ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 9 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 621 372 826

ОБОБЩЕННЫЙ ИМПЕДАНС В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКАХ

С. В. Бирюков

Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для матрицы поверхностного импеданса слоистого пьезоэлектрического полупространства. Получены компактные выражения для потока энергии и ее плотности в поверхностных волнах Рассмотрены частные случаи слоистых сред и рассеяние поверхностных волн на неоднородностях произвольного вида.

Исследование распространения поверхностных акустических или электромагнитных волн в твердых телах является одной из основных задач акустоэлектроники и интегральной оптики [1, 2]. В практических устройствах среда распространения представляет собой планарную многослойную структуру, состоящую из слоев различных анизотропных, как правило, пьезоэлектрических, веществ. В общем случае параметры вещества могут быть функциями поперечной координаты.

Для решения уравнений движения в таких средах приходится применять достаточно сложные численные методы. Ниже показано, что, используя понятие матрицы поверхностного импеданса, эти методы можно в некоторой степени формализовать и получить в компактной и удобной для расчетов форме выражения для энергетических характеристик поверхностных волн.

В акустическом случае понятие поверхностного импеданса на границе однородного полупространства для чисто упругих сред рассматривалось в работах [3–5] и для пьезоэлектрических сред в квазистатическом приближении — в работах [6, 7]. Электромагнитный случай исследовался в работах [8, 9]. В перечисленных работах конкретный вид импеданса определялся после решения уравнений движения для полей в среде.

Другой способ определения импеданса предложен в работах [10–12], где непосредственно для его матрицы выведено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в случаях упругих изотропных [10], анизотропных [11] и изотропных диэлектрических [12] слоистых сред. В данной работе такое уравнение получено в общем случае слоистой анизотропной пьезоэлектрической среды, допускающей распространение связанных акустоэлектромагнитных волн.

1. Общие соотношения. Рассмотрим произвольную возможно неоднородную, но стационарную пьезоэлектрическую среду. Выберем в этой среде систему координат x_1, x_2, $x_3 = z$ и обозначим через $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, 0\}$ двумерный координатный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси z. Проведем на произвольном уровне координаты $z = z_0$ плоскость и рассмотрим для определенности верхнее полупространство $z \geqslant z_0$.

Введем 5-мерные вектор-столбцы $T_L(t, \boldsymbol{x}, z)$ и $V_L(t, \boldsymbol{x}, z)$ следующими соотношениями:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, \qquad T_{3+\alpha} = \frac{c}{4\pi} [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}]_\alpha,$$
$$V_i = u_i, \qquad \dot{V}_{3+\alpha} = -E_\alpha, \tag{1}$$

где $\sigma_{ij}(t, \boldsymbol{x}, z)$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}, z)$, $\boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{x}, z)$ и $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}, z)$ — тензор упругих напряжений, векторы смещений, магнитного и электрического полей соответственно, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по оси z внутрь полупространства $z \geqslant z_0$, t — время, c — скорость света в вакууме, точка означает производную по времени, большие латинские индексы здесь и ниже пробегают значения 1—5, малые (кроме m и n) — 1—3, а греческие — 1—2. Если поля при $z \to \infty$ удовлетворяют условиям излучения, то для их однозначного определения во всем объеме полупространства достаточно задать на его поверхности компоненты $V_L(t, \boldsymbol{x}, z_0)$. Тогда поля при $z \geqslant z_0$ будут связаны с $V_L(t, \boldsymbol{x}, z_0)$ линейной связью (уравнения движения предполагаются линейными), которую для вектора T_L на поверхности $z = z_0$ можно в самом общем случае записать в виде

$$T_L(t, \boldsymbol{x}, z_0) = \int \zeta_{LM}(t - t', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', z_0) V_M(t', \boldsymbol{x}', z_0)\, dt'\, d^2\boldsymbol{x}'. \tag{2}$$

Здесь $\zeta_{LM}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', z_0)$ — матрица обобщенного поверхностного импеданса полупространства $z \geqslant z_0$.

