

Неполярных примесей также сказывается на величине сдвига. Таким образом, изменение величины параметра сдвига наблюдаемой линии показывает изменение концентрации компонент газовой смеси или чистоту образца. С принципиальной стороны метод анализа путем слежения за средним дипольным моментом молекул газа является аналогом такого широко распространенного интегрального метода анализа, как рефрактометрия.

Важной характеристикой использующегося для такого рода измерений спектрального перехода может служить коэффициент пропорциональности между параметром сдвига частоты перехода и величиной дипольного момента молекул возмущающего газа, т. е. измеряемой среды. Для исследованного в настоящей работе перехода $s(1,0) \rightarrow a(0,0)$ $^{14}\text{NH}_3$ этот коэффициент достаточно велик и равен $K_s \approx 4 \text{ МГц/Тор}\cdot\text{Доб}$.

В заключение отметим, что пропорциональность сдвига среднему дипольному моменту молекул возмущающего газа может быть использована, например, для определения относительной концентрации (и разности энергий) молекул-изомеров, различающихся величиной дипольного момента, для регистрации появления в газе, например при охлаждении, молекулярных комплексов, отличающихся от исходных и величиной дипольного момента, и другими факторами, а также для интегрального химического анализа газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупнов А. Ф., Мельников А. А., Скворцов В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 6, с 625; Belov S. P., Krupnov A. F., Markov V. N., Melnikov A. A., Skvortsov V. A., Tretyakov M. Yu — J. Mol. Spectr., 1983, 101, p. 258.
2. Belov S. P., Kazakov V. P., Krupnov A. F., Markov V. N., Melnikov A. A., Skvortsov V. A., Tretyakov M. Yu — J. Mol. Spectr., 1982, 94, p. 264.
3. Белов С. П., Крупнов А. Ф., Мельников А. А., Скворцов В. А. Авторское свидетельство № 1061013 — Бюл. изобрет., 1983, № 46, с 156.
4. Осипов О. А., Минкин В. И., Гарновский А. Д. Справочник по дипольным моментам. — М.: Высшая школа, 1971.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
22 ноября 1984 г.

УДК 537.86, 530.18

ВОЗБУЖДЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДИСКРЕТНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. С. Пиковский

Хорошо известно, что в нелинейных сосредоточенных детерминированных системах могут возникать хаотические (стохастические) колебания [1]. Аналогичные процессы наблюдаются и в ограниченных распределенных системах (резонаторах), где, как правило, возбуждается конечное число мод. Имеется также ряд работ, посвященных хаотическим режимам в безграничных распределенных системах. При этом обычно рассматриваются задачи, сразу сводящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Например, подобное описание проводилось для стационарных волн [2], хаотически меняющихся в пространстве стационарных во времени волн [3] и др. В то же время в распределенных системах возможны специфические постановки задачи, связанные с развитием нестационарного хаоса в пространстве [4, 5]. В частности, в [4] на примере периодически возбуждаемой нелинейной цепочки выявлены два механизма хаотизации волн: 1) хаотизация в процессе распространения и 2) хаотизация в ближнем поле источника. При этом отмечалось, что во втором, более общем механизме принципиальную роль играет эффективная диссипация энергии излучаемыми волнами (радиационное затухание).

В данной работе механизм хаотизации волн в ближнем поле источника исследуется на простейшем примере линейной среды с сосредоточенным нелинейным элементом. Здесь удается явно выделить роль нелинейности и диссипации, связанной с излучением волн. Рассматриваются две постановки задачи — излучение хаотических волн сосредоточенным нелинейным источником и хаотизация волн при рассеянии периодической волны на нелинейном элементе.

1. Генерация хаотических волн. Рассмотрим одномерное волновое поле $u(x, t)$ ($-\infty < x < \infty$), возбуждаемое в точке $x=0$ нелинейным источником,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = \delta(x) F(u) f(t). \quad (1)$$

Здесь \hat{L} — линейный оператор, описывающий дисперсию волн, $f(t)$ — периодическая функция, $F(u)$ — нелинейная функция. Уравнение (1) описывает, например, возбуждение электромагнитной линии через нелинейный элемент, а также возбуждение поперечных колебаний струны неоднородным полем (аналогичную задачу о возбуждении линейного осциллятора см в [6]).

