ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 9 *РАДИОФИЗИКА* *1985*

УДК 538 56

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ВОЛНОВОДАХ С ВЫТЯНУТЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

А. Л. Вировлянский, А. И. Саичев, М. М. Славинский

Получены и проанализированы уравнения для моментных функций волн в волноводе с вытянутыми случайными неоднородностями среды. При исследовании учитывались дифракция волн и волноводное искривление лучей на трассах длиной порядка продольного радиуса корреляции неоднородностей

1. При изучении распространения электромагнитных волн в турбулентной атмосфере весьма эффективным оказался метод, основанный на выводе и анализе уравнений для моментных функций волн в марковском приближении (см., например, [1–3]). Однако марковское приближение несправедливо, если неоднородности среды сильно вытянуты вдоль направления распространения волны [4]. Подобная анизотропия случайных неоднородностей имеет место во многих физических ситуациях, например для случайных неоднородностей в ионосферных волноводных каналах [5], случайных внутренних волн и тонкой структуры подводных звуковых каналов [6, 7]. В этих случаях при выводе уравнений для моментных функций нeбходимо учитывать дифракцию и волноводное распространение волны на расстояниях порядка продольного масштаба корреляции неоднородностей среды $l_{\parallel}$. Отметим, что в [8–10] обсуждались пределы применимости уравнения для функции когерентности волны в статистически однородной случайно-неоднородной среде, найденные в приближении Бурре и учитывающие дифракцию на трассах длиной $l_{\parallel}$. В [11, 12] анализировалось уравнение переноса с учетом анизотропии случайных неоднородностей. Влияние вытянутости неоднородностей на среднее поле и частотную корреляцию волны изучалось в [13]. Расчету интенсивности волны в плоскослоистой среде с турбулентными флуктуациями показателя преломления посвящена работа [14]. В данной работе, на примере уравнения для среднего поля, проиллюстрирован вывод уравнений для моментных функций волн в волноводном канале с сильно вытянутыми случайными неоднородностями среды, учитывающий дифракцию и волноводный характер распространения волны на трассах длиной $l_{\parallel}$ и приводящий, в отличие от других методов, к чисто дифференциальным уравнениям по продольной координате. Обсуждены некоторые следствия уравнений для среднего поля и функции когерентности.

2. В малоугловом приближении распространение монохроматической волны описывается параболическим уравнением

$$u_x-(i/2k)\Delta u=ikn(\rho)\,u+ik\tilde{n}(x,\,\rho)\,u. \tag{1}$$

Здесь $u(x,\rho)$ — комплексная амплитуда волны, x — координата вдоль оси волноводного канала, Δ — лапласиан в поперечной плоскости $\rho=(y,z)$, $n(\rho)$ — часть показателя преломления, описывающая профиль волноводного канала, $\tilde{n}(x, \rho)$ — случайная составляющая показателя преломления ($\langle\tilde{n}\rangle=0$), k — волновое число на оси канала, где $n=0$. Будем считать известной функцию корреляции и спектральную плотность случайных неоднородностей:

$$B(\tau_\parallel, \tau_\perp; \rho) = \langle\tilde{n}(x, \rho)\,\tilde{n}(x+\tau_\parallel, \rho+\tau_\perp)\rangle,$$
$$\Phi(\varkappa_\parallel, \varkappa_\perp; \rho) = (1/2\pi)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau_\parallel, \tau_\perp; \rho) \exp[-i\varkappa_\parallel \tau_\parallel - (\varkappa_\perp \tau_\perp)]\, d\tau_\parallel\, d\tau_\perp. \qquad (2)$$

Введем еще длину корреляции $\tilde{n}$ вдоль оси x $l_\parallel$ и наименьшую длину корреляции в поперечной плоскости $l_\perp$. Зависимость корреляционной функции (2) от ρ учитывает обычно имеющую место в волноводных каналах статистическую неоднородность флуктуаций показателя преломления, плавную по сравнению с масштабом $l_\perp$.