В дальнейшем удобно перейти к полям $T_L(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0)$ и $V_L(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0)$ в фурье-представлении, которые связаны с полями в координатном представлении соотношениями вида

$$V_L(t, \boldsymbol{\varkappa}, z_0) = \int V_L(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0)\, e^{i\varkappa x - i\omega t}\, d\omega\, d^2\varkappa,$$

где $\boldsymbol{\varkappa}$ — двумерный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{n}$. Преобразуя (2) по Фурье, получаем связь

$$T_L(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0) = \int \zeta_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}, z_0) V_M(\omega, \boldsymbol{q}, z_0)\, d^2q, \tag{3}$$

где $\zeta_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}, z_0)$ — импеданс в фурье-представлении. Для слоистой или поперечно-однородной среды (однородной относительно смещений в плоскости $z = z_0$) импеданс в (2) будет зависеть от разности $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$. При этом $\zeta_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}, z_0) = \zeta_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0)\delta(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{q})$ и равенство (3) становится алгебраическим,

$$T_L(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0) = \zeta_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0) V_M(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z_0), \tag{4}$$

с импедансом, зависящим только от одного векторного аргумента.

Приведенные выше рассуждения можно повторить и для нижнего полупространства $z \leqslant z_0$. Будем отмечать величины, относящиеся к верхнему полупространству, знаком «+», а к нижнему — знаком «—». На границе полупространств $z = z_0$ должны выполняться условия $V_L^{(+)} = V_L^{(-)} \equiv V_L$ и $T_L^{(+)} + T_L^{(-)} = 0$ (единичные векторы $\boldsymbol{n}^{(+)}$ и $\boldsymbol{n}^{(-)}$ направлены в противоположные стороны вдоль оси z). Подставив в последнее условие выражения (3) для каждой из сред, получим на границе $z = z_0$ уравнение для поля

$$\int Y_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}, z_0) V_M(\omega, \boldsymbol{q}, z_0)\, d^2q = 0, \tag{5}$$

где введено обозначение для суммарного импеданса

$$Y_{LM}(\omega, \varkappa, q, z_0) = \zeta_{LM}^{(+)}(\omega, \varkappa, q, z_0) + \zeta_{LM}^{(-)}(\omega, \varkappa, q, z_0). \tag{6}$$

В случае поперечно-однородной среды интегральное уравнение (5) превращается в алгебраическое

$$Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0) V_M(\omega, \varkappa, z_0) = 0 \tag{7}$$

с суммарным импедансом поперечно-однородной среды

$$Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0) = \zeta_{LM}^{(+)}(\omega, \varkappa, z_0) + \zeta_{LM}^{(-)}(\omega, \varkappa, z_0). \tag{8}$$

Уравнение (7) определяет собственные (поверхностные) моды, возможные в такой среде. Чтобы оно имело отличные от нуля решения, необходимо выполнение условия

$$\Delta(\omega, \varkappa, z_0) = \det Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0) = 0, \tag{9}$$

являющегося дисперсионным уравнением собственных мод Отметим, что конкретный вид импеданса $Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0)$ зависит, конечно, от положения поверхности, на которой он задается. Однако корни уравнения (9) от этого положения зависеть не должны в силу единственности решения физической задачи.

Суммарный импеданс неоднородной среды (6) всегда можно представить в виде

$$Y_{LM}(\omega, \varkappa, q, z_0) = Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0)\, \delta(\varkappa - q) + Y_{LM}^{\text{н}}(\omega, \varkappa, q, z_0),$$

где член $Y_{LM}^{\text{н}}$ определяется структурой неоднородностей. При этом уравнение для поля (5) переходит в более удобное для расчетов уравнение

$$Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0) V_M(\omega, \varkappa, z_0) = -\int Y_{LM}^{\text{н}}(\omega, \varkappa, q, z_0)\, V_M(\omega, q, z_0)\, d^2q. \tag{10}$$

2. Уравнение для матрицы поверхностного импеданса. Поскольку импеданс является характеристикой структуры вещества и не должен зависеть от полей в среде, то естественно попытаться вывести соотношение, связывающее его с параметрами среды, исключением из уравнений движения и материальных уравнений всех компонент полей. Выведем такое соотношение для немагнитной пьезоэлектрической анизотропной поперечно-однородной среды с произвольной зависимостью материальных параметров от координаты z. Уравнения движения и материальные уравнения, записанные для трансформант Фурье полей, являющихся функциями z, имеют вид

$$\frac{d\sigma_{ij} n_j}{dz} + i\sigma_{ij}\varkappa_j + \rho\omega^2 u_i = 0; \tag{11}$$

$$\frac{d}{dz}[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}] + i[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\varkappa}] = ik\boldsymbol{D}; \tag{12}$$

$$\frac{d}{dz}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}] + i[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varkappa}] = -ik\boldsymbol{H}; \tag{13}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(n_l \frac{du_k}{dz} + i\varkappa_l u_k\right) + e_{klj} E_k; \tag{14}$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j - 4\pi e_{ijk}\left(n_k \frac{du_j}{dz} + i\varkappa_k u_j\right), \tag{15}$$

