

УДК 538.56.517.93.621.373

## ЭФФЕКТЫ СИНХРОНИЗАЦИИ И БИФУРКАЦИИ СИНХРОННЫХ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

*B. C. Анищенко, T. E. Летчфорд, M. A. Сафонова*

Приведены результаты численного и физического экспериментов по исследованию закономерности перестроек режимов в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью (с применением двухпараметрического анализа). Описаны типичные бифуркации, обусловленные потерей устойчивости регулярными режимами, рассмотрены механизмы разрушения двумерного тора, приводящие к динамическому хаосу.

**1. Введение и постановка задачи исследования.** Одним из актуальных вопросов современной теории колебаний является изучение различными методами динамики нелинейных диссипативных систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha, t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор фазовых переменных в  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{F}$  — нелинейная вектор-функция, задающая поток,  $\alpha$  — совокупность постоянных во времени величин, определяющих пространство параметров системы  $\mathbb{R}^n$ ,  $t$  — время. Если  $\mathbf{F}$  явно от  $t$  не зависит, то система (1) автономная.

Возможность нетривиального поведения определенного класса систем вида (1), связанная с возникновением гомоклинических точек и структур Пуанкаре, долгие годы не воспринималась в качестве типичной, но исследования последних лет привели к появлению целого направления в теории колебаний, так или иначе связанного с понятием «странный аттрактор» (СА) [1]. Единого математически строгого определения СА, которое было бы общепринятым, пока нет, и в прикладных исследованиях обычно считают, что система (1) имеет СА, если существует численное решение задачи Коши  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ , которое на больших временах не сходится к регулярным аттракторам типа неподвижной точки, предельного цикла или квазипериодического движения, оставаясь при этом в ограниченной области фазового пространства  $\mathbb{R}^N$ . Мы будем называть странным аттрактором притягивающую область  $G$  в фазовом пространстве системы, куда все траектории из некоторой окрестности  $G$  стремятся на больших временах, там остаются и не притягиваются регулярными аттракторами.

Анализ динамической стохастичности, математическим образом которой является СА, включает вопрос о бифуркационных механизмах, приводящих к ее развитию. Наиболее мощным аппаратом исследования проблемы СА служит качественная теория, включающая теорию устойчивости и бифуркаций [2–9]. Несмотря на широкое привлечение идей и методов этой теории в прикладных исследованиях пока еще преобладает однопараметрический подход, в результате при исследовании механизмов рождения СА в сложных ( $N > 3$ ,  $n > 2$ ) системах переход к стохастичности часто выглядит запутанным. Введение в рассмотрение второго параметра, позволяющее проанализировать бифур-

кационные линии на плоскости, отвечающие конкретным типам потери устойчивости регулярными режимами, делает картины фазовых переходов существенно информативней [8], поясняя большинство «казусов», обнаруженных при однопараметрическом анализе [10, 11].

Среди механизмов развития динамического хаоса одним из наиболее интересных является переход к СА через квазипериодические колебания с двумя частотами (двумерный тор). Этот механизм типичен для широкого класса нелинейных систем, включая многомерные и распределенные, и обладает рядом универсальных свойств, исследованных пока на примерах дискретных отображений [11–14]. Разрушение двумерного тора может осуществляться несколькими способами: через перемежаемость, через потерю устойчивости резонансным циклом, например, в результате удвоений, и вследствие гомоклинических механизмов [11, 15, 16]. В последнем случае инвариантная замкнутая кривая в отображении Пуанкаре системы (1) или в модельных отображениях прежде чем разрушиться, перестает быть дифференцируемой, т.е. теряет гладкость [4, 5, 11, 15, 16]. Детали перехода к стохастичности через двумерный тор во многом определяются величиной числа вращения Пуанкаре  $\theta$ . В автономных системах число вращения зависит от внутренних параметров, что может затруднить проведение экспериментов. Представляется целесообразным исследовать переход к СА через двумерный тор на примере неавтономной системы, в которой вариацией параметров внешнего воздействия легче управлять числом вращения. В качестве исходной автономной системы удобно выбрать наиболее простую модель, способную демонстрировать сложную динамику и допускающую адекватное физическое моделирование. Указанными свойствами обладает модифицированный генератор с инерционной нелинейностью, введенный и исследованный в работах [17–20]. Математическая модель неавтономного генератора задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz + B_0 \sin pt, & f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\ \dot{y} &= -x, & \\ \dot{z} &= -gz + gf(x), & \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) определена в трехмерном полупространстве  $z \geq 0$  и содержит четыре параметра:  $m$  — параметр возбуждения,  $g$  — параметр инерционности,  $B_0$ ,  $p$  — амплитуда и частота внешнего воздействия,  $t$  — время. Уравнения (2) записаны в нормированных переменных для проведения численных экспериментов.

Радиофизический аналог системы (2) представляет собой  $RC$ -генератор с симметричным мостом Вина и системой отрицательной обратной связи, содержащей однополупериодный квадратичный детектор и сглаживающий  $RC$ -фильтр. Структурная схема генератора дана на рис. 1

[19, 20]. В физических экспериментах анализировались временные реализации процессов, проекции фазовых траекторий на выбранную плоскость переменных и спектры мощности колебаний. Экспериментально и численно изучались перестройки колебательных режимов в неавтономном генераторе с применением одно- и двухпараметрических подходов с целью выявления типичных бифуркаций, приводящих к синхронизации, биениям, удвоению периода и возникновения СА различной структуры вследствие разрушения тора. В задачу исследования включалось таким образом выявление типичных механизмов и путей перехода к динамической стохастичности.

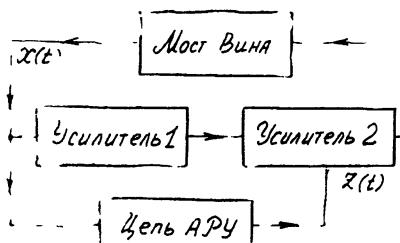


Рис. 1.

**2. Бифуркационная диаграмма системы (2) в окрестности основного резонанса.** Построение и анализ бифуркационных диаграмм систем с числом параметров больше двух связаны с определением наиболее информативного двумерного «среза» в пространстве параметров  $R^n$ . В нашем случае таковым является плоскость параметров  $m$  и  $r$  для фиксированных значений  $g$  и  $B_0$ . Параметр  $g$  был выбран постоянным и равным 0,3. Динамика системы (2) анализировалась на плоскости параметров  $m$ ,  $r$  для различных значений амплитуд воздействующего сигнала  $B_0$ .