Хотя это и не принципиально, при конкретных расчетах будем считать волновод плоскослоистым, так что $n(\rho)=n(z)$ зависит лишь от вертикальной координаты z, а случайные неоднородности блинообразными, обладающими по вертикали масштабом корреляции $l_\perp \ll l_\parallel$, а в горизонтальной плоскости (x, y) имеющими масштаб $l_\parallel$. Кроме того, при конкретных оценках будем пренебрегать обычно несущественной зависимостью функции корреляции от горизонтальной поперечной координаты и использовать двумерную гауссову аппроксимацию корреляционной функции

$$B_2(\tau_\parallel, \tau_\perp; z) = b(z) \exp(-\tau_\parallel^2/2l_\parallel^2 - \tau_\perp^2/2l_\perp^2). \qquad (3)$$

Соответствующая двумерная спектральная плотность равна

$$\Phi_2(\varkappa_\parallel, \varkappa_\perp; z) = (1/2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau_\parallel, \tau_\perp; z) \exp(-i\varkappa_\parallel \tau_\parallel - i\varkappa_\perp\tau_\perp)\, d\tau_\parallel\, d\tau_\perp = (l_\parallel l_\perp/2\pi) \exp[-\varkappa_\parallel^2 l_\parallel^2/2 - \varkappa_\perp^2 l_\perp^2/2].$$

3. Усредним уравнение (1) по ансамблю случайных неоднородностей:

$$\langle u\rangle_x - (i/2k)\Delta\langle u\rangle = ikn\langle u\rangle + ik\langle\tilde{n}u\rangle. \qquad (4)$$

Выразим последнее слагаемое в (4) через среднее поле, считая $\tilde{n}$ настолько малым, что влияние на волну случайных неоднородностей, заключенных в слое $(x-d, x)$, $d\sim l_\parallel$, хорошо описывается борновским приближением

$$u(x, \rho) = u_0(x, \rho) + u_1(x, \rho), \qquad (5)$$

где u_0 — комплексная амплитуда волны в случае, когда в слое $(x-d, x)$ $\tilde{n}=0$, а

$$u_1(x, \rho) = ik \int\limits_{x-d}^{x} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, \tilde{n}(x', \rho')\, u_0(x', \rho')\, G_0(x-x', \rho', \rho).$$

Здесь $G_0(x, q, \rho)$ — функция Грина волны в регулярном волноводном канале, удовлетворяющая уравнению

$$G_{0x} - (i/2k)\Delta G_0 = iknG_0, \quad G_0(0, q, \rho) = \delta(\rho - q). \qquad (6)$$

Пользуясь справедливым в рамках параболического уравнения равенством

$$u_0(x',\rho)=\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x,\rho')\, G_0^*(x-x',\rho,\rho')\,d\rho', \tag{7}$$

представим u_1 в виде

$$u_1(x,\rho)=ik\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x,\rho')\, m(x,\rho',\rho)\,d\rho', \tag{8}$$

где

$$m(x,\rho',\rho)=\int_0^d d\tau_\parallel \int_{-\infty}^{\infty} dq\,\tilde{n}(x-\tau_\parallel,q)\, G_0(\tau_\parallel,q,\rho)\, G_0^*(\tau_\parallel,q,\rho').$$

Подставив (8) в (5), а (5) — в последнее среднее уравнения (4) и учитывая некоррелированность u_0 с $\tilde{n}(x,\rho)$, получим замкнутое уравнение для среднего поля:

$$\langle u\rangle_x-(i/2k)\Delta\langle u\rangle=ikn\langle u\rangle-k^2\int_{-\infty}^{\infty}\langle u(x,\rho')\rangle\, a(\rho',\rho)\,d\rho', \tag{9}$$

где

$$a(\rho',\rho)=\langle\tilde{n}(x,\rho)\, m(x,\rho',\rho)\rangle= \tag{10}$$

$$=\int_0^d d\tau_\parallel\int_{-\infty}^{\infty} dq\, B(\tau_\parallel,\rho-q;\rho)\, G_0(\tau_\parallel,q,\rho)\, G_0^*(\tau_\parallel,q,\rho').$$

В последнем члене в (9) среднее $\langle u_0\rangle$ заменено на $\langle u\rangle$, что не ухудшает точности приближенного уравнения (9), справедливого, пока $|u_1|\ll|u|$.

Полезно сравнить уравнение (9) с другими известными уравнениями для среднего поля — уравнением, полученным в приближении Бурре или во втором марковском приближении (см., например, [2]):

$$\langle u\rangle_x-(i/2k)\Delta\langle u\rangle=ikn\langle u\rangle-k^2\int_0^{\infty} d\tau_\parallel\,\times \tag{11}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, B(\tau_\parallel,\rho-q;\rho)\, G_0(\tau_\parallel,q,\rho)\,\langle u(x-\tau_\parallel,q)\rangle,$$

а также с уравнением для среднего поля в марковском приближении:

$$\langle u\rangle_x-(i/2k)\Delta\langle u\rangle=ikn\langle u\rangle-k^2A(\rho)\langle u\rangle,\quad A(\rho)=\int_0^{\infty} B(\tau_\parallel,0;\rho)\,d\tau_\parallel, \tag{12}$$

которое для случая $n\sim z$ и статистически однородных флуктуаций показателя преломления среды приведено в работе [15].