где ρ, $\hat{C}_{ijkl}$, $\hat{e}_{ijk}$, ε_{ij} — соответственно плотность вещества, упругий, пьезоэлектрический и диэлектрический тензоры, компоненты которых являются функциями ω и z, D_i — вектор электрической индукции, $k=\omega/c$, единичный вектор $\boldsymbol{n}$ направлен по координате z. Соотношение (4), которое может рассматриваться на любом уровне координаты $z=\text{const}$, связывает на границе полупространства $z>\text{const}$ трансформанты Фурье нормальных компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}n_j$, смещений u_j, тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Поэтому оставим в системе (11)—(15) только эти компоненты. Нормальные компоненты электрического и магнитного полей $(\boldsymbol{En})$ и $(\boldsymbol{Hn})$ исключаются с помощью уравнений (12) и (13), домноженных скалярно на $\boldsymbol{n}$, где вместо индукции $\boldsymbol{D}$ нужно подставить ее значение (15). Компоненты $\sigma_{ij}\varkappa_j$ в (11) исключаются с помощью выражения (14). В результате остается десять дифференциальных уравнений первого порядка для величин, входящих в соотношение (4): три уравнения (11), четыре оставшихся уравнения из системы (12), (13), описывающих движение в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{n}$, и три уравнения, полученных из материального соотношения (14), умноженного на n_j со сверткой по индексу.

Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки и вводя переменные (1), эту систему из десяти уравнений можно коротко записать в матричном виде:

$$\frac{dT}{dz} + \hat{S}T + \hat{G}V = 0; \tag{16}$$

$$\frac{dV}{dz} - \hat{Q}\,T + \hat{S}'V = 0, \tag{17}$$

где матрицы пятого порядка $\hat{S}$, $\hat{G}$ и $\hat{Q}$ имеют следующие компоненты ($\hat{S}'$ — матрица, транспонированная по отношению к $\hat{S}$):

$$S_{ij} = i\varkappa\left(h_{ij} + 4\pi\,\frac{e_{in}\,g_{jn}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right), \qquad S_{i,3+\beta} = -\,\frac{4\pi i\varkappa^2\,e_{in}m_\beta}{\omega\,\tilde{\varepsilon}_{nn}},$$

$$S_{3+\alpha,j} = i\omega\left(g_{j\alpha} - g_{jn}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha n}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right), \qquad S_{3+\alpha,3+\beta} = i\varkappa m_\beta\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha n}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}};$$

$$G_{ij} = \varkappa^2\left(C_{ij} - 4\pi\,\frac{e_{in}\,e_{jn}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right), \qquad G_{i,3+\beta} = -\omega\varkappa\left(e_{i\beta} - e_{in}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{\beta n}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right),$$

$$G_{3+\alpha,j} = -\,\omega\varkappa\left(e_{j\alpha} - e_{jn}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha n}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right),$$

$$G_{3+\alpha,3+\beta} = \frac{\omega^2}{4\pi}\left[\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha n}\,\tilde{\varepsilon}_{\beta n}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}} - \frac{\varkappa^2}{k^2}(\delta_{\alpha\beta} - m_\alpha\,m_\beta)\right];$$

$$Q_{ij} = B_{ij} - 4\pi\,\frac{g_{in}\,g_{jn}}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}, \qquad Q_{i,3+\beta} = \frac{4\pi\varkappa\,g_{in}m_\beta}{\omega\,\tilde{\varepsilon}_{nn}},$$

$$\hat{Q}_{3+\alpha,j} = \frac{4\pi\varkappa\, g_{jn}\, m_\alpha}{\omega\, \tilde{\varepsilon}_{nn}}, \quad Q_{3+\alpha,3+\beta} = \frac{4\pi}{\omega^2}\left(k^2\delta_{\alpha\beta} - \varkappa^2\frac{m_\alpha m_\beta}{\tilde{\varepsilon}_{nn}}\right).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\varkappa = |\boldsymbol{\varkappa}|,\ m_\alpha = \frac{\varkappa_\alpha}{\varkappa},\quad B_{lj} = (C_{lnnj})^{-1},\quad h_{ij} = C_{lmnl}B_{lj},\quad g_{lj} = B_{ll}\,e_{jln},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{lj} = \varepsilon_{lj} + 4\pi g_{li}\,e_{jln},\quad e_{lj} = e_{jlm} - g_{ej}C_{lmnl},$$

$$C_{ij} = \frac{\rho\omega^2}{\varkappa^2}\delta_{ij} - C_{lmmj} + h_{il}C_{lnmj},$$

