

УДК 621.373.826

КИНЕТИКА СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ МНОГОМОДОВОГО ЛАЗЕРА С БЫСТРОРЕЛАКСИРУЮЩЕЙ АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

М. С. Гитлин, Я. И. Ханин

Спектральная кинетика многомодового лазера с быстрорелаксирующей активной средой рассмотрена в самых общих предположениях относительно дисперсионных свойств резонатора, поведения накачки и потерь во времени, положения и размеров активной среды. Исследование балансных уравнений на нестационарном этапе позволило найти вид функции распределения фотонов по модам и свести задачу об эволюции спектра к анализу динамики эталонной моды. Рассмотрен ряд практически важных частных случаев (малое превышение порога генерации, конкретные дисперсионные характеристики резонатора).

Закономерности эволюции спектра излучения многомодовых перестраиваемых лазеров с быстрорелаксирующей активной средой (растворы органических красителей, кристаллы с центрами окраски) весьма существенны с точки зрения некоторых, в первую очередь спектроскопических, применений таких лазеров. Литература, посвященная исследованию этих закономерностей, включает ряд теоретических [1-8] и экспериментальных [9-12] работ.

Типичным для теоретических работ, посвященных спектральной кинетике многомодовых лазеров, является наиболее простой балансный подход. Так, в [9] был рассмотрен важный для внутрирезонаторной спектроскопии вопрос о влиянии селективного поглощения на спектр излучения. В рамках балансного приближения в [1] было найдено, как эволюционирует во времени распределение фотонов по модам (см. также [2, 7, 8, 14]), но вопрос о том, по какому закону изменяются в процессе генерации интенсивности каждой из мод, остался открытым.

Экспериментальные исследования [11, 12] показали, что форма спектра генерации в отсутствие селективных потерь в резонаторе лазера близка к гауссовой и при условии постоянства интегральной мощности высота спектра растет пропорционально $t^{1/2}$. Подобный временной ход является следствием параболического закона дискриминации мод, и в указанном случае его можно записать из элементарных соображений [2, 8, 11]. Однако в случае использования резонаторов со сложным законом дисперсии потерь элементарный подход отказывается. Проблема еще более усложняется, если накачка и потери не остаются постоянными во времени, как это обычно и бывает в импульсных лазерах.

В настоящей работе анализ спектральной кинетики проводится в самых общих предположениях относительно дисперсионных свойств резонатора, временного хода накачки и потерь, положения и размеров активной среды лазера. Ограничивающим является предположение о большом количестве возбуждающихся мод, что может сделать рассмотрение несправедливым на этапе приближения к стационарному режиму. Поскольку анализ специализирован для случая быстрорелаксирующих активных сред, рассмотрение проведено в рамках адиабатического приближения для разности населенностей активных частиц.

Полученные результаты имеют непосредственное отношение к разработке методов извлечения количественной информации из спектров регистрируемых при помещении исследуемой среды внутрь резонатора лазера [9, 10, 12]. Наиболее существен учет кинетики спектра генерации в случае интегральной по времени регистрации излучения.

1. ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ МОДЕЛИ

Поскольку предметом анализа в данной работе являются спектральные характеристики излучения лазера, задача может решаться в квазиодномерной постановке. Геометрию резонатора иллюстрирует рис. 1. Традиционная система балансных уравнений лазера для системы продольных мод имеет вид

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = (m_k(t) + 1) \left[c\sigma\xi \frac{g_k}{l} \int_{z_1}^{z_2} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi k z}{L} \right) N dz \right] - \gamma_k(t) m_k(t); \quad (1.1)$$

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{N - N^0(z,t)}{T_1} - \frac{2c\sigma}{V_c} N \sum_q g_q m_q(t) \sin^2 \left(\frac{\pi q z}{L} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $m_k(t)$ — число фотонов в k -й моде резонатора, $N(z,t)$ — разность населенностей на единицу объема активной среды, $N^0(z,t)$ — ненасыщенная разность населенностей, задаваемая уровнем накачки, T_1 — время релаксации разности населенностей, g_k — функция формы линии усиления, нормированная таким образом, что в максимуме линии $g_{k_0} = 1$, σ — сечение индуцированного перехода, γ_k^{-1} — время жизни фотона k -й моды, V_c — объем резонатора, $\xi = V_s/V_c$ — коэффициент заполнения, L — длина резонатора, $l = z_2 - z_1$ — длина активного элемента, V_s — его объем.