Потеря устойчивости периодическим колебанием (циклом) происходит при обращении по модулю в единицу одного или нескольких собственных значений из спектра линеаризации отображения Пуанкаре [5, 7, 8]. Возможным бифуркациям потери устойчивости соответствуют условия:  $\mu_{1,2}=e^{\pm j\varphi}$ ,  $\mu=+1$  и  $\mu=-1$ , где  $\mu$  — мультиплликатор цикла. Для удобства изложения линии на плоскости параметров, отвечающие указанным условиям, будем называть бифуркационными линиями нейтральности ( $\mu_{1,2}=e^{\pm j\varphi}$ ), кратности ( $\mu=+1$ ) и удвоения периода ( $\mu=-1$ ) и обозначать их на графиках  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

На рис. 2 приведены результаты расчетов бифуркационных линий на плоскости параметров  $m$ ,  $r$  для значений  $B_0=0,1$  (а) и  $0,5$  (б). Область существования устойчивых колебаний на частоте внешнего воздействия (сектор 1) ограничена бифуркационными линиями  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2^k$ . При пересечении линии  $l_0$  из цикла мягко рождается в общем случае эргодический тор, возникают двухчастотные колебания. Вдоль линии  $l_0$  число вращения  $\theta$  монотонно изменяется. Последовательно проходятся точки сильных резонансов  $B$  ( $1:3$ ),  $A$  ( $1:4$ ) и множество слабых. В точках  $D$ , помимо пары комплексно-сопряженных мультипликаторов, на единичный круг выходит третий мультиплликатор цикла  $\mu_3=+1$ , и линия  $l_0$  прерывается\*. Выше точек  $D$  фиксируется линия  $l_1$ . При переходе через  $l_1$  устойчивый цикл сливается с неустойчивым и исчезает. При выходе из сектора 1 через линию  $l_2^k$  исходный цикл теряет устойчивость, а вблизи него мягко рождается цикл удвоенного периода. Дальнейшее движение вверх по  $m$  сопровождается последовательностью бифуркаций удвоения периода резонансного цикла, завершающейся рождением СА<sub>1</sub> (сектор 6). На рис. 2 а, б нанесены линии удвоений  $l_2^k$  ( $k=1, 2, 3$ ) и линии критических значений параметров  $l_{kp}$ , соответствующие переходу к СА<sub>1</sub> [20]. Точками  $E$  обозначены пересечения линий  $l_2$  и  $l_1$ . При  $B_0=0,1$  бифуркационная линия рождения цикла удвоенного периода  $l_2^1$  на участке  $E-E$  совпадает с линией удвоения периода  $l_2^1$ . Для циклов больших кратных периодов картина аналогична. Для  $B_0=0,5$  диаграмма становится более сложной. Линия  $l_2^1$  совпадает с линией  $l_1^1$  на участке  $E-L$ . Пунктиром обозначен участок  $l_2^1$ , на котором происходит слияние устойчивого цикла периода внешнего воздействия с неустойчивым циклом удвоенного периода. Кроме того, в этом случае имеется еще одна линия удвоения  $l_2^1$ , ограничивающая сектор 1 слева. Область за этой линией пока не исследована.

На точки  $A$  и  $B$  опираются резонансные клювы, образованные линиями кратности  $l_1$ , на которых, сливаясь с неустойчивым, исчезает соответствующий синхронный цикл на двумерном торе, характеризующийся внутри клюва постоянным рациональным значением числа вращения

\* Особые точки типа  $A$ ,  $D$ ,  $B$ , в которых одновременно выполнены два бифуркационных условия, соответствуют бифуркациям коразмерности 2. Линии типа  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2^k$  отвечают одному бифуркационному условию и характеризуют бифуркации коразмерности 1 [5, 8].

Пуанкаре. Если проследить за числом вращения  $\theta$  вблизи и несколько выше линии  $l_0$ , то вдоль нее наблюдается однозначная ступенчатая зависимость  $\theta(p, m)$  типа «чертовой лестницы» за счет расширения резонансных клюев, которые еще не перекрываются. На рис. 2 показана структура бифуркационных линий в клюе  $B$ . При движении вверх по  $m$  внутри клюя на линии нейтральности  $l_0$  из синхронного цикла на торе мягко рождается новый устойчивый двумерный тор. Для  $B_0 = 0,5$  линия  $l_0$  в  $B$ -клюе терпит разрыв в точках  $K$ , в которых имеет место резонанс  $\theta = 1 : 2$ . Из этих точек берут начало две линии  $l_2$  и  $\tilde{l}_2$ , на которых один из мультипликаторов синхронного цикла равен  $-1$  (на линии  $\tilde{l}_2$  цикл при этом уже неустойчив по второму мультипликатору). Выше линии  $l_0$  происходит разрушение вновь родившегося тора с образованием аттрактора  $CA_2$  (сектор 5).