а индексы m и n стоят вместо индексов суммирования, одинаковых с индексами векторов m_α и n_i, например $\tilde{\varepsilon}_{in}=\tilde{\varepsilon}_{ij}n_j$, $e_{ijm}=e_{ij\alpha}m_\alpha$. Отметим, что матрицы $\hat{G}$ и $\hat{Q}$ симметричны.

Подставим теперь в систему (16), (17) вместо T выражение (4), считая все входящие в (4) компоненты функциями z. Производную dV/dz, появляющуюся при этом в уравнении (16), заменим с помощью уравнения (17). В результате придем к линейному однородному уравнению для V, которое в силу произвольности этого вектора должно удовлетворяться тождественно. Таким образом, необходимо приравнять нулю матрицу полученного уравнения, что приведет к нелинейному уравнению для матрицы поверхностного импеданса $\hat{\zeta}$:

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dz} + \hat{\zeta}\hat{Q}\hat{\zeta} + \hat{S}\hat{\zeta} - \hat{\zeta}\hat{S}' + \hat{G} = 0, \tag{18}$$

связывающему импеданс с параметрами среды. В этом уравнении $\hat{\zeta}(\omega,\boldsymbol{\varkappa},z)$ — это матрица импеданса верхнего полупространства на поверхности $z=\text{const}$. Выведенное уравнение обобщает уравнения для импедансов, полученные в работах [10–12] в простых случаях чисто упругих и диэлектрических слоистых сред.

Для решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (18) необходимо задать начальное условие для импеданса $\hat{\zeta}^0$ на каком-либо уровне $z=z_0$. Тогда уравнение (18) интегрируется в области $z<z_0$ с начальным условием $\hat{\zeta}(\omega,\boldsymbol{\varkappa},z_0)=\hat{\zeta}_0$. Отметим, что на практике всегда можно указать такое z_0, для которого полупространство $z>z_0$ будет свободным. В этом случае компоненты начального импеданса $\zeta^0_{3+\alpha,3+\beta}$ равны компонентам поверхностного электромагнитного импеданса вакуума [8, 12], а остальные его компоненты равны нулю. Таким образом, для нахождения матрицы импеданса имеет место задача Коши, методы решения которой хорошо разработаны в вычислительной математике (например методы Рунге—Кутта), и мы не будем на них останавливаться. В частном случае однородной среды импеданс полупространства не должен зависеть от координаты z. При этом член с производной в (18) исчезает и уравнение становится алгебраическим.

3. Энергетические соотношения. Выведем теперь с помощью матрицы поверхностного импеданса выражения для потока энергии и ее плотности в поперечно-однородной среде. Поток энергии волновых полей в пьезоэлектрике состоит из упругой и электромагнитной частей и дается выражением

$$w_i = -\overline{\sigma_{ij}\dot{u}_j} + \frac{c}{4\pi}\overline{[E, H]}_i, \tag{19}$$

где черта означает усреднение по времени, а поля подразумеваются в координатном представлении. Проведем на произвольном уровне координаты z плоскость и рассмотрим поток энергии w_n от этой плоскости в верхнее полупространство. Умножая (19) скалярно на $\boldsymbol{n}$ и вводя поля (1), получаем простое выражение

$$w_n = -\overline{T_L V_L}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь монохроматические поля вида $V_L(\omega, \varkappa, z) \times \times e^{i\varkappa x - i\omega t}$. Подставив с учетом связи (4) такие поля в выражение (20), легко получить

$$w_n = \frac{i\omega}{4}\left[\zeta^*_{LM}(\omega, \varkappa, z) - \zeta_{ML}(\omega, \varkappa, z)\right] V_L V^*_M .$$

Для полей, удовлетворяющих условиям излучения, необходимо выполнение неравенства $w_n \geqslant 0$. Если поток энергии вдоль $\boldsymbol{n}$ отсутствует, что может, например, осуществляться в случае собственных мод, то из условия $w_n = 0$ в силу произвольности компонент V_L следует эрмитовость матрицы поверхностного импеданса $\zeta_{LM} = \zeta^*_{ML}$.