Для лазеров с быстрорелаксирующими активными средами характерно соотношение времен $T_1 \ll \gamma_k^{-1}$ ($\gamma_k^{-1} \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$ с, $T_1 \sim 10^{-9}$ с). Это позволяет воспользоваться адиабатическим приближением, т. е., полагая $dN/dt = 0$, перейти от (1.2) к соотношению

$$N(z,t) = \frac{N^0(z,t)}{1 + \varepsilon \sum_q m_q(t) g_q (1 - \cos 2\pi q z/L)},$$

в котором

$$\varepsilon = c\sigma T_1/V_c. \quad (1.3)$$

Подобно [2, 3] ограничимся учетом только линейного по энергии поля члена в разложении разности населенностей:

$$N(z,t) = \frac{N^0(z,t)}{1 + \varepsilon \sum_q g_q m_q(t)} \left[1 + \frac{\varepsilon \sum_q g_q m_q(t) \cos(2\pi q z/L)}{1 + \varepsilon \sum_q g_q m_q(t)} \right].$$

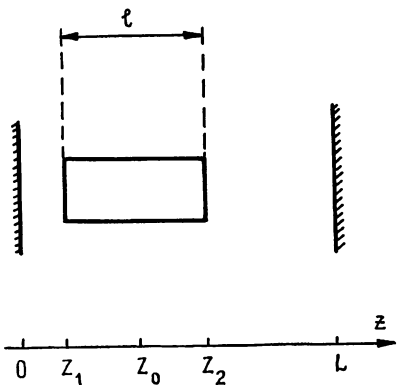


Рис. 1.

Воспользовавшись последним равенством, можно исключить $N(z, t)$ из числа переменных и свести (1.2), (1.3) к уравнениям только для чисел фотонов

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = (m_k(t) + 1) \frac{2c\sigma\xi}{l [1 + \varepsilon M(t)]} \int_{z_1}^{z_2} N^0(z, t) \sin^2(\pi kz/L) \left[1 + \frac{\varepsilon \sum_q g_q m_q(t) \cos(2\pi qz/L)}{1 + \varepsilon M(t)} \right] dz - \gamma_k(t) m_k(t), \quad (1.4)$$

где

$$M(t) = \sum_q g_q m_q(t). \quad (1.5)$$

Предположение о пространственной однородности накачки в пределах активной среды позволяет вынести в (1.4) $N^0(t)$ из-под знака интеграла и затем осуществить интегрирование оставшегося выражения. Поскольку в реальных условиях $\lambda/l \ll 1$, можно пренебречь интегралами от функций, быстро осциллирующих в пространстве, вклад от которых имеет порядок величины λ/l . В итоге (1.4) сводится к следующему выражению:

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = (m_k(t) + 1) \frac{c\sigma\xi g_k N^0(t)}{1 + \varepsilon M(t)} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon M(t)} \sum_q g_q m_q(t) \frac{\sin \pi(k-q)l/L}{\pi(k-q)l/L} \cos \frac{2\pi(k-q)z_0}{L} \right] - \gamma_k(t) m_k(t), \quad (1.6)$$