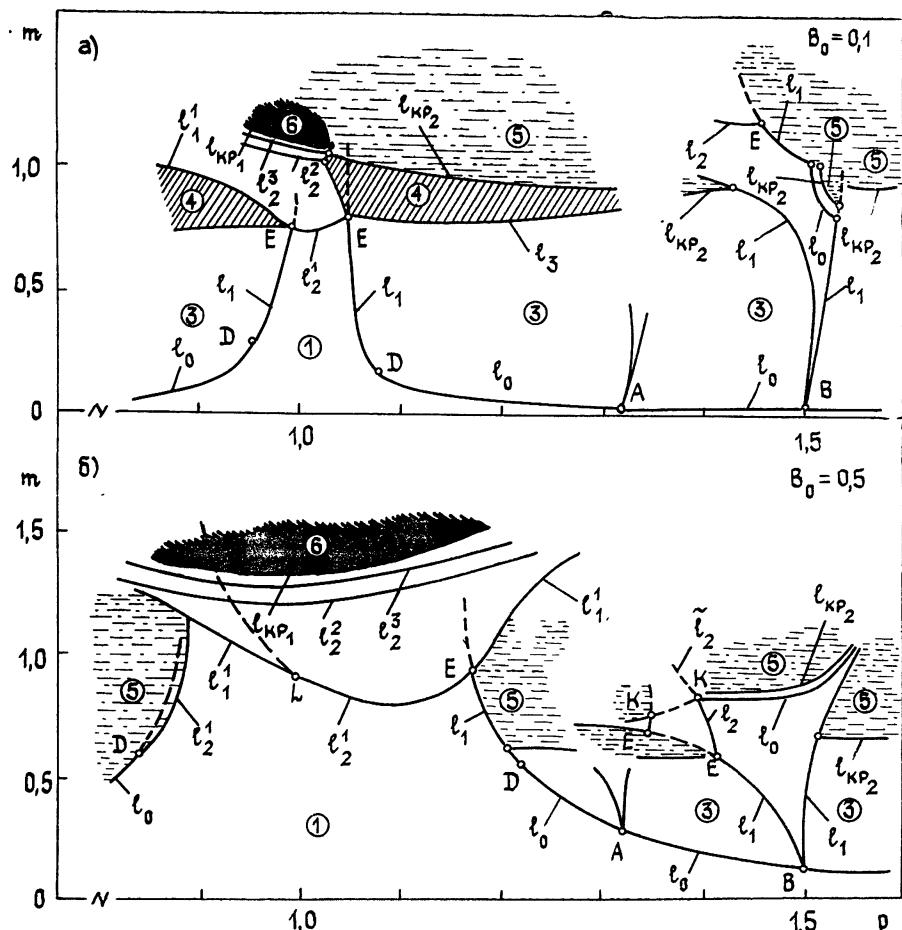


Рис. 2 Бифуркационная диаграмма. Численный эксперимент для  $B_0=0,1$ (а) и  $0,5$ (б);  $l_0$  — линии нейтральности  $\mu_1, 2 = \exp(\pm i\varphi)$ ,  $l_1$  — линии кратности  $\mu_1 = +1$ ,  $l_2^k$  — линии удвоений периода циклов  $\mu_1 = -1$ ,  $l_{kp1}$  — линии перехода к  $CA_1$  в результате цепочки удвоений периодов циклов,  $l_3$  — линии удвоений двумерного тора;  $l_{kp2}$  — линии разрушения торов и перехода к  $CA_2$ . Пунктиром обозначены линии бифуркаций неустойчивых циклов 1—6 — секторы с различными колебательными режимами

Как видно из рис. 2, имеется еще два типа бифуркационных линий:  $l_3$  и  $l_{kp2}$ , которые расположены в области практически эргодических

биений и характерных для них бифуркаций. На линии  $l_{kp_1}$ , кото́рая в действительности является не линией, а областью в виде ленты конечной ширины с очень сложной внутренней структурой, фиксируется переход к стохастичности через серию многочисленных бифуркаций, завершающуюся разрушением двумерного тора с образованием СА<sub>2</sub> (сектор 5). При  $B_0=0,5$  на линии  $l_{kp_1}$  разрушается однотактный тор (1-тор). С уменьшением амплитуды воздействия, прежде чем разрушиться, двумерный тор претерпевает конечную последовательность бифуркаций удвоения [22]. Так, для  $B_0=0,1$  имеет место одно удвоение тора, происходящее при пересечении линии  $l_3$  снизу вверх по  $m$ , и на линии  $l_{kp_2}$  разрушается удвоенный тор (2-тор). Как показали расчеты, с уменьшением интенсивности воздействия число бифуркаций удвоения торов растет, но остается конечным для конечных амплитуд  $B_0$  внешнего сигнала [14].

Подведем краткий итог по результатам численного эксперимента. Двухпараметрический анализ системы (2) на плоскости параметров  $m, p$  позволил определить типичные бифуркации периодических и квазипериодических режимов и выявить характерные области топологически отличных типов колебаний. Основные режимы колебаний в системе (2) следующие: 1 — область периодических колебаний частоты воздействия, 2 — область резонансных двухтактных колебаний вблизи  $p=2$  (на рис. 2 эта область не изображена). Численные эксперименты показали, что характер бифуркаций в области резонанса 1:2 (сектор 2) полностью идентичен случаю резонанса 1:1 на рис. 2, 3 — область практически эргодических биений с различными числами вращения, 4 — область существования 2-торов, 5 — область странных атракторов СА<sub>2</sub>, порождаемых разрушением двумерных торов, 6 — область стохастичности, возникающей в результате цепочки удвоений периодов резонансных циклов на торе. Внутри клюев  $A$  или  $B$  наблюдаются синхронные циклы с постоянным числом вращения. При увеличении параметра  $m$  внутри клюев эти циклы теряют устойчивость с рождением притягивающих двумерных торов, разрушение которых вновь приводит к стохастичности (СА<sub>2</sub>).

**3. Экспериментальная диаграмма разбиения плоскости параметров  $m$  и  $p$  на секторы с различными колебательными режимами.** Численное построение бифуркационных диаграмм, типа представленных на рис. 2, в широкой области параметров требует больших затрат машинного времени, и дальнейшие исследования мы проведем с использованием реального генератора, обращаясь к ЭВМ только в специальных случаях. Радиофизический эксперимент в нашей задаче будет играть роль не только в качестве теста по проверке адекватности математической и физической моделей, но и служить самостоятельным методом исследования сложных бифуркационных явлений, чаще всего изучаемых лишь с применением ЭВМ. Интерпретацию экспериментальных данных мы будем вести в терминах теории бифуркаций, в связи с чем дадим краткие пояснения по методике измерений. В физическом эксперименте параметр  $m$  регулировался величиной сопротивления  $R_m \sim m$ , управляющего коэффициентом усиления в цепи положительной обратной связи. Параметр  $p$  варьировался изменением частоты возбуждения  $f_1 \sim p$ , амплитуда  $B_0$  определялась напряжением сигнала внешнего генератора  $V_0 \sim B_0$ . Параметр  $g$ , как и при расчетах, был постоянным и равным 0,30. Для определения характера потери устойчивости режимами колебаний мы использовали осциллограф и анализатор спектра, с помощью которых исследовали перестройку типов колебаний по виду временных реализаций, по проекциям фазовых траекторий на выбранную плоскость и соответствующим спектрам мощности. Диагностика линий нейтральности и удвоений периода цик-

лов тривиальна в силу мягкого характера бифуркаций; линии кратности определять несколько сложнее, особенно в областях, где имеет место заметный гистерезис, однако тоже возможно. Бифуркации удвоения и разрушения торов четко фиксируются при сопоставлении фазовых проекций и соответствующих спектров колебаний при переходах.