Найдем в области эрмитовости матрицы ζ_{LM} выражение для вектора потока энергии w_α, лежащего в плоскости, перпендикулярной оси z. Для этого необходимо его выражение (19) записать для монохроматических полей, исключить $\sigma_{\alpha j}$ и нормальные компоненты электрического и магнитного полей аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнения для импеданса. Вводя затем поля (1) и используя связь (4), систему уравнений (16), (17) и уравнение для импеданса (18), можно привести выражение (19) для w_α к простому виду

$$w_\alpha = \frac{\omega}{4}\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \zeta_{LM}}{\partial \varkappa_\alpha} V^*_L V_M\right). \tag{21}$$

В формулу (21) входит импеданс верхнего полупространства. В случае импеданса нижнего полупространства нужно поменять знак перед производной по z.

Предположим, что при $|z| \to \infty$ поля исчезают. Проинтегрируем выражение (21) по z от $-\infty$ до произвольного z_0 и от z_0 до ∞, причем в первом интеграле будем использовать формулу для нижнего полупространства. В результате получим выражение для интегрального потока энергии

$$W_\alpha = -\frac{\omega}{4}\frac{\partial Y_{LM}}{\partial \varkappa_\alpha} V^*_L V_M, \tag{22}$$

где $Y_{LM}(\omega, \varkappa, z_0)$ — суммарный импеданс (8) на уровне z_0. Выражение (22) справедливо в области эрмитовости матрицы Y_{LM}, в том числе и для собственных мод, удовлетворяющих условию (7).

Чтобы получить выражение для плотности энергии u волновых полей, необходимо рассматривать квазимонохроматические поля вида $V_L(\omega, \varkappa, z, t)e^{i\varkappa x - i\omega t}$, амплитуда которых — медленная функция времени .Для таких полей

$$\frac{du}{dt} = -\operatorname{div} w = -\frac{dw_n}{dz}, \tag{23}$$

где w_n определяется соотношением (20). С помощью связи (4) для трансформант Фурье полей нетрудно найти связь и между медленно меняющимися амплитудами $T_L(\omega, \varkappa, z, t)$ и $V_L(\omega, \varkappa, z, t)$, которая имеет вид

$$T_L = \zeta_{LM} V_M + i \frac{\partial \zeta_{LM}}{\partial \omega} \frac{\partial V_M}{\partial t}.$$

Используя это выражение в соотношении (20) для w_n, записанном через комплексные медленно меняющиеся амплитуды, получаем из (23) в области эрмитовости матрицы ζ_{LM} выражение для du/dt, из которого видно, что плотность энергии волновых полей в пьезоэлектрике

$$u = \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left[\left(\zeta_{LM} - \omega \frac{\partial \zeta_{LM}}{\partial \omega} \right) V_L^* V_M \right]. \quad (24)$$

Проинтегрировав (24) по z от $-\infty$ до ∞ аналогично тому, как это было сделано для потока энергии, найдем выражение для интегральной плотности энергии

$$U = -\frac{1}{4} \left(Y_{LM} - \omega \frac{\partial Y_{LM}}{\partial \omega} \right) V_L^* V_M. \quad (25)$$

В случае собственных мод первый член в (25) в силу равенства (7) исчезает. Для этих мод интегральные поток и плотность энергии связаны между собой через групповую скорость $d\omega/d\varkappa_\alpha$ обычным соотношением $W_\alpha = \frac{d\omega}{d\varkappa_\alpha} U$, в чем нетрудно убедиться, находя полную производную по $\varkappa_\alpha$ от равенства (7), умноженного на V_L^* со сверткой.

4. Примеры. Приведем несколько достаточно общих примеров использования матрицы обобщенного поверхностного импеданса. Прежде всего отметим, что в отсутствие пьезосвязи ($e_{ijk} = 0$) в матрицах S_{LM}, Q_{LM} и G_{LM} останутся только члены с индексами $L = i$, $M = j$ и $L = 3 + \alpha$, $M = 3 + \beta$. В результате матричное уравнение для импеданса (18) распадается на два независимых уравнения для определения упругого ζ_{ij} и электромагнитного $\zeta_{3+\alpha, 3+\beta}$ импедансов. При этом энергетические характеристики (21), (22) и (24), (25) сохранят свой вид для независимых упругих и электромагнитных волн с заменой входящего в них обобщенного импеданса на соответствующие упругий и электромагнитный импедансы. Для таких частных случаев аналогичные (22) и (25) выражения были получены ранее в работах [11, 12].