Пока рассеяние волны на случайных неоднородностях среды в слое толщиной $\sim l_\parallel$ мало́, т. е. пока $|u_1|\ll|u|$, уравнения (9) и (11) практически эквивалентны. Действительно, пользуясь свойством обратимости волны, среднее $\langle u(x-\tau_\parallel,q)\rangle$ можно записать в виде, аналогичном (7):

$$\langle u(x-\tau_\parallel, q)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, \rho')\, G^*(x-\tau_\parallel, q, x, \rho')\rangle\, d\rho', \qquad (13)$$

где $G(x_0, \rho_0, x, \rho)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению (1) с граничным условием $G(x_0, \rho_0, x_0, \rho) = \delta(\rho - \rho_0)$. Если влияние случайных неоднородностей на трассе длиной $\tau_\parallel \leqslant l_\parallel$ мало́, то можно воспользоваться приближенным равенством

$$G(x-\tau_\parallel, q, x, \rho') = G_0(\tau_\parallel, q, \rho')$$

и переписать (13) в виде

$$\langle u(x-\tau_\parallel, q)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, \rho')\rangle\, G_0^*(\tau_\parallel, q, \rho')\, d\rho'.$$

Подставляя это равенство в последний член уравнения (11), придем к уравнению (9).

На наш взгляд, преимущество уравнения (9), по сравнению с (11), состоит в том, что уравнение (9) — дифференциальное по продольной координате. Это упрощает, например, численный расчет среднего поля и позволяет дать наглядную лучевую интерпретацию последнего слагаемого в (9). Ниже мы покажем это и заодно выясним, при выполнении каких условий (9) переходит в уравнение марковского приближения (12).

4. Оценим влияние вытянутости случайных неоднородностей среды и волноводного характера распространения волны на вид уравнения для среднего поля. При этом будем считать $n(\rho)$ достаточно плавным, так что при $x \leqslant l_\parallel$ уравнение (6) можно заменить более простым:

$$G_{0x} - (i/2k)\Delta G_0 = ikn(q)\, G_0 + ik(\rho - q\cdot\gamma(q))\, G_0, \quad \gamma(\rho) = \nabla n(\rho).$$

Из решения этого уравнения следует, что

$$G_0(x, q, \rho)\, G_0^*(x, q, \rho') =$$

$$= (k/2\pi x)^2 \exp\left[-\frac{ik}{2x}(\rho-\rho')^2 + \frac{ik}{2}x(\rho-\rho'\cdot\gamma(q)) + \frac{ik}{x}(\rho-\rho'\cdot\rho-q)\right].$$

Подставив это равенство в (10) и заменив, пользуясь плавностью $n(\rho)$, $\gamma(q)$, на $\gamma(\rho)$, получим

$$a(\rho', \rho) = (k/2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(0, \theta, \rho) \exp[ik(\theta\cdot\rho-\rho')]\, d\theta, \qquad (14)$$

где

$$A(s, \theta; \rho) = \int\limits_0^{\infty} d\tau_\parallel \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_\perp\, (k/2\pi i\tau_\parallel)\, B(\tau_\parallel, s + \tau_\perp + \theta\tau_\parallel + \gamma(\rho)\,\tau_\parallel^2/2; \rho) \exp(ik\tau_\perp^2/2\tau_\parallel). \qquad (15)$$

Подставив (14), (15) в (9), придем к уравнению для среднего поля в волноводе с плавно меняющимся профилем волноводного канала:

$$\langle u\rangle_x - (i/2k)\Delta\langle u\rangle = ikn\langle u\rangle - k^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(0, \theta, \rho)\, \langle\psi(x, \theta)\rangle \exp(ik(\theta\rho))\, d\theta. \qquad (16)$$

Здесь $\psi(x, \theta)$ — коэффициент разложения волны по плоским волнам:

$$u(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \theta) \exp(ik(\theta\rho))\, d\theta.$$

Заметим, что в случае $n \sim z$ уравнение (16) — точное следствие уравнения (9).