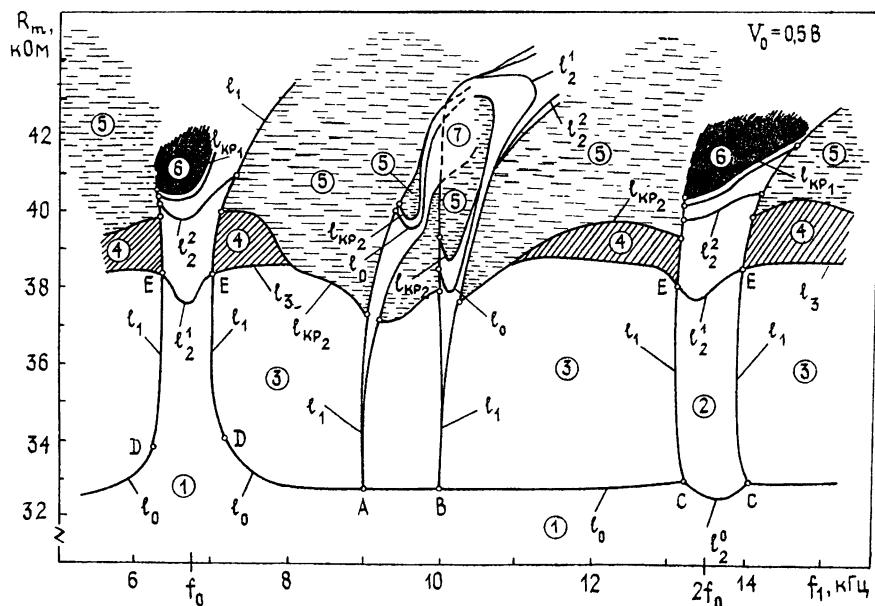


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма Физический эксперимент для  $V_0=0,5\text{ В}$  Обозначения аналогичны рис. 2

На рис. 3 дан фрагмент бифуркационной диаграммы на плоскости  $R_m, f_1$  для диапазона частот  $5,5 < f_1 < 15 \text{ кГц}$ , что соответствует области  $0,8 < p < 2,2$  ( $p = f_1/f_0$ ,  $f_0 = 6,75 \text{ кГц}$  — собственная частота генератора при малых значениях  $R_m$ ). Рисунок содержит большинство характерных режимов колебаний, качественно повторяющихся с расширением диапазона частот  $\Delta f_1$  при различных значениях  $V_0$ . Из бифуркационной диаграммы рис. 3 следует, что характер экспериментально обнаруженных бифуркаций в окрестности основного резонанса соответствует расчетным данным, приведенным на рис. 2. Обсудим результаты эксперимента в общих чертах. Диаграмма рис. 3 содержит свыше тридцати секторов, образованных пересечениями бифуркационных линий  $l_i$ ,  $i=0, 1, 2, 3$ , и  $l_{kp1,2}$ . (Обозначения на рис. 3 соответствуют принятым на рис. 2.) Бифуркационные линии  $l_3$  и  $l_{kp_2}$ , отвечающие удвоениям тора и его разрушению с образованием  $CA_2$ , отражают нетривиальные бифуркации и будут подробно рассмотрены ниже. Здесь же укажем, что как при расчетах, так и в экспериментах линия  $l_{kp_1}$  на рис. 3 характеризовалась конечной областью сложной структуры, в которой фиксировалось постепенное разрушение торов с развитием стохастичности.

Пересечения бифуркационных линий  $l_i$  на экспериментальной диаграмме определяют особые точки бифуркаций, которых на рис. 3 свыше сорока. Для точек на линии  $l_0$  экспериментально можно определить число вращения  $i$ , следовательно, порядок резонанса  $\theta = v/q$ , где  $v$  и  $q$  — целые числа. Большинство других особых точек строгой экспериментальной диагностике в терминах теории бифуркаций не поддаются. Точки на линиях нейтральности  $l_0$  выделены дополнительными условиями рациональности числа вращения  $i$  и порождают клювчи синхронизации с соответствующими значениями  $\theta$ . Так, например,

внутри  $A$ -клюва, который опирается на точку  $A$ ,  $\theta=1/4$ , в  $B$ -клюве  $\theta=1/3$ . Зоны слабых резонансов ( $q \geq 5$ ) хотя частично и наблюдались в экспериментах, но с целью сохранения наглядности на рис. 3 не показаны.

Анализ режимов в различных секторах диаграммы позволил выделить семь областей с топологически отличающимися типами колебаний (соответствующие арабские цифры на рис. 2 и 3). В области 1 система демонстрирует вынужденные колебания частоты  $f_1$ . Вблизи резонансной частоты  $f_0$  для  $R_m > 33$  кОм осуществляется захват частоты и синхронизация на основном тоне. Период колебаний здесь  $1/pf_0$ . На частотах  $f_1 \approx 2f_0$  осуществляется синхронизация на второй гармонике (сектор 2). Интересно отметить, что цикл внешней частоты при переходе через линию  $l_2^0$  снизу (вблизи  $p=2$ ) претерпевает бифуркацию удвоения периода, после чего осуществляется захват частоты. Период цикла в области 2 равен  $2/pf_0$ . В секторах 3 регистрируются устойчивые биения с различными числами вращения. При некоторых значениях параметров  $\theta$ rationально и проявляются узкие зоны слабых резонансов. Ограничено шумами и точностью аппаратуры разрешение установки не позволяло нам анализировать эти режимы. В секторах 4 колебания в фазовом пространстве лежат на поверхности 2-тора, когда один из квазипериодов претерпел бифуркацию удвоения [22]. Множеством узких зон резонансов, наблюдаемых при вариации параметров, динамика системы в 4 сходна с динамикой в 3 и отличается тем, что резонансные явления имеют место на 2-торах и проявляются в еще более узких областях плоскости параметров. В секторах 5 реализуются СА<sub>2</sub>, рождающиеся при пересечении линий  $l_{kp}$ , за счет нескольких различных механизмов разрушения двумерных торов. Движению внутрь областей 5 соответствуют процессы усложнения структуры СА<sub>2</sub>, которым сопутствуют выравнивание спектра, сплошного в широком диапазоне частот, спадание корреляций и рост интегральной мощности колебаний. В секторах 6, расположенных в областях резонансов 1:1 и 1:2, реализуется СА<sub>1</sub> — странный аттрактор, возникающий в результате накопления бифуркаций удвоения периода синхронных циклов по закону Фейгенбаума [20]. Сектор 7, где перекрываются  $A$ - и  $B$ -клювы с различными числами вращения, демонстрирует множество различных режимов колебаний, характеризующихся гистерезисом, перемежаемостью типа «цикл-хаос» и повышенной чувствительностью к воздействию флуктуаций. Наиболее типичным в эксперименте при входе в сектор 7 снизу был режим перемежаемости между синхронным 3-циклом  $A$ -клюва и СА<sub>2</sub>, который рождается из двумерного тора на базе 2-цикла  $B$ -клюва (сектор 5 в  $B$ -клюве).

Некоторые интересные режимы и переходы в описанных выше секторах иллюстрирует рис. 4, содержащий типичные проекции фазовых траекторий на  $xy$ -плоскость, сфотографированные с экрана осциллографа. Отметим, что точки плоскости параметров и масштабы изображений режимов на рис. 4 выбирались нами из соображений наглядности при сохранении топологической структуры фазового портрета режима колебаний.

