

1. С макроскопической точки зрения перенос заряда через нелинейное сопротивление в простейшем случае можно представить в виде суммы статистически независимых случайных процессов переноса электронов со средними частотами n_+ (отвечающей «положительным» импульсам тока) и n_- («отрицательным»). Используя эту модель ** и обобщенные неравновесные нелинейные ФДС из работы [1], нетрудно получить для спектральной плотности флуктуаций тока следующее выражение:

$$S^J(V) = e \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\frac{eV}{kT}\right)\langle J\rangle, \qquad (1)$$

где $\langle J\rangle$ — средний ток при заданном постоянном напряжении V, e — заряд электрона.

Соответствующий (1) средний ток, согласно ФДС [1], равен

$$\langle J\rangle = en_-[\exp(eV/kT) - 1]. \qquad (2)$$

Подчеркнем, что (1) и (2) справедливы при любой величине постоянного напряжения V, приложенного к нелинейному элементу (или $\langle J\rangle$).

Для полупроводникового диода формула, аналогичная (1), была получена в [9] при использовании формулы Шоттки для прямого и обратного токов, при этом ВАХ диода предполагалась известной. В то же время как (1), так и (2) являются следствиями обобщенных ФДС и выбранной модели флуктуаций тока через произвольный нелинейный двухполюсник: если ток через нелинейный резистор можно смоделировать суммой пуассоновски распределенных случайных импульсов амплитуды e, то ВАХ такого элемента имеет вид (2), а спектр токового шума определяется по формуле (1).

Если же привлечь иную макроскопическую модельную гипотезу о статистике процесса переноса заряда, то из ФДС будет следовать иная связь между спектром токового шума и ВАХ. Таким образом, выбирая адекватную реальной микроструктуре исследуемого процесса статистическую модель и используя ФДС, можно выйти за рамки применимости ранее известных [3–7, 9, 10] методов исследования неравновесного электрического шума в нелинейных («квадратичных» и «кубичных») системах и получить ряд новых результатов, отражающих специфику анализа на основе ФДС нелинейных свойств системы «во всех порядках».

Из формулы (1) можно (используя соответствующие приближения) получить известные ранее [3–7, 9, 10] результаты. При $(eV/kT) \ll 1$ (1) переходит в аналог формулы Найквиста

$$S^J(0) = 2kT[d\langle J\rangle/dV]_{V=0}$$

(см. выше). Используя соотношение*** $S^U(I) = [S^J(V)(d\langle J\rangle/dV)^{-2}]_{\langle J\rangle = I}$, из (1) и (2) нетрудно получить $S^U(I) = 2kTR_{\text{дис}}$, где в $R_{\text{дис}}$ сохранены

* Подчеркнем здесь, что ФДС не зависят от конкретной физической природы и конкретных микроскопических механизмов флуктуаций и диссипации. Использование статистических моделей позволяет ограничить число независимых ФДС и установить однозначную связь между макроскопическими диссипативными свойствами нелинейных систем и неравновесными флуктуационными характеристиками, не прибегая к сложным детальным микроскопическим расчетам последних.

** Отметим, что пуассоновская модель случайного процесса переноса заряда в нелинейном резисторе была рассмотрена в работе [8], где получено фундаментальное кинетическое уравнение для этого процесса, оператор которого удовлетворяет, как можно показать, ФДС.

*** Это соотношение связывает шумовые характеристики, соответствующие принципиально различным методам формирования стационарного неравновесного состояния: спектральную плотность флуктуаций напряжения $S^U(I)$ в режиме заданного постоянного (нефлуктуирующего) тока I и спектр токового шума $S^J(V)$, измеренный при заданном постоянном напряжении V.

лишь линейные по току члены. При $eV/kT > 1$ из (1) следует формула Шоттки: $S^J(V) = e\langle J\rangle$.

Для полупроводникового диода (с обратным током $en_- \equiv i_0 = \mathrm{const}$) согласно (1), (2)

$$S^U(I) = 2kTR_{\text{дис}} = 2kT\,\frac{d\langle U\rangle}{dI}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{I}{i_0}\right)\left(1 + \frac{I}{i_0}\right)^{-1}. \qquad (3)$$

Формула (3) дает простое обобщение результата, полученного в [5, 7] на случай сильных токов. Нетрудно, однако, проверить, что (3) верна только при $n_- = \mathrm{const}$, в противном случае $S^U(I)$ (или $S^J(V)$) нужно определять по формуле (1).