Пусть $f(t)$ представляет собой периодическую последовательность узких импульсов, которые мы аппроксимируем δ -функциями:

$$f(t) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT).$$

Волновое поле, генерируемое δ -импульсом с амплитудой ξ , действующим в момент времени $t=t_0$ в точке $x=x_0$, выражается через функцию Грина $G(x, t, x_0, t_0)$:

$$u(x, t) = \xi G(x, t; x_0, t_0).$$

В нашем случае имеется бесконечная последовательность импульсов, поэтому поле $u(x, t)$ представляется суммой.

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{[t/T]} G(x, t; 0, nT) F(u(0, nT)) a, \quad (2)$$

где $[\]$ — целая часть числа. Обозначим $y_n = u(0, nT)$. В силу однородности уравнения (1) во времени функция Грина зависит только от $t-t_0$, поэтому обозначим $G(0, t, 0, t_0) = g(t-t_0)$. В результате получаем для величин y_n бесконечномерное отображение

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a F(y_{n-j}) g(jT). \quad (3)$$

Рассмотрим сначала случай волн без дисперсии: $\hat{L}u = -\partial^2 u / \partial x^2$. Тогда $g(jT) = 1/2$, и из (3) следует

$$y_{n+1} = y_n + \frac{a}{2} F(y_n). \quad (4)$$

Таким образом, динамика распределенной системы свелась к одномерному отображению*. Как известно, в зависимости от вида функции F и значений параметра a подобные отображения могут демонстрировать как регулярное (периодическое), так и хаотическое поведение [7]. В частности, отображение (4) может демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода [8]. Волновое поле, соответствующее хаотическому режиму в (4), вычисляется по формуле (2), в которой $G(x, t; 0, t_0) = 0,5 \theta(t-t_0 - |x|)$, θ — функция Хевисайда. Поле $u(x, t)$ представляет собой набор распространяющихся с постоянной скоростью ступенек, амплитуды которых — хаотические

Более сложная картина возникает при учете дисперсии волн. Пусть $\hat{L}u = u - \partial^2 u / \partial x^2$, т. е. левая часть (1) есть уравнение Клейна—Гордона. Для этого уравнения функция Грина есть функция Бесселя нулевого порядка: $g(t) = 0,5 J_0(t)$. В результате из (3) получаем

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{2} F(y_{n-j}) J_0(jT). \quad (5)$$

Свести это бесконечномерное отображение к одномерному не удастся. Физически это связано с тем, что δ -импульс возбуждает все волновые числа и частоты, в том числе и имеющие нулевую групповую скорость. Вклад этих компонент и обеспечивает зависимость y_n от всех предыдущих y_{n-j} . Однако, поскольку при больших j $J_0(jT) \sim (jT)^{-1/2} \cos(jT - \pi/4)$, можно ожидать, что на y_n эффективно влияет только конечное число предыдущих y_{n-j} .

* Аналогичное отображение было получено в [13] для волн в резонаторе с сосредоточенным нелинейным активным элементом.

Уравнение (5) решалось численно при различных a, T ; нелинейная функция $F(y)$ была выбрана в виде $F(y) = \cos y$. Последовательность y_n бралась конечной, $0 \leq n \leq N$. Большинство расчетов проводилось при $N=10^3$, контрольные расчеты с другими значениями N не выявили существенных изменений. При $T \lesssim 2$ с увеличением a наблюдался переход к хаосу через удвоения периода. Так, при $T=1$ критическое значение параметра a равнялось $a_c=6,47$. Как известно [7], переход к хаосу через удвоения периода происходит в системах, которые эффективно сводятся к одномерному отображению. При $T \gtrsim 2$ хаотическому режиму предшествует квазипериодический. В частности, при $T=5$ стохастические колебания с практически равномерным спектром наблюдаются при $a > 10,5$. Переход к хаосу через квазипериодичность также может быть описан с помощью отображения небольшой размерности [9]. Таким образом, характер бифуркаций в системе (5) свидетельствует, что эффективно возбуждается небольшое число степеней свободы.

2. Хаотизация волн при их рассеянии. Рассмотрим струну, к которой прикреплен нелинейный осциллятор — масса m с нелинейной пружиной (рис 1). Колебания струны описываются линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = T/\rho, \quad (6)$$

где ρ — плотность, T — натяжение. Колебания осциллятора $z(t)$ задаются уравнением

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + Q(z) = T \left(\frac{\partial y^+}{\partial x} - \frac{\partial y^-}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}, \quad (7)$$

где $Q(z)$ — нелинейная жесткость пружины. Связь z с y определяется граничным условием

$$z(t) = y^-(0, t) = y^+(0, t), \quad (8)$$

где y^-, y^+ — поля при $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Уравнения (6) — (8) описывают также электромагнитную линию, нагруженную на нелинейный контур.