Как видно из диаграмм рис. 2 и рис. 3, динамическая стохастичность отмечается в двух типах секторов: секторах 5 и 6. Однако возможных бифуркационных переходов к хаосу в исследуемой системе — четыре. Первый — фейгенбаумовские удвоения резонансных циклов внутри областей синхронизации 1 и 2 — реализуется при движении по плоскости параметров под ненулевым углом к линиям удвоений  $l_2^0$ . Второй переход осуществляется при пересечении  $l_{kp}$  снизу и обусловлен мягким разрушением двупериодических движений на 1-торе (или на 2-торе, если пересекается сектор 4). Третий тип перехода к СА

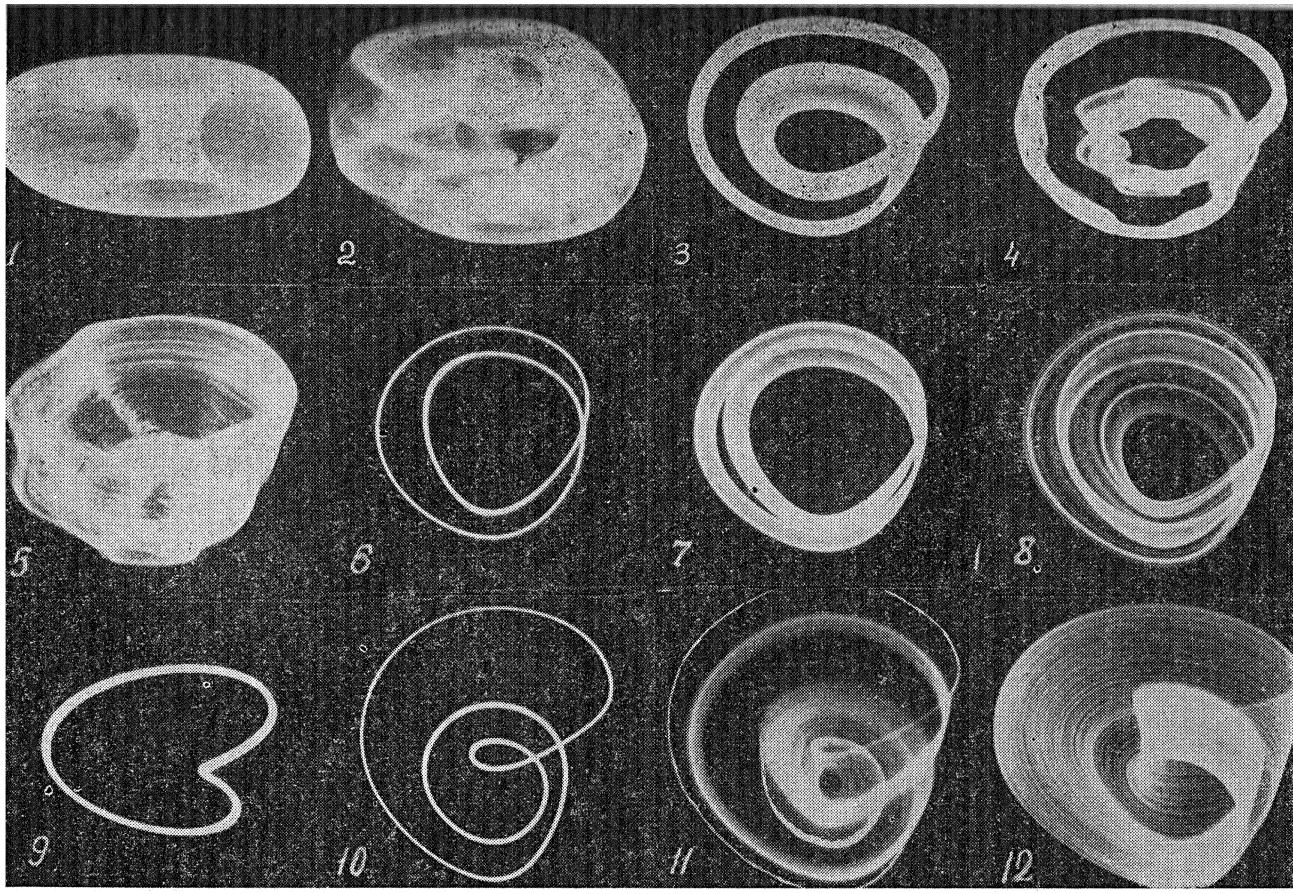


Рис. 4. Проекции фазовых траекторий на  $xy$ -плоскость. Физический эксперимент:  
 1 — гладкий 1-тор в 3, 2 — потеря гладкости 1-тором, 3 — гладкий 2-тор в 4, 4 — потеря гладкости 2-тором  
 в  $B$ -ключе, 5 —  $CA_2$  в 5, 6 — синхронный 2-цикл в  $B$ -ключе, 7 — эргодический 2-тор в  $B$ -ключе, 8 — потеря гладкости 2-тором  
 в  $B$ -ключе, 9 — синхронный цикл в секторе 2, 10 — синхронный цикл в  $A$ -ключе, 11 — перемежаемость «цикл-хаос» в 7,  
 12 —  $CA_1$  в секторах 6.

имеет место при движении внутри любой из областей синхронизации в направлении секторов 5 через линии кратности  $f_1$ . Стохастичность возникает при этом жестким образом, вблизи линий  $f_1$  фиксируется перемежаемость между CA<sub>2</sub> и циклами синхронизации, при возврате внутрь любой из областей синхронных циклов с начальными условиями на CA<sub>2</sub> регистрируется метастабильный хаос, который в физическом эксперименте сопровождается гистерезисом. Именно эта ситуация обсуждалась в работе [22], но тогда не была понятной. Четвертый тип перехода реализуется при движении из секторов 6 в 5 и наоборот. Здесь реализуются сложные явления взаимодействий типа «хаос-хаос», когда CA<sub>1</sub> и CA<sub>2</sub> различной структуры конкурируют между собой во времени [25]. Явления подобного типа проявляются и в секторе 7, т. е. в областях перекрывания резонансных клюев с разными числами вращения.