где через z_0 обозначена координата центра активного элемента. На нестационарной стадии развития генерации действует ряд факторов, способствующих упрощению уравнений (1.4). По истечении времени порядка $(g_k c\sigma\xi N^0 - \gamma_k)^{-1}$ [8] с момента достижения порога генерации число фотонов в генерирующих модах $m_q \gg 1$, что дает возможность пренебречь влиянием спонтанного излучения. Малость параметра ε (для лазеров на красителях $\varepsilon \sim 10^{-11} \div 10^{-15}$) позволяет игнорировать на этой стадии пространственную неоднородность насыщения, активной среды, которую учитывает второе слагаемое выражения, заключенного в (1.6) в квадратные скобки. При больших t , когда процесс генерации приближается к стационарному, учет указанных факторов становится необходимым, поскольку ими определяется форма устанавливающегося спектра. Таким образом, уравнения, справедливые на нестационарном этапе многомодовой генерации, продолжительность которого будет оценена ниже (см. (3.12), (3.13)) принимают вид

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = m_k(t) \left[\frac{c\sigma\xi g_k N^0(t)}{1 + \varepsilon M(t)} - \gamma_k(t) \right]. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.7) позволяют найти выражение, связывающее числа фотонов в двух разных модах, одну из которых можно зафиксировать в качестве эталонной, подобно тому, как это предложено в [1]. С этой целью следует вначале преобразовать (1.7) в

$$g_n \frac{d \ln m_k(t)}{dt} - g_k \frac{d \ln m_n(t)}{dt} = g_k \gamma_n(t) - g_n \gamma_k(t),$$

а затем проинтегрировать это уравнение:

$$m_k(t) = m_k(0) \left[\frac{m_n(t)}{m_n(0)} \right]^{g_k/g_n} \exp \left\{ \int_0^t \left[\gamma_n(t') \frac{g_k}{g_n} - \gamma_k(t') \right] dt' \right\}. \quad (1.9)$$

В силу малости T_1 можно считать, что все возбуждающиеся моды достигают порога одновременно.

2. ДИНАМИКА ЭТАЛОННОЙ МОДЫ

Благодаря тому, что параметр ε очень мал, на ранней стадии развития генерации $\varepsilon M(t) \ll 1$ и член $\varepsilon M(t)$ можно вообще не учитывать. В этом случае уравнения (1.7) имеют решение

$$m_k(t) = m_k(0) \exp \left\{ \int_0^t [c\sigma\xi N^0(t') g_k - \gamma_k(t')] dt' \right\}. \quad (2.1)$$

На более поздних стадиях рассмотрение заметно усложняется, и здесь чрезвычайно полезным оказывается выделение эталонной моды, поведение которой однозначно определяет, согласно (1.8), эволюцию всего спектра мод.

Изменение интенсивности эталонной моды во времени подчиняется уравнению (1.7) с $k=n$, из которого с помощью (1.8) исключаются все другие $m_k(t)$:

$$\frac{dm_n(t)}{dt} = m_n(t) \left[\frac{c\sigma\xi g_n N^0(t)}{1 + \varepsilon M_n(t)} - \gamma_n(t) \right]. \quad (2.2)$$

Величина

$$M_n(t) = \sum_q g_q m_q(0) \left[\frac{m_n(t)}{m_n(0)} \right]^{g_q/g_n} \exp \left\{ \int_0^t \left[\gamma_n(t') \frac{g_q}{g_n} - \gamma_q(t') \right] dt' \right\} \quad (2.3)$$

в отличие от $M(t)$, определяемой формулой (1.5), зависит только от одной переменной $m_n(t)$. Для дальнейшего удобно преобразовать (2.3) к виду

$$M_n(t) = \frac{m_n(t)}{m_n(0)} \sum_q g_q m_q(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[\left(\frac{g_q}{g_n} - 1 \right) \left(\frac{\dot{m}_n(t')}{m_n(t')} + \gamma_n \right) + (\gamma_n - \gamma_q) \right] dt' \right\}. \quad (2.4)$$