Для коэффициента шума [9–11]

$$\varepsilon \equiv \frac{S^J(V)}{2kT\,(d\langle J\rangle/dV)} = \frac{S^U(I)}{2kT\,(d\langle U\rangle/dI)}$$

из (1) с учетом (2) при $n_- = \mathrm{const}$ следует, что

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{I}{i_0}\right)\left(1 + \frac{I}{i_0}\right)^{-1}. \qquad (4)$$

На рис. 1 изображена зависимость $\varepsilon(I/i_0)$ от тока I/i_0, построенная по формуле (4) (кружками отмечены экспериментальные значения, полученные в [11] для перехода база — коллектор германиевого триода П 39Б ($i_0 = -1$ мкА). Прямой $\varepsilon_1 = 1$ соответствует спектр флуктуаций тока, вычисленный по формуле Найквиста, зависимости $\varepsilon_2(I/i_0)$ отвечает спектр, определенный из квадратичной ФДТ [5–7]. Совпадение теоретических и экспериментальных результатов свидетельствует об адекватности принятой статистической модели реальному процессу переноса заряда через полупроводник *. Подчеркнем, что, как следует из рис. 1, пуассоновская статистическая модель переноса заряда справедлива даже в сильнонеравновесной области $|eV/kT| \gg 1$.

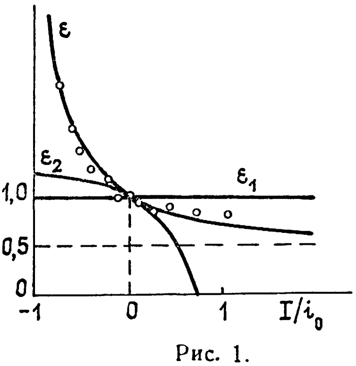

Рис. 1.

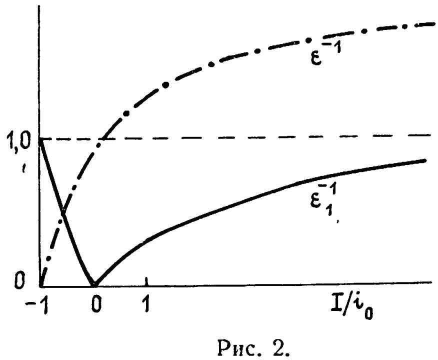

Рис. 2.

На рис. 2 представлены графики зависимости отношений

$$\varepsilon^{-1} = 2kT\,(d\langle U\rangle/dI)\,[S^U(I)]^{-1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1^{-1} = e|I|\,(d\langle U\rangle/dI)^2[S^U(I)]^{-1}$$

от I/i_0. Функции $\varepsilon^{-1}(I/i_0)$ и $\varepsilon_1^{-1}(I/i_0)$ наглядно иллюстрируют отличие $S^U(I)$ от спектра флуктуаций напряжения, вычисленного в первом случае по формуле $2kT\,(d\langle U\rangle/dI)$, что соответствует, используя терминологию, принятую в [9, 10], «формуле Найквиста для теплового шума»; во втором — по формуле Шоттки: $e|I|\,(d\langle U\rangle/dI)^2$ (заметим также, что $\varepsilon^{-1} = 2kT\,(d\langle J\rangle/dV)\,[S^J(V)]^{-1}$, $\varepsilon_1^{-1} = e|\langle J\rangle|\,[S^J(V)]^{-1}$).

* Из рис. 1 видно, что практикуемый иногда метод расчета флуктуаций напряжения, основанный на «линеаризации» системы в малой окрестности рабочей точки вольт-амперной характеристики и определении $S^U(I)$ по «формуле Найквиста» $S^U(I) = 2kT\,\dfrac{d\langle U\rangle}{dI}$ приводит к существенным ошибкам.