Последнее слагаемое в (16) имеет ясную физическую интерпретацию — различные плоские волны (лучи) затухают с разными коэффициентами экстинкции $k^2 A(0, \theta, \rho)$. При этом зависимость A от θ является следствием вытянутости случайных неоднородностей и может быть интерпретирована на лучевом языке следующим образом. Чем больше угол θ наклона луча к оси x, вдоль которой вытянуты случайные неоднородности среды, тем быстрее луч пронизывает отдельную неоднородность и тем меньше случайный набег фазы вдоль данного луча. Интеграл в (15) по $\tau_\perp$ учитывает влияние дифракции на случайный набег фазы и сглаживает зависимость A от θ. Если случайные неоднородности не очень вытянуты, так что выполнено условие слабой анизотропии

$$\theta_р \ll \theta_а, \tag{17}$$

где $\theta_р = 1/kl_\perp$ — угловая ширина индикатрисы рассеяния, а $\theta_а = l_\perp / l_\parallel$ — угол анизотропии, то выражение (15) переходит в

$$A(s, \theta; \rho) = \int_0^{\infty} B(\tau_\parallel, s + \theta\tau_\parallel + \gamma(\rho)\tau_\parallel^2/2; \rho)\, d\tau_\parallel. \tag{18}$$

Здесь слагаемое $\gamma\tau_\parallel^2/2$ в аргументе корреляционной функции описывает связанное с наличием волновода отклонение искривленного луча от прямолинейного Подобное искривление лучей может ослабить темп затухания среднего поля. Действительно, если $\theta_в > \theta_а$, где $\theta_в = \gamma l_\parallel$ — изменение угла наклона луча к оси x в волноводе на трассе длиной $l_\parallel$, то уже при $\theta = 0$ лучи покидают отдельную неоднородность на трассе длиной $l \sim l_\parallel \sqrt{\theta_а/\theta_в} < l_\parallel$.

Если искривление луча на трассе длиной $l_\parallel$ мало, т. е. если

$$\theta_в \ll \theta_а, \tag{19}$$

то выражение (18) переходит в

$$A(s, \theta; \rho) = \int_0^{\infty} B(\tau_\parallel, s + \theta\tau_\parallel; \rho)\, d\tau_\parallel \tag{20}$$

и, в частности, в случае двумерной гауссовой функции корреляции (3) и $s = 0$ равно

$$A(0, \theta; \rho) = A(\theta_z; z) = \sqrt{\pi/2}\, l_\parallel\, b(z)/\sqrt{1 + (\theta_z/\theta_а)^2}, \tag{21}$$

где угол θ_z — z-компонента вектора $\theta = (\theta_y, \theta_z)$. Аналогично, в случае блинообразных случайных неоднородностей среды $A(0, \theta; \rho)$ (20) имеет ширину порядка $\theta_а$ по θ_z и ширину порядка единицы по θ_y.

Пусть угловой спектр среднего поля $\langle\psi(x, \theta)\rangle$ сосредоточен в окрестности $\theta = 0$ и имеет по θ_z ширину $\theta_и \sim 1/kl_и$, где $l_и$ — характерный масштаб изменения среднего поля по вертикали. Если угловой спектр среднего поля достаточно узок, так что выполняется неравенство

$$\theta_и \ll \theta_а, \tag{22}$$

то в (20) можно пренебречь зависимостью A от θ, а уравнение (16) переходит в уравнение марковского приближения (12), в котором

$$A(\rho) = A(0, 0; \rho) = \int\limits_0^\infty B(\tau_\parallel, 0; \rho)\, d\tau_\parallel.$$

Таким образом, уравнение марковского приближения (12) в волноводном канале с вытянутыми случайными неоднородностями среды справедливо, лишь если выполнены условия слабой анизотропии (17), малости волноводного искривления луча на трассе длиной $l_\parallel$ (19) и узости углового спектра среднего поля (22).

Эти условия могут нарушаться, например, для гидроакустической волны в подводном звуковом канале. Действительно, если $\theta_и \sim 10^{-1}$, $l_\parallel \sim 10^3$ *м*, $l_\perp \sim 10$ *м*, $k \sim 1$ *м*$^{-1}$, характерный радиус кривизны лучей $1/\gamma \sim 10^4$ *м* [6], то $\theta_а \sim 10^{-2}$, $\theta_р \sim 10^{-1}$, $\theta_в \sim 10^{-1}$ и ни одно из условий марковского приближения не выполняется.