Если на стадии экспоненциального роста интенсивности величина $\dot{m}_n(t)/m_n(t)$ может быть сравнима с γ_n (все зависит от N^0), то на последующих стадиях $|\dot{m}_n(t)/m_n(t)| \ll \gamma_n$, и в (2.4) этим членом можно пренебречь. Указанное обстоятельство позволяет представить $M_n(t)$ в виде

$$M_n(t) = m_n(t) F_n(t), \quad (2.5)$$

где

$$F_n(t) = \frac{1}{m_n(0)} \sum_q m_q(0) g_q \exp \left\{ \int_0^t \left[\frac{g_q}{g_n} \gamma_n(t') - \gamma_q(t') \right] dt' \right\} \quad (2.6)$$

не зависит от $m_n(t)$. Конкретный вид $F_n(t)$ для некоторых частных случаев дан в Приложении 1.

С учетом (2.5) и (2.6) уравнение (2.2) преобразуется в уравнение Абеля второго рода

$$\frac{dm_n(t)}{dt} = m_n(t) \left\{ \frac{c\sigma\xi N^0(t) g_n}{1 + \varepsilon m_n(t) F_n(t)} - \gamma_n(t) \right\}, \quad (2.7)$$

которое в общем случае не имеет решения в квадратурах [15]. Поэтому дальнейший анализ удастся лишь в отдельных случаях.

а) *Малое превышение порога генерации:* $\varepsilon M(t) \ll 1$. Разлагая первое слагаемое правой части (2.7) в ряд по степеням $\varepsilon M_n(t)$ и ограничиваясь при этом лишь двумя членами, получаем для переменной $\mu(t) = 1/m_n(t)$ линейное уравнение первого порядка

$$\frac{d\mu}{dt} + A(t)\mu + B(t) = 0 \quad (2.8)$$

с коэффициентами

$$A(t) = g_n c\sigma\xi N^0(t) - \gamma_n(t), \quad B(t) = g_n c\sigma\xi F_n(t) N^0(t).$$

Интегрируя (2.8), получаем в итоге

$$m_n(t) = \frac{m_n(0) \exp \left\{ \int_0^t [c\sigma\xi g_n N^0(t') - \gamma_n(t')] dt' \right\}}{1 + \varepsilon m_n(0) g_n c\sigma\xi \Phi_n(t)}, \quad (2.9)$$

где для компактности записи введено обозначение

$$\Phi_n(t) = \int_0^t F_n(t') N^0(t') \exp \left\{ \int_0^{t'} [g_n c\sigma N^0(\tau) - \gamma_n(\tau)] d\tau \right\} dt'.$$

Формула (2.9) описывает динамику эталонной моды при произвольном законе изменения накачки и потерь в случае относительно небольшого превышения порога.

б) *Неизменная во времени частотная зависимость потерь.* В этом случае величина $\gamma_k(t)$ факторизуется,

$$\gamma_k(t) = \bar{\gamma}_k \kappa(t), \quad (2.10)$$

где $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}_k^c$ — сумма неселективных $\bar{\gamma}^0$ и селективных потерь $\bar{\gamma}_k^c$. Замена переменных $m_n(t) = M_n(t)/F_n(t)$ преобразует (2.7) в уравнение относительно $M_n(t)$:

$$\frac{1}{M_n(t)} \frac{dM_n(t)}{dt} - \frac{1}{F_n(t)} \frac{dF_n(t)}{dt} = \frac{g_n c\sigma\xi N^0(t)}{1 + \varepsilon M_n(t)} - \bar{\gamma}_k \kappa(t). \quad (2.11)$$

Как показано в Приложении 1, часто эталонную моду удается выбрать таким образом, что

$$\lim_{\theta(t) \rightarrow \infty} \dot{F}_n(t)/F_n(t) = 0, \quad (2.12)$$

где $\theta(t) = \int_0^t \kappa(t') dt'$. Для подобной моды слагаемое \dot{F}_n/F_n в уравнении (2.11) при $\theta(t) \gg \gamma_n^{-1}$ пренебрежимо мало,