Во многих практических задачах плоскую границу пьезоэлектрика можно считать свободной от механических напряжений, например, когда примыкающее полупространство — а) вакуум, б) диэлектрик, плотностью которого можно пренебречь, или в) пьезоэлектрик без акустического контакта. В этом случае на поверхности пьезоэлектрического полупространства между касательными компонентами электрического и магнитного полей (1) имеет место связь

$$T_{3+\alpha}(\omega, \varkappa) = \zeta^e_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa) V_{3+\beta}(\omega, \varkappa), \quad (26)$$

где электромагнитный импеданс (точнее адмитанс) $\zeta^e_{\alpha\beta}$ выражается через компоненты обобщенного импеданса соотношением

$$\zeta^e_{\alpha\beta} = \zeta_{3+\alpha, 3+\beta} - \zeta_{3+\alpha, j} \zeta^{-1}_{ji} \zeta_{i, 3+\beta},$$

в чем нетрудно убедиться, полагая в (4) $T_i = 0$ и исключая компоненты V_j. Если электромагнитные импедансы примыкающих полупространств — $\zeta^{e(+)}_{\alpha\beta}$ и $\zeta^{e(-)}_{\alpha\beta}$, то, вводя суммарный импеданс $Y^e_{\alpha\beta}=\zeta^{e(+)}_{\alpha\beta}+\zeta^{e(-)}_{\alpha\beta}$, получаем с помощью (26) из граничных условий уравнение для определения собственных мод $Y^e_{\alpha\beta}(\omega,\varkappa)E_\beta=0$, дисперсионное уравнение которых—$\det Y^e_{\alpha\beta}(\omega,\varkappa)=0$. Отметим, что последнее уравнение определяет, как и (9), частотную зависимость волновых векторов связанных акустоэлектромагнитных волн, которые могут быть разделены на волны электромагнитной ($\varkappa\sim k$) и акустической ($\varkappa\sim\omega\sqrt{\rho/C}$, где C — характерное значение компонент упругого тензора C_{ijkl}) ветвей. Интегральный поток энергии и ее плотность определяются при этом прежними выражениями (22) и (25), в которых надо вместо Y_{LM} и $\overset{*}{V}_L$, V_M писать $Y^e_{\beta\gamma}$ и $\overset{*}{V}_{3+\beta}=\dfrac{i}{\omega}\overset{*}{E}_\beta$, $V_{3+\gamma}=-\dfrac{i}{\omega}E_\gamma$.

При исследовании волн акустической ветви часто ограничиваются так называемым квазистатическим приближением (см., например, [6,7]), когда уравнения Максвелла (12), (13) заменяются уравнением электростатики $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$. Такое приближение основано на большой разности скоростей акустических и электромагнитных волн и соответствует пренебрежению вихревой частью электрического поля, что справедливо лишь в области волновых чисел $\varkappa\gg k$. При этом магнитное поле вообще не рассматривается, а в качестве электрических переменных выбираются нормальная к плоской поверхности компонента индукции D_n и электрический потенциал φ.

Опишем квазистатическое приближение с помощью матрицы обобщенного поверхностного импеданса. Введем новые переменные $T^q_4=m_\alpha T_{3+\alpha}$ и $V^q_4=m_\beta V_{3+\beta}$, которые в силу умноженного скалярно на $\boldsymbol{n}$ уравнения (12), равенства $E_\alpha=-i\varkappa m_\alpha\varphi$ и обозначений (1) связаны с $\dot{D}_n$ и φ соотношениями $T^q_4=-\dfrac{\omega}{4\pi\varkappa}D_n$ и $V^q_4=-\dfrac{\varkappa}{\omega}\varphi$. Введем также новые четырехмерные векторы $T^q_\Psi=(T_l,T^q_4)$ и $V^q_\Omega=(V_l,V^q_4)$, где индексы Ψ, $\Omega=1\div4$. Для таких переменных из равенства (4) легко получить на поверхности пьезоэлектрика связь

$$T^q_\Psi(\omega,\varkappa)=\zeta^q_{\Psi\Omega}(\omega,\varkappa)V^q_\Omega(\omega,\varkappa), \tag{27}$$