5. Аналогично выводятся дифференциальные по x уравнения и для высших моментов волны. Приведем для примера уравнение для функции когерентности $\Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{s}) = \langle u(x, \boldsymbol{R} + \boldsymbol{s}/2)\, u^*(x, \boldsymbol{R} - \boldsymbol{s}/2)\rangle$:

$$\Gamma_x - (i/k)(\nabla_R \nabla_s)\,\Gamma = ik\,[n(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{s}/2) - n(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{s}/2)]\,\Gamma - k^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \times$$
$$\times \exp\,[ik(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{s}) + ik(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R})]\,[D(-\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}/2; \boldsymbol{R}) + \tag{23}$$
$$+ D^*(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}/2; \boldsymbol{R})]\, d\boldsymbol{\alpha}\, d\boldsymbol{\beta}.$$

Здесь

$$D(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\rho}) = A(0, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\rho}) - A(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\rho}),$$

$$F(x, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (k/2\pi)^4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{s}) \exp\,[-ik(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{s}) - ik(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R})]\, d\boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{s}.$$

При анализе энергетических и когерентных свойств волн часто пользуются уравнением переноса для лучевой интенсивности

$$J(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\theta}) = (k/2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{s}) \exp\,[-ik(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{s})]\, d\boldsymbol{s}.$$

В отсутствие поглощения и в малоугловом приближении уравнение переноса имеет вид (см., например, [11, 12])

$$J_x + (\boldsymbol{\theta}\nabla_R)\,J + (\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{R})\,\nabla_\theta)\,J = \tag{24}$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [J(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\theta}') - J(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\theta})]\, f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'; \boldsymbol{R})\, d\boldsymbol{\theta}'.$$

Выясним, при выполнении каких условий из уравнения (23) следует уравнение переноса (24). Для этого введем характерные масштабы изменения функции когерентности по $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{s}$: $R(x)$ и $s(x)$. Пусть l_n — характерный масштаб изменения $n(\boldsymbol{\rho})$. Если $s(x) \ll l_n$, то в (23) можно разложить $n(\boldsymbol{R} \pm \boldsymbol{s}/2)$ в ряд Тейлора по $\boldsymbol{s}$ и ограничиться слагаемыми первой степени по $\boldsymbol{s}$. Если к тому же ширина $F(x, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ по $\beta \sim 1/kR(x)$ много меньше характерного масштаба $A(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\rho})$ по $\boldsymbol{\theta}$, то в последнем слагаемом уравнения (23) можно пренебречь зависимостью D от $\boldsymbol{\beta}$. Поскольку наименьший масштаб A по $\boldsymbol{\theta}$ порядка $\theta_а$, то последнее условие заведомо выполнится, если $R(x) \gg 1/k\theta_a$. При выполнснии указанных двух условий уравнение (23) принимает вид

$$\Gamma_x - (i/k)(\nabla_R \nabla_s)\,\Gamma = ik\,(s\gamma(\boldsymbol{R}))\,\Gamma - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} J(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\alpha}) \exp[ik(\boldsymbol{\alpha} s)] \times$$

$$\times [D(-s, \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{R}) + D^*(s, \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{R})]\, d\boldsymbol{\alpha}.$$

Переходя от него к уравнению для J, получим уравнение переноса (24). Если к тому же выполнено условие (19), так что волноводное искривление лучей на трассе длиной $l_{\parallel}$ мало, то выражение для сечения рассеяния совпадает с приведенными в работах [11, 12]:

$$f(\theta, \theta'; \boldsymbol{R}) = 2\pi k^4\, \Phi\,(k\theta'^2/2 - k\theta^2/2,\, k\theta - k\theta';\, \boldsymbol{R}).$$

Таким образом, условия применимости уравнения переноса в волноводном канале с вытянутыми случайными неоднородностями среды имеют вид

$$s(x) \ll l_n, \quad R(x) \gg 1/k\theta_a, \quad \theta_в \ll \theta_a.$$

6. Вычислим среднее поле, приближенно решая уравнение (9). Пренебрегая зависимостью случайных неоднородностей среды и среднего поля от y, перейдем от (9) к более простому уравнению

$$\langle u\rangle_x - (i/2k)\langle u\rangle_{zz} = ikn(z)\langle u\rangle - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, z')\rangle\, a\,(z', z)\, dz'. \qquad (25)$$

Будем считать также выполненным условие слабой анизотропии (17). Тогда

$$a(z', z) = (k/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} A(\theta, z) \exp[ik\,\theta(z - z')]\, d\theta,$$

$$A(\theta, z) = \int_0^{\infty} B_2(\tau_{\parallel}, \theta\tau_{\parallel} + \gamma(z)\,\tau_{\parallel}^2/2; z)\, d\tau_{\parallel}.$$