Обратимся теперь к наиболее простому случаю, когда накачка (после включения) и потери во времени не меняются ($\kappa(t) = 1$). Поскольку $\dot{F}_n(t)/F_n$ отбрасывается, в остающемся уравнении переменные разделяются и достаточно просто находится его интеграл

$$\ln \left\{ \frac{M_n(t)}{M_n(0)} \left[\frac{\varepsilon M_n(0) - W_n + 1}{\varepsilon M_n(t) - W_n + 1} \right]^{W_n} \right\} = \gamma_n (W_n - 1) t, \quad (2.13)$$

где $W_n = c\sigma \xi g_n N^0 / \gamma_n$. Из (2.13) видно (см. также [8]), что при

$$t \gg \ln \left[\frac{\varepsilon (W_n - 1)}{M_n(0)} \right] / \gamma_n (W_n - 1) \quad (2.14)$$

величина $M_n(t)$ стремится к стационарному значению

$$M_n = (W_n - 1) / \varepsilon. \quad (2.15)$$

Вид решения остается таким же и в случае медленно меняющихся потерь или накачки, пока удовлетворяется критерий адиабатичности $\dot{W}_n(t) \ll (W_n(t) - 1) \gamma_n$. Подставляя (2.15) в (2.5), получаем закон изменения числа фотонов в эталонной моде:

$$m_n(t) = \frac{W_n(t) - 1}{\varepsilon F_n(t)}. \quad (2.16)$$

Заметим, что при постоянных N^0 и γ_n формула (2.9) в предельном случае (2.14) совпадает с (2.16).

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА ГЕНЕРАЦИИ ЛАЗЕРА СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Полученные выше соотношения (1.8) вместе с (2.16) и (2.6) решают поставленную задачу в общем виде. На форме мгновенного спектра генерации сказываются, как и следовало ожидать, частотные характеристики активной среды и резонатора, а также закон изменения накачки и потерь во времени. В более наглядном виде результаты удается сформулировать, задавая конкретные зависимости $N^0(t)$ и $\gamma_k(t)$. Ниже анализируется самый простой случай постоянных параметров лазера.

Предположим вначале, что резонатор не обладает селективными свойствами, т. е. потери для всех мод одинаковы: $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}^0$. За эталонную выберем моду с $n = k_0$, соответствующую максимуму лоренцевской линии усиления $g_k = [1 + \Delta^2(k - k_0)^2]^{-1}$, где $\Delta = \Delta\omega / \delta\omega_0 = 10^{-5}$ — отношение межмодового частотного интервала к полуширине линии усиления. В этом случае (1.8) принимает вид

$$m_k(t) = m_k(0) \left[\frac{m_{k_0}(t)}{m_{k_0}(0)} \right]^{g_k} \exp[-\bar{\gamma}^0(1 - g_k)t]. \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что на временах $t > 1/\bar{\gamma}^0$ форма усредненного спектра генерации приближается к гауссовой, сужаясь при этом пропорционально $(\bar{\gamma}^0 t)^{1/2}$.

Интегральная интенсивность излучения достигает квазистационарного значения

$$\sum_k m_k(t) \approx M = (W_{k_0} - 1) / \varepsilon \quad (3.2)$$

за время порядка $\ln[\epsilon M_n^{-1}(0)(W_n-1)]/\gamma_n(W_n-1)$ (20 мкс при выходной мощности 10^{-1} Вт). Спектр же после этого продолжает меняться, и его динамика описывается формулой

$$m_k(t) = \frac{m_k(0) \Delta}{\langle m_{k_0}(0) \rangle} (W_{k_0} - 1) \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}^0 t}{\pi}} \exp[-\Delta^2 (k - k_0)^2 \bar{\gamma}^0 t], \quad (3.3)$$

которая следует из (1.8), (2.16) и (П.6). Это совпадает с результатом работы [8] и описывает наблюдаемое экспериментально поведение спектра [12].

