

УДК 621.375.826

## КОРРЕЛЯЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТСЧЕТОВ ГАУССОВА ПОЛЯ ПРИ ДВУХДЕТЕКТОРНОЙ РЕГИСТРАЦИИ

*A. C. Мазманишвили*

Рассмотрен процесс двухдетекторной регистрации гауссова поля излучения с лоренцевским спектральным контуром линии С помощью континуального интегрирования по броуновской мере получены количественные характеристики производящей функции фотоотсчетов при двухдетекторной регистрации для произвольного соотношения между шириной линии излучения, длительностью регистрации и временем задержки между моментами включения детекторов

1. Эксперименты по многократному совпадению фотоотсчетов были предложены и выполнены Хэнбери Брауном и Твиссом [1]. Использование совместных функций распределения фотоотсчетов дает возможность проследить за временным поведением корреляционных функций поля излучения. Высокое разрешение в технике фотоотсчетов обусловили распространность применения интерферометрии интенсивностей [2, 3]. Вместе с тем, теоретическое рассмотрение статистической структуры фотоотсчетов ограничено изучением их корреляционной функции. В [2] описана экспериментальная установка и приведены результаты измерения совместной функции распределения фотоотсчетов при регистрации стационарного гауссова поля излучения. Приведенные же в [2] (с. 41) аналитические выражения для производящей функции совместного распределения фотоотсчетов фактически являются асимптотическими и относятся к случаю, когда  $vT \ll 1$ , где  $v$  — ширина лоренцевской линии излучения, а  $T$  — временная длительность регистрации. В настоящей работе получены количественные характеристики производящей функции фотоотсчетов при двухдетекторной регистрации для произвольного соотношения между  $v$  и  $T$ .

2. Вероятность  $P(m, n)$  зарегистрировать первым детектором  $m$  отсчетов, а вторым —  $n$  отсчетов можно выразить через производящую функцию ( $\Pi\Phi$ )  $Q(\lambda_1, \lambda_2)$  [2]:

$$P(m, n) = \frac{(-1)^{m+n}}{m! n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \lambda_1^m \partial \lambda_2^n} Q(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}, \quad (1)$$

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ - \lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{\tau}^{T_1 + T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — временная длительность регистрации каждого из детекторов соответственно,  $\tau$  — длительность задержки второго детектора относительно первого. Угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  в (1) означают усреднение по всем возможным реализациям поля излучения  $\alpha(t)$ , статистическую структуру которого для случая стационарного гауссова поля с марковским свойством можно описать, задав совместную функцию

распределения комплексной амплитуды поля  $\alpha$  в  $P$ -представлении Глаубера [4] посредством формулы

$$w(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle (1 - |g|^2)} \exp \left[ - \frac{|\alpha_1 - g\alpha_2|^2}{\langle n \rangle (1 - |g|^2)} \right], \quad (2)$$

где  $\langle n \rangle$  — среднее число фотоотсчетов в единицу времени и  $g = \exp(-(v-i\omega_\alpha)|t_2-t_1|)$ ,  $\omega_\alpha$  — центральная частота лоренцевского спектрального контура излучения.

Как будет видно ниже, конкретное значение ПФ существенно зависит от того, перекрываются в (1) временные интервалы  $(0, T_1)$  и  $(\tau, \tau + T_2)$  или нет. При рассмотрении этих возможных случаев в совокупности удобно ввести вспомогательную ПФ  $F$ :

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) = \left\langle \exp \left\{ - \Lambda_1 \int_0^{\tau_1} dt |\alpha(t)|^2 - \Lambda \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau} dt |\alpha(t)|^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \Lambda_2 \int_{\tau_1+\tau}^{\tau_1+\tau+\tau_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle, \quad (3)$$

в которой временные интервалы  $\tau_1$ ,  $\tau$  и  $\tau_2$  расположены последовательно в порядке возрастания текущего времени; при этом искомая ПФ  $\Psi$  вполне может быть выражена в терминах ПФ  $F$  путем соответствующего подбора производящих параметров  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda$  и  $\Lambda_2$ .

Усреднение в выражении (3) удобно провести в два этапа, сначала по всем реализациям случайного процесса  $\alpha(t)$  внутри каждого из интервалов временного интегрирования в (3), а затем по реализациям  $\alpha(t)$ , отвечающим моментам времени  $0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_1+\tau$  и  $\tau_1+\tau+\tau_2$ . Пусть  $\Psi(\lambda; \alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2)$  — математическое ожидание следующего вида:

$$\Psi(\lambda; \alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) = \left\langle \exp \left\{ - \lambda \int_{t_1}^{t_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle_{\text{НК}}, \quad (4)$$

причем индекс НК означает, что значения случайного процесса  $\alpha(t)$  при  $t=t_1$  и  $t=t_2$  фиксированы. Тогда выражение (3) можно представить в виде

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) = \int d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int d^2\alpha_1 \Psi(\Lambda_1; \alpha_0, 0; \alpha_1, \tau_1) \times \\ \times \int d^2\alpha \Psi(\Lambda; \alpha_1, \tau_1; \alpha, \tau_1+\tau) \int d^2\alpha_2 \Psi(\Lambda_2; \alpha, \tau_1+\tau; \alpha_2, \tau_1+\tau+\tau_2), \quad (5)$$