где матрица поверхностного импеданса в квазистатическом приближении имеет следующие компоненты:

$$\zeta^q_{lj}=\zeta_{lj},\quad \zeta^q_{l,4}=\zeta_{l,3+\beta}m_\beta,\quad \zeta^q_{4,j}=m_\alpha\zeta_{3+\alpha,j},\quad \zeta^q_{4,4}=m_\alpha\zeta_{3+\alpha,3+\beta}m_\beta. \tag{28}$$

С помощью системы (16), (17) можно получить матричное дифференциальное уравнение непосредственно для квазистатического импеданса $\hat{\zeta}^q$, которое будет иметь точно такой же вид, как и (18), с заменой матриц пятого порядка $\hat{S}$, $\hat{G}$ и $\hat{Q}$ на соответствующие матрицы четвертого порядка $\hat{S}_q$, $\hat{G}_q$ и $\hat{Q}_q$ по формулам, аналогичным (28). В получающихся таким образом матрицах четвертого порядка можно положить $k=0$, что соответствует точности квазистатического приближения. Выражения для интегральных потока и плотности энергии собственных мод в этом приближении выражаются формулами, аналогичными (22) и (25).

Если плоская граница пьезоэлектрика свободна от напряжений ($T_i=0$), то из равенства (27) нетрудно получить связь

$$T^q_4(\omega,\varkappa)=\zeta^q(\omega,\varkappa)V^q_4(\omega,\varkappa), \tag{29}$$

где скалярный квазистатический импеданс $\zeta^q = \zeta^q_{4,4} - \zeta^q_{4,j}\zeta^{-1}_{ji}\zeta^q_{i,4}$ совпадает с точностью до постоянного множителя с обратной величиной известного импеданса Ингебригтсена [6]. Сравнивая равенства (26) и (29), находим связь $\zeta^q = m_\alpha \zeta^e_{\alpha\beta} m_\beta$ между скалярным квазистатическим и электромагнитным импедансами Пусть $\zeta^{q(+)}$ и $\zeta^{q(-)}$ — импедансы двух полупространств, примыкающих друг к другу без акустического контакта. Тогда из условий непрерывности нормальных компонент индукции и потенциала на границе контакта и равенства (29) следует дисперсионное уравнение собственных волн $Y^q(\omega, \varkappa) = 0$, где $Y^q = \zeta^{q(+)} + \zeta^{q(-)}$. В этом случае выражения для интегральных потока и плотности энергии удобно записать через значение поверхностного потенциала φ. Для собственных волн эти выражения имеют вид

$$W_\alpha = -\frac{\varkappa^2}{4\omega}\frac{\partial Y^q}{\partial \varkappa_\alpha}|\varphi|^2, \qquad U = \frac{\varkappa^2}{4\omega}\frac{\partial Y^q}{\partial \omega}|\varphi|^2.$$

Отметим, что импеданс ζ^q удобно использовать для анализа взаимодействия поверхностных волн с электрическими граничными неоднородностями в виде тонких металлических электродов [13].

Рассмотрим теперь в качестве примера рассеяние собственных мод в пьезоэлектрике на неоднородностях, вид которых мы не будем конкретизировать, в предположении слабого рассеяния. Допустим, что среда в отсутствие неоднородностей представляет собой поперечно-однородную структуру с суммарным импедансом на плоскости $z=0$, равным $Y_{LM}(\omega, \boldsymbol{\varkappa})$. Пусть на область с неоднородностями падает какая-либо мода с полем в плоскости $z=0$:

$$V^0_L(\boldsymbol{x}) = V^0_L e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}, \tag{30}$$

где амплитудные множители V^0_L и двумерный волновой вектор $\boldsymbol{p}$ удовлетворяют уравнениям (7) и (9) (здесь и ниже множитель $e^{-i\omega t}$ и частоту ω в аргументах будем опускать). Представив полное поле, входящее в уравнение (10), в виде суммы падающего (30) и рассеянного полей, получим в первом порядке метода возмущений выражение для рассеянного поля (борновское приближение)

$$V_K^-(\boldsymbol{x}) = -V^0_M \int \frac{A_{LK}(\boldsymbol{\varkappa})}{\Delta(\boldsymbol{\varkappa})} Y^{\text{н}}_{LM}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{x}}\, d^2\boldsymbol{\varkappa}, \tag{31}$$

где A_{LK} — алгебраические дополнения элементов матрицы Y_{LK}, а матрица $Y^{\text{н}}_{LM}$ определяется параметрами неоднородностей, и ее вычисление в каждом конкретном случае представляет собой отдельную задачу. Отметим, что в частных случаях неоднородностей в виде выступов или канавок на плоской поверхности непьезоэлектрического твердого тела такие вычисления выполнены в работах [5, 14, 15].