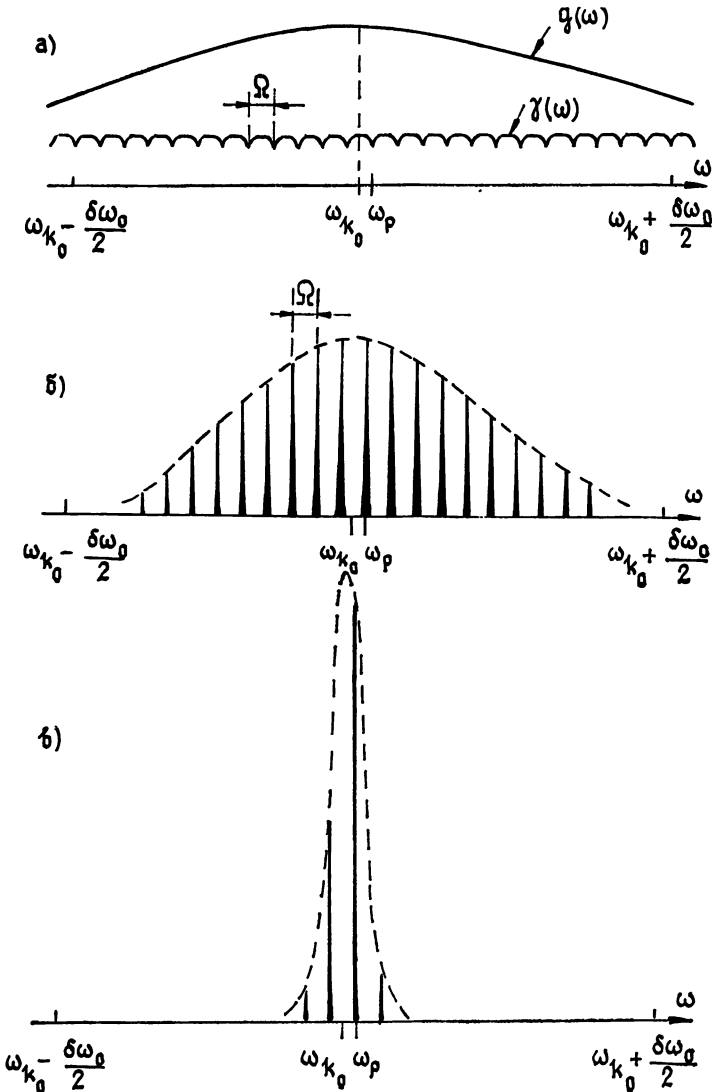


Рис. 2.

Для лазера с остроселективным дисперсионным резонатором, настроенным на центр линии усиления, имеем формулу

$$m_k(t) = \frac{m_k(0) \Delta \omega}{\epsilon \langle m_{k_0}(0) \rangle} (W_{k_0} - 1) \sqrt{\frac{\bar{\gamma}''(\omega_{k_0}) t}{2\pi}} \exp[-(\bar{\gamma}^0 - \bar{\gamma}_k) t], \quad (3.4)$$

которая получается из (1.8), (2.16) и (П.1.7) при $t \gg \ln[\epsilon M_n^{-1}(0) \times (W_n - 1)] / \gamma_n (W_n - 1)$.

Более сложная временная зависимость реализуется в лазере с резонатором, добротность которого является периодической функцией частоты, причем период Ω намного меньше полуширины линии усиления $\delta\omega_0 \sim 10^2 \text{ \AA}$ (рис. 2а). Такие дисперсионные свойства резонатора достигаются, например, при помещении внутрь него интерференционных либо интерференционно-поляризационных фильтров [14]. К подобному результату приводит и пространственная неоднородность распределенных потерь резонатора [2, 4, 13] (использование зеркал с плоскопараллельными подложками толщиной 1 см создают паразитную селекцию с периодом $0,2 \text{ \AA}$).