Представим среднее поле в виде

$$\langle u(x, z)\rangle = c(x, z) \exp[ik\,\varphi(x, z)], \qquad (26)$$

где c — амплитуда, а φ — эйконал среднего поля. Подставив (26) в (25), будем иметь

$$c_x + ik\,\varphi_x - (i/2k)\,c_{zz} + c\,\varphi_{zz}/2 + \varphi_z c_z + (ik/2)(\varphi_z)^2 =$$
$$= ikn(z) - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} a(z', z)\, c(x, z') \exp[ik(\varphi(x, z') - \varphi(x, z))]\, dz'. \qquad (27)$$

Полагая, что c и φ плавно меняются по z в сравнении с масштабом спадания a по $(z - z') \sim 1/k\theta_a$, и заменив в (27) $c(x, z')$ на $c(x, z)$, а $\varphi(x, z')$ — на $\varphi(x, z) - \theta(x, z)(z - z')$, где $\theta(x, z) = \varphi_z(x, z)$, перейдем от (27) к уравнениям геометрического приближения для c^2 и θ:

$$c_x^2 + (\theta c^2)_z + k^2 c^2 A[\theta(x, z), z] = 0,$$
$$\theta_x + \theta\theta_z = \gamma(z). \qquad (28)$$

Из (26), (28) следует, что среднее поле представимо в виде

$$\langle u(x,z)\rangle = \sum_{j=1}^{M} u_j(x,z)\exp[-S_j^2(x,z)/2], \tag{29}$$

где u_j — комплексная амплитуда волны, попадающей в точку (x, z) вдоль j-го луча в отсутствие случайных неоднородностей, M — число лучей, попадающих в регулярном волноводе в точку наблюдения (x, z),

$$S_j^2 = 2k^2 \int_0^x A[\theta_j(x'),\ z_j(x')]\,dx' =$$
$$= k^2 \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau_\parallel, z_j(x'+\tau_\parallel) - z_j(x');\ z_j(x'))\,d\tau_\parallel \tag{30}$$

— дисперсия случайного набега фазы вдоль j-го луча. В (30) $z_j(x)$ и $\theta_j(x)$ — соответственно вертикальная координата и угол наклона к оси x j-го луча. В (30) использовалось также приближенное равенство

$$z_j(x) + \theta_j(x)\tau + \gamma(z_j(x))\tau^2/2 = z_j(x+\tau).$$

Заметим, что решение для среднего поля (29), (30) было получено ранее методом интегрирования по траекториям (см., например, [6]).

7. Уравнение для функции когерентности (23) и уравнение переноса (24) в общем случае аналитически решить не удается. Однако в разных предельных случаях от них можно перейти к более простым уравнениям, аналитический и численный анализ которых существенно проще. Для определенности рассмотрим характерный, например, для подводных звуковых каналов, случай, когда лучевая интенсивность зависит только от одной поперечной координаты z и угла $\theta_z = \theta - J(x, z, \theta)$, а уравнение для J принимает вид

$$J_x + \theta J_z + \gamma(z) J_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} [J(x,z,\theta') - J(x,z,\theta)]\, f(\theta,\theta',z)\,d\theta', \tag{31}$$

где

$$f(\theta,\theta',z) = 2\pi k^3 \Phi_2(k\theta'^2/2 - k\theta^2/2,\ k\theta - k\theta';\ z).$$

Отметим, во-первых, что если выполнено условие слабой анизотропии (17), а угловая ширина лучевой интенсивности $\theta(x) \sim 1/ks(x) \gg \gg \theta_p$, то от (31) можно перейти к чисто дифференциальному уравнению диффузии [11]

$$J_x + \theta J_z + \gamma(z) J_\theta = (D(\theta,z) J_\theta)_\theta,$$

коэффициент диффузии которого задается выражением

$$D(\theta, z) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial\tau_\perp^2} B_2(\tau_\parallel, \tau_\perp; z)\Big|_{\tau_\perp = \theta\tau_\parallel} d\tau_\parallel$$

и для гауссовой модели корреляционной функции (3) равен

$$D(\theta, z) = D(z)/[1 + (\theta/\theta_a)^2]^{3/2}, \quad D(z) = \sqrt{\pi/2}\, b(z)\, l_\parallel / l_\perp. \tag{32}$$