Пусть неоднородности занимают конечную область $x = |\boldsymbol{x}| < \infty$ (трехмерная неоднородность). Найдем в дальней зоне амплитуду рассеянного поля в какой-либо моде с волновым вектором $\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{s}$ удовлетворяет уравнению (9), $s = |\boldsymbol{s}|$, $\boldsymbol{l}$ — двумерный единичный вектор в направлении рассеяния. Из выражения (31) нетрудно получить асимптотическую оценку (см., например, [15]) поля этой моды в дальней зоне $sx \gg 1$:

$$V_K(x\boldsymbol{l}) = (2\pi)^{3/2} e^{-i3\pi/4} \sqrt{\frac{s}{x}}\, \frac{A_{lK}(\boldsymbol{s})\, Y^{\text{н}}_{LM}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})}{\Delta'(s\boldsymbol{l})}\, e^{isx} V^0_M, \tag{32}$$

где $\Delta'(s\boldsymbol{l})$ означает производную $\Delta(\varkappa\boldsymbol{l})$ по $\varkappa$ при $\varkappa = s$.

Если структура неоднородностей зависит только от одной координаты x_1 (двумерная неоднородность), то асимптотическая оценка будет другой. В этом случае поправку к импедансу, учитывающую неоднородности, можно представить в виде $Y^{н}_{LM}(\varkappa, q) = \widetilde{Y}^{н}_{LM}(\varkappa, q)\,\delta(\varkappa_2 - q_2)$, что позволяет легко вычислить интеграл в (31) по $\varkappa_2$. Оставшийся интеграл легко оценивается в дальней зоне $|s_1 x_1| \gg 1$ с помощью теоремы о вычетах (см., например, [5]). При рассеянии в моду с волновым вектором $\boldsymbol{s}$ $(s_2 = p_2)$ получаем

$$V_K(\boldsymbol{x}) = -2\pi i \operatorname{sign} s_1 \frac{A_{LK}(\boldsymbol{s})}{\partial\Delta(\boldsymbol{s})/\partial s_1} Y^{н}_{LM}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}} V^0_M. \tag{33}$$

Вычислив потоки энергии (22) в падающей (30) и рассеянных (32) или (33) модах, можно определить и коэффициенты трансформации энергии падающей моды в энергию рассеянных мод.

Автор благодарен С. М. Рытову и В. Г. Полевому за полезные дискуссии и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Балакирев М К, Гилинский И А. Волны в пьезокристаллах. — Новосибирск Наука, 1982.
2 Гончаренко А М, Редько В П. Введение в интегральную оптику. — Минск· Наука и техника, 1975.
3 Ingebrigtsen К А, Tonning A. — Phys. Rev., 1969, **184**, № 3, p. 942
4. Lothe J, Barnett D M — J. Appl Phys, 1976, **47**, № 2, p. 428.
5. Бирюков С В — Акуст. журн, 1980, **26**, № 4, с. 494.
6 Ingebrigtsen К А — J Appl Phys, 1969, **40**, № 7, p. 2681.
7 Lothe J, Barnett D M — J Appl. Phys., 1976, **47**, № 5, p 1799.
8 Миллер М А., Таланов В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, **4**, № 5, с 795
9 Курушин Е Н, Нефедов Е И, Фиалковский А. Т. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах — М. Наука, 1975.
10 Мачевариани М. М, Тютекин В В., Шкварников А. П — Акуст. журн, 1971, **17**, № 1, с. 97.
11 Бирюков С В Материалы XII Всесоюзной конференции по акустоэлектронике и квантовой акустике — М ВИНИТИ, 1983, ч 1, с 151.
12 Полевой В Г — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 3, с. 373
13 Бирюков С. В, Горышник Л. Л — ЖТФ, 1980, **50**, № 8, с. 1647.
14. Бирюков С В — Письма в ЖТФ, 1983, **9**, № 4, с. 222
15 Бирюков С. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 3, с. 363.

Поступила в редакцию
2 июля 1984 г

GENERALIZED IMPEDANCE IN THE THEORY OF THE SURFACE WAVES IN PIEZOELECTRICS

S. V. Biryukov

The ordinary differential equation is derived for the surface impedance matrices of a layered piezoelectric half-space. The compact expressions for the power flux and density are found. Special cases are considered