**4. Мягкий переход к стохастичности через двумерный тор.** Исследуем переход к CA<sub>2</sub> при движении по параметру  $m$ , фиксируя различные значения параметров  $p$  и  $B_0$ . Примером может служить анализ перестроек режимов для  $f_1 = 13 \text{ кГц}$  и  $32 < R_m < 41 \text{ кОм}$ , проведенный на основании рис. 3. На линии  $f_0$  из цикла внешнего воздействия мягко

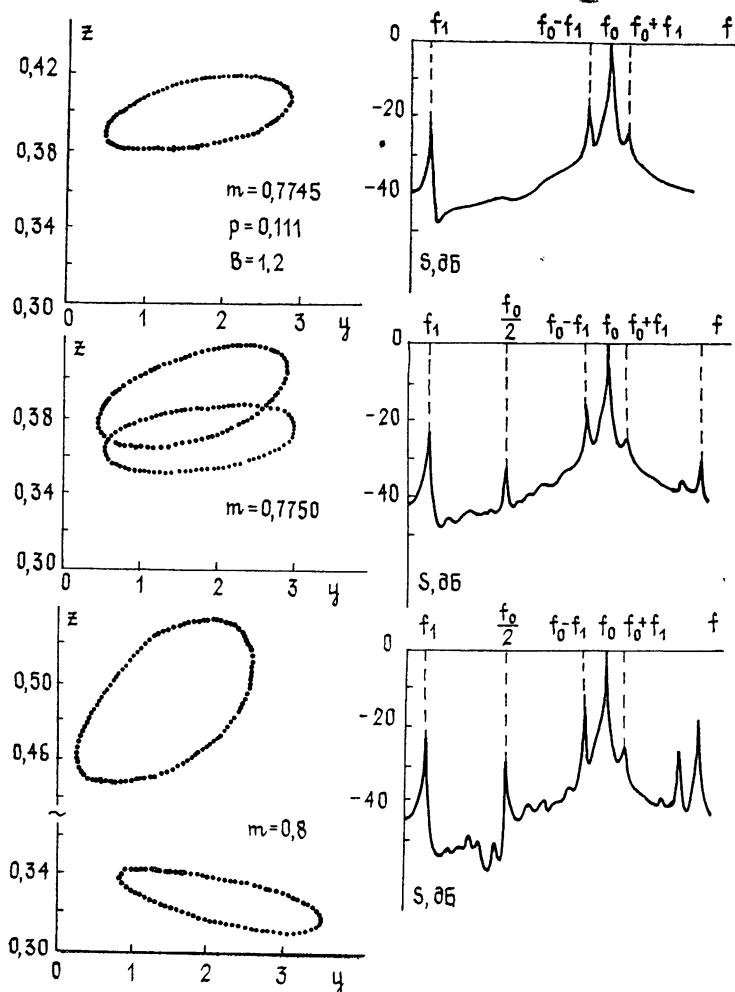


Рис. 5.

рождается 1-тор, который с ростом  $R_m$  проходит серию слабых резонансов и в эксперименте выглядит практически эргодическим. Пересечение линии  $t_3$  вызывает переход 1-тор  $\rightarrow$  2-тор, т. е. двумерный тор удваивается [14, 18, 20–22]. Удвоение эргодического тора, впервые экспериментально установленное в [21], представляется интересным. В отличие от удвоения резонансного цикла на торе эта бифуркация пока не совсем понятна с точки зрения локальной теории устойчивости. Однако эта бифуркация подтверждается и численными экспериментами [22, 23]. На рис. 5 даны сечения Пуанкаре и соответствующие спектры мощности при удвоении тора, вычисленные для  $p=0,111$ ,  $B_0=1,2$  и указанных значений  $m$ . Нет сомнения в том, что удвоение тора происходит без резонанса. В отображении более  $10^3$  точек, причем исключен длительный процесс установления. Прохождение точки бифуркации  $0,7745 < m^* < 0,7750$  сопровождается мягким раздвоением сечения на две инвариантные замкнутые кривые, которые с ростом  $m$  плавно удаляются друг от друга. Экспериментально обнаружено и численно подтверждено, что каскад удвоений торов конечен и определяется

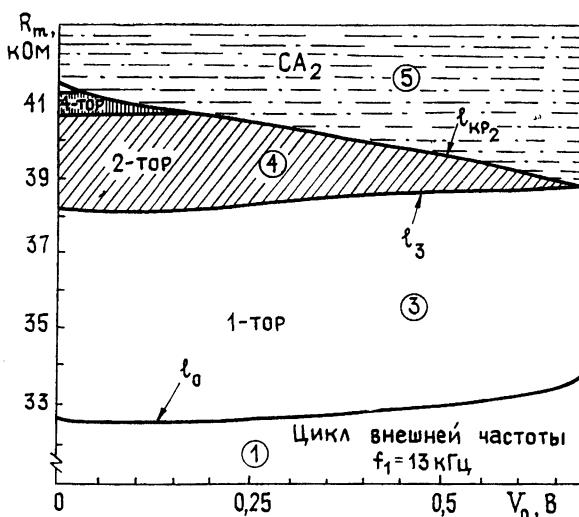


Рис. 6.

уровнем воздействия  $B_0 \neq 0$ . На рис. 6 представлена экспериментальная диаграмма режимов на плоскости параметров  $R_m$ ,  $V_0$  для фиксированной частоты воздействия  $f_1 = 13$  кГц, свидетельствующая о том, что цепочка удвоений торов обрывается тем раньше, чем больше амплитуда воздействия  $V_0$ . Для малых амплитуд  $V_0 < 0,15$  В переход к  $CA_2$  осуществляется с разрушением 4-тора, если  $V_0 > 0,7$  В — разрушается 1-тор без удвоений. Эти результаты подтверждаются расчетами. На рис. 7 представлена эволюция одной из двух инвариантных кривых сечения 2-тора плоскостью  $x=0$  с ростом параметра  $m$  для  $B_0=0,3$ ,  $p=0,111$ . На рис. 7а — эргодический 2-тор, 7б — эргодический 4-тор после удвоения, видно начало искажения инвариантных кривых, 7в — цепочка удвоений прерывается потерей гладкости инвариантных кривых, выше по параметру  $m > 1,06$  двумерный тор уже не притягивающий, 7г — в окрестности разрушившегося тора в сечении возникает стохастическое множество  $CA_2$ , которое с ростом  $m$  эволюционирует в развитый хаос. Расчет полного спектра ляпуновских показателей для перехода, показанного на рис. 7 [22], показал, что размерность по Каплану—Йорку  $D_L=2,0$  на  $k$ -торах ( $k=1, 2$  и  $4$ ), затем в области  $1,06 < m < 1,10$  быстро воз-

растает, оставаясь в интервале  $2 < D_L < 3$ , и далее становится больше трех. Анализ спектров мощности  $S(f)$  рис. 7 свидетельствует о двух стадиях в переходе к хаосу через двумерный тор. На первой стадии движения по  $m$  за счет удвоений появляются гармоники частоты  $f_0/2$  (2-тор), затем гармоники  $f_0/4$  (4-тор). Вторая стадия начинается постепенным развитием эффекта потери гладкости 4-тором с последующим его разрушением. В спектре мощности плавно возникают линии многочисленных комбинационных частот, однако до момента разрушения тора спектр дискретный, размерность  $D_L = 2,0$ , хотя отображение Пуанкаре выглядит уже достаточно сложным (рис. 7в). Появ-