Другое упрощение уравнения (31) возможно, если случайные неоднородности так малы, что рассеяние волны на длине одного цикла луча достаточно слабое. При этом от (31) можно перейти к более простому уравнению, усреднив (31) по x на интервале Λ, большем длины одного цикла луча, но меньшем характерного масштаба рассеяния волны на случайных неоднородностях. Аналогичное усредненное уравнение, применительно к ионосфере, рассмотрено в [5]. Введем новую функцию

$$g(x, \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J(x, z, \theta)\, \delta\left(\alpha - \sqrt{\theta^2 - 2n(z)}\right) d\theta dz$$

— угловой спектр волны на оси волновода. Уравнение для g, следующее из (31), имеет вид

$$g_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta d\theta' dz f(\theta, \theta', z) [J(x, z, \theta') - \\ - J(x, z, \theta)] \delta\left(\alpha - \sqrt{\theta^2 - 2n(z)}\right). \tag{33}$$

Усреднив его вдоль x на длине Λ, учтя, что в случае слабых случайных неоднородностей справедливо асимптотическое равенство

$$\bar{J} = \frac{1}{\Lambda} \int\limits_{x-\Lambda}^{x} J(x, z, \theta) dx = \bar{J}\left(x, \sqrt{\theta^2 - 2n(z)}\right)$$

и, соответственно,

$$\bar{g}(x, \alpha) = \alpha L(\alpha) \bar{J}(x, \alpha),$$

где $L(\alpha)$ — длина цикла луча, пересекающего ось волновода под углом α, перейдем от (33) к уравнению для усредненной функции $\bar{g}(x, \alpha)$:

$$g_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta d\theta' dz d\alpha' f(\theta, \theta', z) \delta\left(\alpha - \sqrt{\theta^2 - 2n(z)}\right) \times \\ \times \delta\left(\alpha' - \sqrt{\theta'^2 - 2n(z)}\right) [\bar{g}(x, \alpha')/\alpha' L(\alpha') - \bar{g}(x, \alpha)/\alpha L(\alpha)].$$

Если к тому же выполнены условия (17) и $\theta(x) \gg \theta_p$, то последнее уравнение переходит в чисто дифференциальное

$$\bar{g}_x = [d(\alpha)\, (\bar{g}/\alpha L)_\alpha]_\alpha, \tag{34}$$

где

$$d(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D(\theta; z) \theta^2 \delta\left(\alpha - \sqrt{\theta^2 - 2n(z)}\right) d\theta dz/\alpha^2 = \\ = \int\limits_{z_1}^{z_2} \sqrt{\alpha^2 + 2n(z)}\, D\left(\sqrt{\alpha^2 + 2n(z)}, z\right) dz. \tag{35}$$

Здесь z_1 и z_2 — координаты нижней и верхней точек заворота луча.

Отметим следующий из (35) интересный факт: наименьший вклад в коэффициент диффузии $d(\alpha)$ дают окрестности точек заворота лучей, где $\theta = 0$ и $D(\theta; z)$ максимален по θ. Это связано с тем, что малое изменение угла распространения луча в точке заворота меньше меняет угол выхода луча с оси канала, чем то же изменение угла в любой другой точке траектории луча.

8. Обсудим поведение коэффициента диффузии $d(\alpha)$ для параболического волноводного канала $n(z) = -\varkappa^2 z^2/2$, который служит хорошим приближением в случае, когда волна распространяется вблизи оси волноводного канала. Заметим, что качественное отличие параболического канала от всех других, состоящее в том, что $L(\alpha) = 2\pi/\varkappa$ для всех лучей одинакова, при анализе усредненного по x углового спектра $\bar{g}(x, \alpha)$ непринципиально. Ограничимся случаем статистически однородных случайных неоднородностей, когда в (32) $D(z) = D$ не зависит от z. Подставив (32) в (35), получим

$$d(\alpha) = 4D\alpha[K(\mu/\sqrt{1+\mu^2}) - E(\mu/\sqrt{1+\mu^2})]/\varkappa\mu^2\sqrt{1+\mu^2}, \qquad (36)$$

где $\mu = \alpha/\theta_a$, K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Из (36) видно, что при $\alpha < \theta_a$ ($\mu < 1$) волна не «чувствует» анизотропии среды, $d(\alpha) = \pi D\alpha/\varkappa$, а уравнение (34) переходит в

$$\bar{g}_x = (D/2)[\alpha(\bar{g}/\alpha)_\alpha]_\alpha.$$

Отсюда следует, например, что средний квадрат углов выхода лучей с оси волноводного канала растет по известному линейному закону

$$\langle \alpha^2(x) \rangle = \int_0^\infty \alpha^2 \bar{g}(x, \alpha)\, d\alpha = \langle \alpha^2(0) \rangle + 2Dx.$$

В другом предельном случае $\alpha \gg \theta_a$ ($\mu \gg 1$) коэффициент диффузии волны из-за ослабления рассеяния на анизотропных случайных неоднородностях стремится к нулю по закону $d \sim \ln \alpha/\alpha_2$.