2. Формулы (1), (2) можно аналогично [1] обобщить на случай, когда отдельные случайные «акты» переноса электронов статистически зависимы (коррелированы). В этом случае в (1), (2) войдет эффективный заряд электрона $\tilde{e}=ae$, где a — коэффициент перенормировки, определяющий плотность вероятности $w_{\pm}(\tau)$ распределения времени τ между переносами электронов [1]:

$$\langle J\rangle = e\nu_{-}[\exp(\tilde{e}V/kT)-1]; \tag{5}$$

$$S^J(V) = \tilde{e}\,\langle J\rangle\,\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{e}V}{kT}\right); \tag{6}$$

$$w_{\pm}(\tau) = \frac{n_{\pm}}{\Gamma(a^{-1})}(n_{\pm}\tau)^{a^{-1}-1}e^{-n_{\pm}\tau}, \tag{7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, средняя частота «положительных» и «отрицательных» импульсов тока $\nu_{\pm}=n_{\pm}a$. Значение $a=1$ отвечает пуассоновской статистике токового шума. Среднее время между последовательными импульсами тока согласно (7) равно $(n_{\pm}a)^{-1}$. Значения $a>1$ описывают эффект «положительной» корреляции (группировки) импульсов: возникший импульс увеличивает вероятность последующего импульса. При $a<1$ корреляция «отрицательная» («отталкивательная»).

3. Рассмотрим подробнее формулы, вытекающие из (6) при $a\ll 1$. В этом случае неравенство $\tilde{e}V/kT\ll 1$, означающее, что приращение энергии в ходе отдельного акта переноса («перенормированного») заряда $\tilde{e}$ мало по сравнению с kT, может быть выполнено и при достаточно больших значениях приложенного к безынерционному нелинейному элементу постоянного напряжения V. При этом ВАХ нелинейного резистора, вообще говоря, остается нелинейной: $\langle J\rangle = (ae^2/kT)\nu_{-}(V)\,V$. Из (6) получим

$$S^J(V) = 2kT(\langle J\rangle/V) \equiv 2kTG_{\text{средн}}(V). \tag{8}$$

Формулу (8), связывающую спектр токового шума со средней проводимостью, и следующее из нее равенство

$$\langle J\rangle = (1/2kT)\,S^J(V)\,V \tag{8$'$}$$

можно получить и из общих ФДС [2], не используя пуассоновскую статистическую модель. Соотношение (8′) представляет частный случай вытекающего из ФДС разложения среднего тока по неравновесным полиспектральным характеристикам токового шума в стационарном состоянии при условии, что полиспектры высших порядков (биспектры, триспектры и т. д.) флуктуаций тока на нулевых частотах равны нулю (или по крайней мере выполняются неравенства типа $\left(\frac{kT}{V}\right)^2\frac{S^J(V)}{S_3^J(V)}\gg$ $\gg 1$, где $S_3^J(V)$ — триспектр *). Это условие означает, что случайные приращения заряда $\Delta Q(t)=\int_0^t J(\tau)\,d\tau$ на больших временах t (много больших времен корреляции флуктуаций тока) можно приближенно считать гауссовыми.

Таким образом, следствиями этой модели (и общих ФДС) являются в данном случае соотношения (8), (8′).

Рассмотрим в качестве конкретного примера шум вакуумного диода в режиме ограничения тока пространственным зарядом. Здесь как

* Подобные неравенства тривиальным образом вытекают из сравнения (8′) и формул (3) из [2].

раз имеет место отрицательная корреляция между отдельными актами переноса электронов вследствие их кулоновского взаимодействия, поскольку, попадая в область пространственного заряда, электрон повышает потенциальный барьер для следующих электронов и тормозит их. ВАХ имеет вид $\langle J\rangle=\text{const}\,V^{3/2}$. Используя (8), получим *

$$\varepsilon=2/3. \tag{9}$$

Этот результат хорошо согласуется с более сложными расчетами, основанными на рассмотрении элементарных механизмов переноса заряда (дающими $\varepsilon\simeq 0{,}64$), и экспериментом [12], что оправдывает использование этой статистической модели для расчета неравновесного токового шума в данном случае.

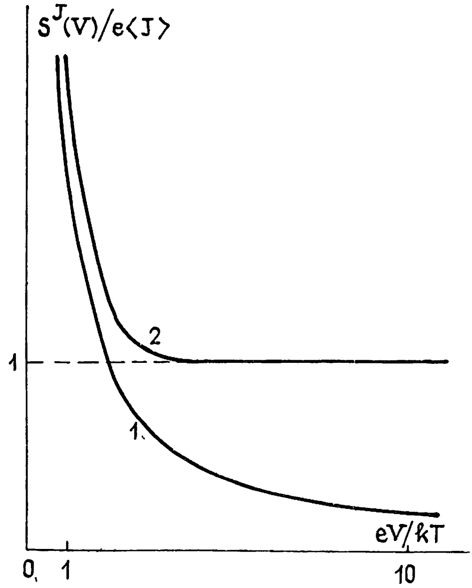

Рис. 3

Зависимость $S^J(V)/e\langle J\rangle$, найденная из (8), изображена на рис. 3 (кривая *1*). Отношение спектральной мощности токового шума $S^J(V)$ к $e\langle J\rangle$ — спектральной мощности, вычисленной по формуле Шоттки, как следует из (1) и (8), не зависит от вида ВАХ и определяется только приложенным к нелинейному резистору напряжением. Там же приведена зависимость (1), соответствующая пуассоновской статистической модели (кривая *2*).