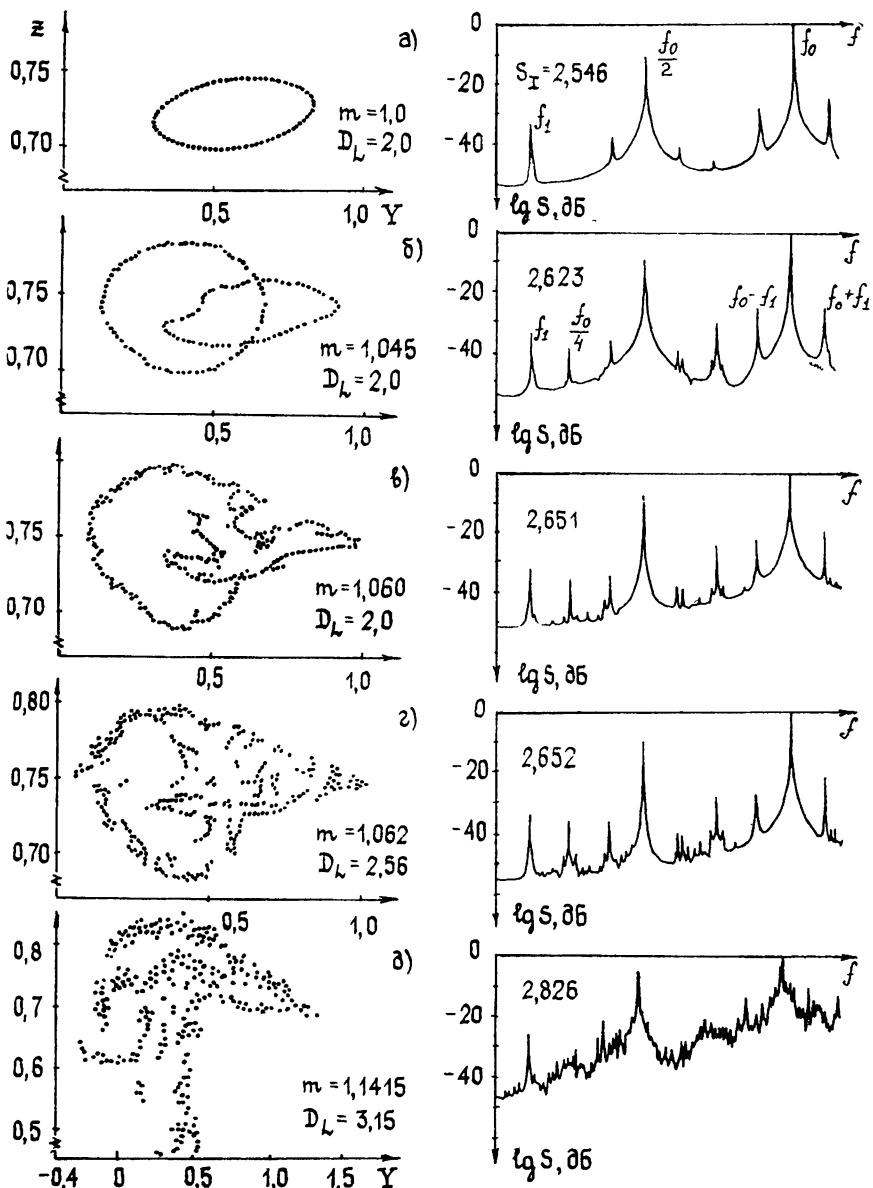


Рис. 7 Развитие СА<sub>2</sub> через разрушение двумерного 4-тора. Численный эксперимент для  $B=0,3$ ,  $p=0,111$ ,  $g=0,3$ . Спектр мощности рассчитывался с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье. Количество точек реализации 8192 при шаге  $m$  счета  $\Delta t=\pi/10$ . Усреднение проводилось по 16 периодограммам с массивами в 4096 точек.

ление положительного ляпуновского показателя сопровождается возникновением в спектре мощности сплошного пьедистала, который с ростом параметра  $m$  плавно увеличивается, о чем свидетельствует монотонный рост интегрального спектра  $S_I = \int S(f) df$ . Эти данные подтверждают мягкий характер рождения  $CA_2$  при разрушении тора в анализируемой ситуации [18, 22].

Увеличение размерности  $D_L$  сопровождается постепенным «разбуханием» и объединением стохастических множеств, порождаемых разрушением каждой инвариантной кривой в отображении [24]. В физическом и машинном экспериментах при этом фиксировалось изменение скорости спадания корреляций и усложнение структуры  $CA_2$ , о чём говорилось выше. Детальные расчеты процесса разрушения инвариантных кривых с малым шагом по параметру  $m$  показали, что разрушению тора всегда предшествует резонанс, как правило, высокого порядка.

Бифуркационные явления, качественно аналогичные вышерассмотренным, имеют место в  $A$ - и  $B$ -клювах синхронизации. Внутри этих клюев резонансные циклы сложной структуры (фото 10 и 6 на рис. 4 соответственно) на бифуркационных линиях  $l_0$  теряют устойчивость с мягким рождением соответствующих торов. Рассмотрим  $B$ -клюв. Тор, рождающийся из синхронного цикла (фото 7, рис. 4) при пересечении линии  $l_{kp}$ , разрушается (фото 8) и возникает  $CA_2$  (сектор 5 внутри  $B$ -клюва). Удвоения торов внутри  $A$ - и  $B$ -клюев мы не наблюдали. Нетрудно видеть аналогию в последовательности бифуркационных явлений. Синхронные циклы теряют устойчивость на линиях нейтральности  $l_0$ . В точках типа  $A$  и  $B$ , где  $\theta$ rationально, возникают клювы синхронизации, внутри которых резонансные циклы вновь теряют устойчивость с рождением более сложных двумерных торов. В процессе образования новых клюев синхронизации видна закономерность: периоды синхронных циклов при каждой бифуркации увеличиваются в  $q$  раз,  $q$  — порядок резонанса. Таким образом при движении из клюва в новый клюв рождаются долгопериодические циклы с периодом, стремящимся в итоге к бесконечности. Этот эффект сгущается по параметрам. Нет сомнения в том, что описанная последовательность бифуркаций есть качественное обобщение каскада удвоений Фейгенбаума на случай двухпараметрических семейств. С помощью двумерных отображений нескольких типов нам удалось численно проследить последовательность из трех описанных выше бифуркаций и построить бифуркационные диаграммы на плоскости двух управляющих параметров. Эти диаграммы представляют собой систему подобных вложенных структур, качественно изображенных на рис. 8, где  $\Gamma_i$ ,  $i=0, 1, 2, 3$  — синхронные циклы на инвариантных окружностях, период которых скачком возрастает с увеличением  $i$ ,  $l_{0i}$  и  $l_{1i}$  — соответствующие синхронным циклам линии нейтральности и кратности. Области эргодических биений заштрихованы. Если учесть, что каждый новый клюв заметно уже предыдущего и то, что он опирается на выделенную точку  $A_i$  на плоскости па-

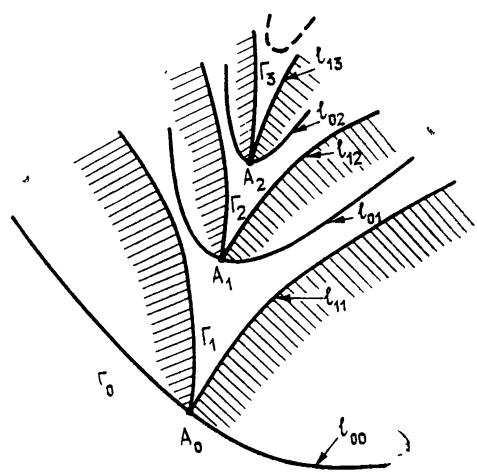


Рис. 8.