Обсудим еще поведение $d(\alpha)$ в каноническом подводном звуковом канале, где [6]

$$n(z) = \varepsilon(1 + \eta - e^\eta), \quad \eta = z/r.$$

Здесь r — полуширина канала, а высота отсчитывается от его оси. Зададим еще закон убывания дисперсии случайных неоднородностей с глубиной $b(z) = b_0 \exp(z/p)$ — характерный для внутренних волн [6]. Вычислим $d(\alpha)$ для крутых лучей, у которых $z_2 \gg r, p$. Обратный предельный случай $z_2 \ll r, p$ соответствует рассмотренному выше параболическому каналу.

При $z_2 \gg r, p$ наибольший вклад в $d(\alpha)$ вносят окрестности верхних точек заворота лучей, где дисперсия случайных неоднородностей максимальна, и (35) с учетом (32) приближенно представимо в виде

$$d(\alpha) = 2D(z_2) r \int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{1 - e^y}}{[1 + \mu^2(1 - e^y)]^{3/2}} e^{ry/p}\, dy.$$

Здесь $z_2 = r \ln(\alpha^2/2\varepsilon)$. Если ширина канала совпадает с характерным масштабом спадания дисперсии случайных неоднородностей, т. е. если $r = p/2$, то последнее выражение переходит в

$$d(\alpha) = (4D(0)\alpha r/\sqrt{2\varepsilon})\,[K(\mu/\sqrt{1+\mu^2}) - E(\mu/\sqrt{1+\mu^2})]/\mu^2\sqrt{1+\mu^2} \qquad (37)$$

и с точностью до замены $D(0)$ на D, r на $\sqrt{2\varepsilon}/\varkappa$ совпадает с выражением (36) для коэффициента диффузии в параболическом волноводном канале. Поскольку при $z_2 \ll r$ показатель преломления канонического подводного звукового канала переходит в показатель преломления параболического волновода с $\varkappa = r/\sqrt{\varepsilon}$, то выражения (36) и (37) отличаются лишь множителем $\sqrt{2}$. Из этого можно сделать вывод, что в случае $r=p/2$, при количественном расчете углового спектра волны $g(x, \alpha)$ в каноническом подводном звуковом канале, при произвольных α и z_2, можно с достаточной степенью точности пользоваться выражениями для коэффициента диффузии (36) или (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями — М.: Наука, 1975
2. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В. И Введение в статистическую радиофизику. Ч 2, Случайные поля — М: Наука, 1978.
3. Кляцкин В. И Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М: Наука, 1980
4 Кляцкин В И, Татарский В И — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 12, с 1400
5. Гуревич А. В, Цедилина Е Е Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М: Наука, 1979
6 Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред С Флатте. — М Мир, 1982.
7. Артельный В. В., Раевский М. А — Труды Х Всесоюзной акустической конференции — М, 1983
8 Барабаненков Ю Н. — Изв вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 7, с. 1071.
9. Барабаненков Ю Н. — Изв вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 2, с 253
10 Барабаненков Ю Н. — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 6, с. 868
11 Besieris I M, Tappert F. D. — J. Math. Phys, 1973, **14**, № 12, p. 1829
12. Wilson H. L., Tappert F. D. — J. Acoust. Soc. Am, 1979, **66**, № 1, p. 256.
13 Ерухимов Л М, Шпиро П И — Изв вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 4, с 443.
14 Кукушкин А. В, Фрейлихер В. Д, Фукс И. М. — Труды VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, 1981, **2**, с 133
15 Иванов В. В, Кинбер Б. Е, Корженевич И М, Степанов Б М — Радиотехника и электроника, 1980, **25**, № 10, с 2033.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 14 мая 1984 г.

MOMENTUM FUNCTIONS OF WAVES PROPAGATING IN WAVEGUIDE CHANNELS WITH EXTENDED CHAOTIC IRREGULARITIES OF REFRACTIVE INDEX

A. L. Virovlyanskij, A I. Saichev, M. M. Slavinskij

Equations for the momenta of random waves in waveguide channels with extended chaotic irregularities of medium are derived and analysed. Influence of the diffraction and distortion of rays on the equations obtained is discussed.