В начале рассматриваемого этапа, пока

$$t \ll [\bar{\gamma}^0 (\Omega/\delta\omega_0)^2]^{-1},$$

периодическая селекция приводит к тому, что спектр генерирующих мод разбивается на эквидистантно расположенные группы, которых на этом временном интервале достаточно много (рис. 2б). Эволюция спектра заключается в сужении каждого элемента его структуры при сопутствующем уменьшении эффективного числа таких элементов. Этот процесс описывает формула

$$m_k(t) = m_k(0) \left[\frac{(W_p - 1)(\Omega/\delta\omega_0) t \Delta\omega}{\pi \epsilon \langle m_p(0) \rangle} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}''(\omega_p)}{2}} \right]^{g_k} \times \exp[(\bar{\gamma}^0 g_k - \bar{\gamma}_k) t], \quad (3.5)$$

которую можно получить на основании (1.8), (2.16) и (П.1.1), здесь p -индекс моды, попадающей в ближайший к центру линии усиления минимум потерь. Зависимость высоты спектра от времени близка к линейной.

Процесс сужения огибающей приводит при условии

$$t \gtrsim [\bar{\gamma}^0 (\Omega/\delta\omega_0)^2]^{-1}$$

к тому, что общая ширина спектра генерации становится сравнимой с периодом селекции (рис. 2в). Этим условиям отвечает наиболее сложная временная зависимость

$$m_k(t) = \frac{m_k(0) \Delta\omega (W_p - 1)}{\epsilon \langle m_p(0) \rangle} \times \frac{(\bar{\gamma}''(\omega_p) t / 2\pi)^{1/2} \exp[(\bar{\gamma}^0 g_k - \bar{\gamma}_k) t]}{1 + 2 \exp[-(\Omega/\delta\omega_0)^2 \bar{\gamma}^0 t] \operatorname{ch} \left[\frac{2\Omega (\omega_{k_0} - \omega_p) \bar{\gamma}^0 t}{(\delta\omega_0)^2} \right]}, \quad (3.6)$$

которую можно получить, воспользовавшись соотношениями (1.8), (2.16) и (П.1.1). На заключительном этапе эволюции, когда в спектре генерации остается только одна группа мод, формула (3.6) переходит в (3.4).

В заключение произведем оценку интервала времени, на котором роль неоднородности насыщения активной среды пренебрежимо мала. Сделаем это на примере лазера, параметры которого стационарны, а центр активного элемента совмещен с центром резонатора ($z_0 = L/2$).

После того как интегральная интенсивность излучения уже достигла своего стационарного значения $(W_{k_0} - 1)/\epsilon$, систему (1.6) для рассматриваемого случая несложно преобразовать к виду

$$\frac{1}{\gamma_k} \frac{d \ln m_k(t)}{dt} = \frac{W_k}{W_{k_0}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{W_{k_0}} \sum_q g_q m_q(t) (-1)^{k-q} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \pi(k-q) l/L}{\pi(k-q) l/L} \right] - 1.$$

Влиянием пространственной неоднородности насыщения можно пренебрегать до тех пор, пока спектр не слишком близок к установившемуся, т. е. при условии

$$\left| \frac{1}{\gamma_k} \frac{d \ln m_k(t)}{dt} \right| \gg |X_k(t)|, \quad (3.7a)$$

где

$$X_k(t) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon W_k}{(W_{k_0})^2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} g_q m_q(t) (-1)^{k-q} \frac{\sin \pi(k-q) l/L}{\pi(k-q) l/L}. \quad (3.7b)$$

В частном случае неселективных потерь из (3.3) получаем

$$\frac{1}{\bar{\gamma}^0} \frac{d \ln m_k(t)}{dt} = \frac{1}{2\bar{\gamma}^0 t} - \Delta^2 (k - k_0)^2. \quad (3.8)$$