где  $w(\alpha_0)$  — плотность распределения начального состояния при  $t=0$ , получаемая из (2) предельным переходом  $|t_2-t_1| \rightarrow \infty$ . Выражение (5) отражает марковское свойство процесса  $\alpha(t)$ , а величину  $\Psi$  можно интерпретировать как вероятность перехода. Известно, что для вероятности  $\Psi$  можно составить параболическое дифференциальное уравнение, конкретный вид которого можно установить, пользуясь методикой, изложенной в [5],

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\lambda; \alpha, t; \alpha_0, t_0) = v \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) \Psi + 2\langle n \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \Psi - \lambda |\alpha|^2 \Psi \quad (6)$$

с начальным условием  $\Psi(\lambda; \alpha, t_0; \alpha_0, t_0) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$ . Решение уравнения (6) может быть получено тем же методом, что и известный спо-

соб нахождения волновой функции бессpinовой частицы в параболическом потенциале [6], а именно:

$$\Psi(\lambda; \alpha, t; \alpha_0, t_0) = \frac{\rho q}{\pi \langle n \rangle (1 - q^2)} \exp \left\{ -\frac{v - \rho}{2 \langle n \rangle} (|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) + \right. \\ \left. + (v + \rho) (t - t_0) - \frac{\rho}{\langle n \rangle} \frac{|\alpha - q\alpha_0|^2}{1 - q^2} \right\}, \quad (7)$$

где  $\rho = \sqrt{v^2 + 2\lambda v \langle n \rangle}$  и  $q = \exp(-\rho(t - t_0))$ .

Из (7) видно, что условное математическое ожидание, каковым является амплитуда  $\Psi$ , зависит лишь от временной протяженности интервала  $(t, t_0)$ , которому она отвечает, и значений случайного процесса  $\alpha$  на его концах. Если подставить выражение (7) в (5), то после взятия четырехкратного интеграла получим для ПФ  $F$  следующий результат:

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) = \\ = [16 v r \rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \exp(v\tau_1 + v\tau + v\tau_2)] \times \\ \times [(1 + p^2) r (\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1 - p^2) (\rho_1 \rho_2 A_1 A_2 + r^2 B_1 B_2)]^{-1}, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\rho_1 = \sqrt{v^2 + 2\Lambda_1 v \langle n \rangle}, \quad \rho_2 = \sqrt{v^2 + 2\Lambda_2 v \langle n \rangle}, \quad r = \sqrt{v^2 + 2\Delta v \langle n \rangle}, \\ p_1 = \exp(-\rho_1 \tau_1), \quad p_2 = \exp(-\rho_2 \tau_2), \quad p = \exp(-r \tau), \quad (8a) \\ A_1 = (v + \rho_1) + (v - \rho_1) p_1^2, \quad A_2 = (v + \rho_2) + (v - \rho_2) p_2^2, \\ B_1 = (v + \rho_1) + (\rho_1 - v) p_1^2, \quad B_2 = (v + \rho_2) + (\rho_2 - v) p_2^2.$$

3. Выражение (8) описывает статистическую структуру фотоотсчетов трех детекторов, включенных последовательно во времени на интервалы длительностью  $\tau_1$ ,  $\tau$  и  $\tau_2$  соответственно. При помощи (8) можно рассмотреть различные варианты, отвечающие взаимному расположению во времени при двухдетекторной регистрации. При этом, разумеется, для обоих детекторов справедливо

$$-\left. \frac{\partial F}{\partial \Lambda_1} \right|_{\Lambda_1 = \Lambda = \Lambda_2 = 0} = \langle n \rangle T_1, \quad -\left. \frac{\partial F}{\partial \Lambda_2} \right|_{\Lambda_1 = \Lambda = \Lambda_2 = 0} = \langle n \rangle T_2. \quad (9)$$

За. Последовательное во времени детектирование. Второй детектор включается в момент выключения первого. В этом случае

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1}^{T_1 + T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1; 0, 0; \lambda_2, T_2) = \frac{8 v \rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \exp(vT_1 + vT_2)}{\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1}. \quad (10)$$

Из (10) легко получить известный результат [5] для ПФ фотоотсчетов одного детектора, регистрирующего в течение интервала  $T$ , если положить  $T_1 + T_2 = T$  и  $\lambda_2 = \lambda_1$ ,

$$\left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1 + T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \frac{4 v \rho_1 \exp(vT_1 + vT_2)}{(\rho_1 + v)^2 p_1^{-2} - (\rho_1 - v)^2 p_1^2}. \quad (11)$$

Корреляция  $K_{12}(0)$  между отсчетами детекторов равна

$$K_{12}(0) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \\ = (\langle n \rangle^2 / 4v^2) (1 - \exp(-2vT_1)) (1 - \exp(-2vT_2)). \quad (12)$$

3б. Смещение «назад» во времени детектирование. Второй детектор включается через интервал длительностью  $\tau$  после выключения первого детектора. Тогда