Пусть со стороны $x = -\infty$ падает гармоническая волна

$$y_{\text{пад}} = e \cos(kx - kct).$$

Рассеянное поле можно представить в виде

$$y_{\text{рас}}^{\mp} = \int_0^{\infty} dk [A_{\mp}(k) \cos(kx \pm kct) + B_{\mp}(k) \sin(kx \pm kct)]. \quad (9)$$

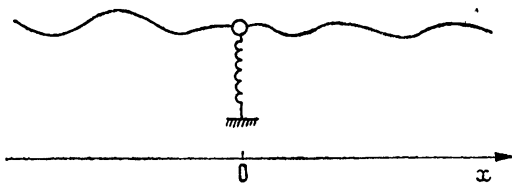


Рис. 1.

Подставляя в (8) $y^- = y_{\text{пад}} + y_{\text{рас}}^-, y^+ = y_{\text{рас}}^+$ и дифференцируя получающиеся соотношения, находим

$$\frac{\partial y^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{c} \frac{dz}{dt}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial y^-}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{c} \frac{dz}{dt} + 2\epsilon k \sin kct.$$

Подставляя (10) в (7), получим

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\rho c \frac{dz}{dt} + Q(z) = -2\epsilon k \rho c^2 \sin kct. \quad (11)$$

Уравнение (11) есть уравнение нелинейного осциллятора с затуханием, возбуждаемого периодической внешней силой. Подобные системы подробно исследовались (см., например, [10, 11]), и во многих случаях было обнаружено стохастическое поведение. Например, в [14] странный аттрактор найден в неавтономном уравнении Дуффинга, получающемся из (11) при $Q(z) = a_1 z + a_2 z^3$. Из хаотического характера колебаний $z(t)$ сразу следует хаотический характер рассеиваемых нелинейным элементом волн. Таким образом, при рассеянии регулярных волн на нелинейном элементе возможна

хаотизация волнового поля. Отметим, что при учете дисперсии волн вместо (11) получается нелинейное интегродифференциальное уравнение (например, для волн на воде такое уравнение выводится в [12]), численное решение которого сопряжено с большими трудностями. Здесь не проходит представление набегающей волны последовательно δ -импульсов, как в задаче о возбуждении волн, поскольку такая волна в диспергирующей среде расплывается.

В обеих задачах, рассмотренных в данной статье, диссипации нет и исходные уравнения консервативны. Тем не менее в них наблюдаются хаотические режимы, характерные для систем с диссипацией. Это связано с бесконечным числом степеней свободы, излучение волн сосредоточенным нелинейным элементом эквивалентно диссипации. Эта диссипация появляется «в чистом виде», если дисперсия волн отсутствует. Если же волны диспергирующие, то ситуация оказывается более сложной. В частности, свести задачу к конечномерным уравнениям не удается. Однако, как показывает численный эксперимент, и в этом случае переход к хаосу осуществляется по диссипативным, а не консервативным сценариям. В заключение отметим перспективность рассмотренных постановок задач с точки зрения исследования диссипативного квантового хаоса Действительно, непосредственное квантование диссипативных систем наталкивается на большие трудности, в то время как методы квантования распределенных систем хорошо разработаны.

Автор благодарит М. И. Рабиновича за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 123
- 2 Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A., Papko V. V., Pikovskiy A. S. — Phys. Lett. A, 1979, 74, № 3—4, p. 177.
- 3 Pikovskiy A. S. — Phys. Lett. A, 1980, 80, № 5—6, p. 367.
- 4 Пиковский А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 40, № 6, с. 217.
- 5 Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, № 12, с. 561.
- 6 Кузнецов С. П., Ерастова Е. Н. — В сб.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике Кн 2 — Саратов: Гос ун-т, 1983, с. 3
- 7 Лихтенберг М., Либерман А. Регулярная и стохастическая динамика — М: Мир, 1984.
- 8 Feigenbaum M. J. — Physica D, 1983, 7, № 1—3, p. 16
- 9 Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S. J. — Physica D, 1982, 5, № 2—3, p. 370.
- 10 Holmes P. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1979, A292, p. 419.
- 11 Крюков Б. И., Середович Г. И. — ДАН СССР, 1981, 258, № 2, с. 311
- 12 Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — М: Наука, 1977
- 13 Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 6, с. 1118

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1984 г