4. В заключение отметим, что формулы (1), (2), (5), (6) справедливы для любых систем, процессы переноса в которых можно смоделировать суммами элементарных пуассоновски распределенных случайных процессов. Для «неэлектрических» систем изменяется лишь смысл входящих в (1), (2), (5), (6) величин **: в общем случае $\langle J\rangle$ есть средний поток переменной, выбранной для описания системы, V — термодинамически сопряженная сила, e — амплитуда элементарного акта переноса (типичное значение дискретного (скачкообразного) приращения переменной в процессе переноса). В настоящее время пуассоновская статистическая модель широко используется для описания флуктуационных процессов в химически активных средах [13–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочков Г Н, Кузовлев Ю. Е — ЖЭТФ, 1979, № 3, с 1071.
2. Bochkov G. N., Kuzovlev Yu. E. — Physica, 1981, **106 A**, p. 443.
3. Бункин Ф. В. — Радиотехника и электроника, 1961, **6**, № 1, с. 3, — Изв вузов — Радиофизика, 1962, **5**, № 1, с. 83.
4. Рытов С М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976.
5. Стратонович Р Л — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, № 10, с. 1512.
6. Ефремов Г. Ф. — ЖЭТФ, 1968, **55**, с. 2322.
7. Gupta M S. — Phys. Rev. A, 1978, **18**, p 2725;
   Гупта М. С. — ТИИЭР, 1982, **70**, № 8, с. 5.
8. Стратонович Р. Л. — Вестник МГУ. Сер физика, астрономия, 1960, № 4, с 99.

* Этот результат невозможно получить, оставаясь в рамках «квадратичной теории». Формальное применение ФДТ из [7] приводит к неверному результату с $\varepsilon=5/6$.

** Это же замечание справедливо и для формул (8), (8′).

9. Ван-дер-Зил А Шумы при измерениях. — М.. Мир, 1979.
10. Жалуд В., Кулешов В. Н. Шумы в полупроводниковых устройствах. — М. Сов. радио, 1977.
11. Тягай В. А., Колбасов Г. Я., Лукьянчикова Н. Б.; — Письма в ЖЭТФ, 1968, 8, с. 433.
12. Ван-дер-Зил А. Шум. — М.: Сов. радио, 1973.
13. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
14. Bochkov G. N., Orlov A. L., Kolpashchikov V. L. — Int. comm. heat mass transfer, 1985, 12, № 1, p. 33.
15. Malchov H., Schimansky-Geier L. Noise and diffusion in bistable nonequilibrium system. — Leipzig: Teubner-Verlag, 1985

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 марта 1985 г., после переработки 11 октября 1985 г.

ON THE FLUCTUATION-DISSIPATION MODELS OF NONEQUILIBRIUM ELECTRICAL NOISE IN NONLINEAR INERTIALESS SYSTEMS

G. N. Bochkov, A. L. Orlov

Generalized nonlinear fluctuation-dissipation relations combined with concrete statistical models of charge transfer in a nonlinear system are used to analize the nonequilibrium electrical noise. Single-valued correlation is obtained between spectral power density of current fluctuations and volt-ampere characteristic of a nonlinear element for any value of mean current corresponds to Poisson and quasigaussian statistical models of charge transfer The obtained results are in a good agreement with the experiment.

Аннотации депонированных статей

УДК 621 37222 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ НА ПОДВЕШЕННОЙ ПОДЛОЖКЕ

Ю А. Отмахов, И. В. Рахмелевич

В квазистатическом приближении решена система интегральных уравнений для компонент плотности тока на полосковом проводнике микрополосковой линии на подвешенной подложке. Выведено дисперсионное уравнение для основной волны, на основе квазистатической структуры поля основной волны приближенно рассчитан ее характеристический импеданс.

Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 6310 — В 86. Деп. от 29 августа 1986 г.