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1+\tau}^{T_1+\tau+T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1; 0, \tau; \lambda_2, T_2) = [16 v^2 \rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \exp(vT_1 + vT_2)] \times \\ \times [(1+p^2) v (\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1-p^2) (\rho_1 \rho_2 A_1 A_2 + v^2 B_1 B_2)]^{-1}. \quad (13)$$

Из (13), в частности, следует, что корреляция между отсчетами детекторов уменьшается с ростом  $\tau$ :

$$K_{12}(\tau) = \frac{\langle n \rangle^2}{4v^2} e^{-2v\tau} (1 - \exp(-2vT_1)) (1 - \exp(-2vT_2)). \quad (14)$$

Если  $\tau \rightarrow \infty$ , то  $p \rightarrow 0$  и ПФ (13) факторизуется на парциальные ПФ, отвечающие каждому из детекторов:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{4 v \rho_1 p_1 \exp(vT_1)}{\rho_1 A_1 + v B_1} \frac{4 v \rho_2 p_2 \exp(vT_2)}{\rho_2 A_2 + v B_2}. \quad (15)$$

3в. Смещение «вперед» во времени детектирование. Второй детектор включается через временной интервал  $T_1 - \tau$  после включения первого детектора ( $T_1 \geq \tau$ ). Тогда

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1-\tau}^{T_1-\tau+T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1 - \tau; \lambda_1 + \lambda_2, \tau; \lambda_2, T_2 - \tau), \quad (16)$$

а явное выражение описывается формулами (8) и (8а) при  $\tau_1 = T_1 - \tau$ ,  $\tau_2 = T_2 - \tau$  и  $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Если оба детектора одновременно включены за одинаковый интервал  $T$ , т. е.  $T_1 = T_2 = T$  и  $\tau = T$ , то из (16) следует выражение (11). Корреляция между отсчетами

$$K_{12}(\tau) = (\langle n \rangle^2 / 4v^2) \{ 4v\tau + \exp(-2v\tau) - \\ - \exp[-2v(T_1 - \tau)] - \exp[-2v(T_2 - \tau)] + \\ + \exp[-2v(T_1 + T_2 - \tau)] \} \quad (17)$$

содержит линейное по  $\tau$  слагаемое, а при  $\tau = 0$  выражение (17) переходит в (12).

4. Сравнение выражений (10), (13), (16) приводит к выводу, что производящая функция фотоотсчетов двух детекторов различна по форме, смотря по тому, как соотносятся временные интервалы регистрации: следуют один за другим или разнесены. Соответственно будут разными и вероятности  $P(m, n)$  отсчетов и отвечающие им моменты

различных порядков. (Явные выражения для вероятности  $\bar{P}(m, n)$  следуют из конкретных производящих функций согласно (1).)

Для случая, когда  $\nu T_1 \ll 1$  и  $\nu T_2 \ll 1$  в результате разложения величин, входящих в (8а), получим

$$F(\Lambda_1, T_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, T_2) \simeq [1 + (\Lambda_1 T_1 + \Lambda_2 T_2) \langle n \rangle - \\ - \Lambda_1 \Lambda_2 T_1 T_2 \langle n \rangle^2 e^{-2\nu\tau}]^{-1} \quad (18)$$

— асимптотическая формула, совпадающая с соответствующим выражением, приведенным в [2].

В заключение благодарю В. И. Татарского за поддержку работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Наньюи Гравен Р., Твайс Р. К.—Nature, 1956, 177, p. 27
2. Арееки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлих В. Квантовые флуктуации излучения лазера — М.: Мир, 1974. — 236 с
3. Перина Я. Когерентность света. — М.: Мир, 1974. — 367 с
4. Глаубер Р.—В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М.: Мир, 1966, с. 91.
5. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления — М., 1974. — 299 с.
6. Бом Д. Квантовая теория. — М.: Наука, 1965. — 727 с

Поступила в редакцию  
17 мая 1984 г

#### CORRELATION OF GAUSS FIELD READOUT DISTRIBUTION UNDER TWO-DETECTOR REGISTRATION

A. S. Mazmanishvili

The process of two-detector registration of the Gauss field emission with Lorentz spectral line circuit was considered. By the path integration with Brownian extent, the qualitative characteristics of a deriving function of photoreadout under two-detector registration were obtained. They were found for the arbitrary relation between the width of the emission line, registration duration and the time of delay between the moments of detectors switch on

---

#### ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Стюард И. Г. Введение в фурье-оптику: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 13 л.

В книге профессора Лондонского университета изложены основы нового направления, получившего название «фурье-оптика», которое все шире применяется для построения цельного изображения по элементам в многоэлементных радио-телескопах, многозеркальных оптических телескопах, голографии, спектроскопии. Книгу отличают ясность и четкость изложения, многочисленные иллюстрации из различных областей астрономии и физики, внимание к практическим приложениям

Для инженерно-технических работников приборостроительных отраслей и научных сотрудников — астрономов, физиков, математиков-прикладников. Может служить в качестве учебного пособия студентам соответствующих специальностей