метров, становится понятным, что в физическом и численном экспериментах с использованием однопараметрического анализа более типична картина сложного процесса при разрушении двумерного тора, а не сгущающаяся последовательность бифуркаций увеличения периода циклов в  $q$  раз. Последнее явление, в принципе, можно наблюдать, специально выбрав направление движения по параметрам внутри клюев синхронизации, чтобы пересекать линии нейтральности  $l_0$ , строго в точках резонансов порядка  $q$ . Изменяя в экспериментах лишь один параметр, этого добиться невозможно, поэтому типичным в этом случае будет переход, описанный выше (см. рис. 7).

Подведем общий итог. Рассмотренная задача с точки зрения радиофизики есть часть более общей проблемы синхронизации нелинейных колебаний при сильных взаимодействиях. Здесь проявляются эффекты, которые трудно или невозможно рассчитать теоретически и в понимании которых помогают численные и натурные эксперименты типа описанных в этой работе. Среди них выделим: эффект захвата частоты в области основного резонанса на субгармониках  $f_k = p f_0 / 2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , бифуркацию удвоения эргодического тора, накапливающейся по параметрам процесс рождения торов и резонансных циклов в областях синхронизации с рациональными числами вращения, возникновение стохастичности через удвоения синхронных циклов и разрушение двумерных торов, которому предшествует потеря гладкости и резонансы, а также перемежаемости типов «цикл-хаос» и «хаос-хаос». Система (2) демонстрирует все типичные переходы к хаосу, являясь наиболее простой из подобного класса систем. Совершенно ясно, что в данном вопросе многие тонкие эффекты пока не выяснены. Однако работы в этом направлении необходимы для решения более общей фундаментальной проблемы синхронизации нелинейных волн.

Основные результаты проведенных экспериментальных исследований подтверждают выводы недавно опубликованной теоретической работы [16], и мы искренне признательны Л. П. Шильникову и В. С. Афраймовичу за многочисленные консультации и обсуждения. Мы благодарны сотрудникам НИВЦ АН СССР за предоставление программ [26, 27], а также М. И. Рабиновичу за проявленный интерес к работе и ряд полезных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Препринт ИПФ АН СССР № 87 — Горький, 1983
- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
- Немецкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ОГИЗ, 1947
- Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976
- Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978
- Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Наука, 1983
- Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980
- Арнольд В. И. Вики Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979, с. 116
- Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972.
- Сапесо К. — Progr. Theor. Phys., 1983, 69, № 5, p. 1427
11. Aronson D. C., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P. — Commun. Math. Phys., 1982, 83, p. 303
12. Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. — Physica, 1983, 8D, p. 303.
13. Jensen M. H., Bak P., Bohr T. — Phys. Rev. Lett., 1983, 50, № 21, p. 1637.
14. Кузнецов С. П. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, вып. 2, с. 113.

- 15 Афраймович В С, Шильников Л П — ДАН СССР, 1974, 219, № 6, с 128
- 16 Афраймович В С, Шильников Л П — В сб Методы качественной теории дифференциальных уравнений — Горький Гос ун-т, 1983, с. 3.
- 17 Анищенко В С, Астахов В В, Летчфорд Т. Е — Радиотехника и электроника, 1982, № 10, с 1972
- 18 Анищенко В. С и др — Изв вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 7, с. 832
- 19 Анищенко В С, Астахов В В — Радиотехника и электроника, 1983, № 6, с 1109.
- 20 Анищенко В С, Астахов В В — ЖТФ, 1983, № 11, с 2165
- 21 Анищенко В С Материалы III Всесоюзной конференции «Флуктуационные явления в физике» — Вильнюс, 1983, с 24
- 22 Анищенко В. С, Летчфорд Т Е, Сафонова М. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 5, с. 565
- 23 Franceschini V — Physica, 1983, 6D, p. 285
- 24 Афраймович В С, Рабинович М И, Угодников А Д — Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, вып 2, с 64
- 25 Анищенко В С — Письма в ЖТФ, 1984, 10, вып. 10, с. 629
- 26 Балабаев Н К, Шноль Э Э. Препринт НЦБИ НИВЦ АН СССР, Пущино, 1983 (Научный центр биологических исследований, Научно-исследовательский вычислительный центр)
- 27 Базыкин А. Д, Крюков В И, Хибиник А. И Препринт НЦБИ НИВЦ АН СССР, Пущино, 1983

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
7 мая 1984 г

## PHASE LOCKING EFFECTS AND BIFURCATIONS OF PHASE LOCKING AND QUASIPERIODIC OSCILLATIONS IN A NONAUTONOMOUS GENERATOR

*V. S. Anishchenko, T. E. Letchford, M. A. Sofonova*

The regularities of the regime reorganizations in nonautonomous generator with inertial nonlinearity are examined numerically and by means of a phisical experiments, by the use of two-parametric analysis. The typical bifurcations due to the loss of stability of regular regimes are described, the mechanisms of two-dimensional torus destruction leading to dynamical chaos are considered

## ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Искусственные пучки частиц в космической плазме: Пер. с анг. / Под ред. Б. Граниля. — М.: Мир, 1985. — 26 л.

В коллективную монографию, выпущенную под руководством известного норвежского исследователя Б Граниля, вошли наиболее интересные материалы симпозиума НАТО по воздействию искусственных пучков заряженных частиц на околоземную космическую плазму. Основное внимание удалено материалам по нелинейному взаимодействию плазмы и заряженных частиц, моделированию процессов взаимодействия пучка с верхней атмосферой и нейтрализации заряженного тела (спутника или ракеты), движущегося в космосе.

Для специалистов в области низкотемпературной плазмы, дальней и космической связи, физики верхней атмосферы, а также для инженерно-технических работников, связанных с планированием и проведением космических экспериментов