Из рис. 3 видно, что в каждый момент времени критерий (3.7a) не выполняется для мод с индексами k в интервале $k_1 < k < k_2$, границы которого определяются из уравнений

$$(2\bar{\gamma}^0 t)^{-1} - \Delta^2 (k_{1,2} - k_0)^2 = \pm |X_{k_{1,2}}(t)|. \quad (3.9)$$

Результаты проведенного выше анализа, базирующиеся на системе уравнений (1.7), справедливы до тех пор, пока $\delta k = k_2 - k_1 \ll k_2 - k_0$. С учетом того, что при $\delta k \ll k_2 - k_0$ имеет место $(k_1 - k_0) + (k_2 - k_0) \approx \approx 2(k_2 - k_0) \approx 2/\Delta \sqrt{2\bar{\gamma}^0 t}$ и $|X_{k_1}| \approx \approx |X_{k_2}|$, данное неравенство можно переписать в виде

$$\delta k / (k_2 - k_0) \approx \approx |X_{k_2}(t)| (2\bar{\gamma}^0 t) \ll 1 \quad (3.10)$$

В предельном случае равномерного заполнения резонатора активной средой ($l=L$)

$$|X_{k_2}(t)| = \frac{1}{2} \epsilon m_{k_2}(t) (g_{k_2}/g_{k_0})^2 \approx \frac{1}{2} \epsilon m_{k_2}(t), \quad (3.11)$$

где $m_{k_2}(t)$ определяется формулой (3.3). В итоге (3.10) приобретает вид

$$(\bar{\gamma}^0 t)^{3,2} \ll [(W_{k_0} - 1) \Delta]^{-1}, \quad (3.12)$$

откуда $t \ll 10^{-3}$ с, если $\bar{\gamma}^0 = 10^7$ с $^{-1}$, $\Delta = 10^{-5}$, $W_{k_0} - 1 = 0,2$,

Для другого важного предельного случая, когда активная среда имеет форму тонкой струи, величина $|X_{k_0}(t)|$ оценена в Приложении 2. С помощью (П.16) преобразуем (3.10) к виду

$$(\bar{\gamma}^0 t)^{1/2} \ll 1/(W_{k_0} - 1) \Delta^5 \quad (3.13)$$

и, задав указанные выше значения $\bar{\gamma}^0$ и Δ , а также $W_{k_0} - 1 = 2 \cdot 10^{-1}$, найдем, что неоднородностью насыщения можно пренебречь при $t \ll 3c$. Это означает, что длительность нестационарного этапа для струйного лазера составляет несколько секунд. За это время спектр успевает сузиться до нескольких десятков мод.

Авторы выражают признательность Г. М. Жислину за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Исследуем асимптотическое поведение функции

$$F_n(t) = \frac{1}{m_n(0)} \sum_q g_q m_q(0) \exp \left[\left(\frac{g_q}{g_n} \bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}_q \right) \theta(t) \right] \quad (\text{П.1.1})$$

при больших значениях $\theta(t) = \int_0^t \kappa(t') dt'$. Если число генерирующих

мод велико, а именно эта ситуация анализируется в данной работе, можно от дискретного распределения фотонов по модам перейти к непрерывной характеристике — спектральной плотности излучения, введя ее как усредненную по некоторому частотному интервалу $J\Delta\omega$ величину

$$\rho(t, \omega) = \sum_{j=l-J/2}^{l+J/2} \frac{m_j(t)}{J\Delta\omega} \equiv \frac{\langle m_l(t) \rangle}{\Delta\omega}. \quad (\text{П.1.2})$$

Интервал усреднения $J\Delta\omega$ должен браться малым по сравнению со всеми характерными масштабами спектра генерации, но большим по сравнению с $\Delta\omega$.

Введение спектральной плотности позволяет заменить в (П.1.1) суммирование интегрированием:

$$F_n(t) = m_n^{-1}(0) \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \rho(0, \omega) \exp[-h_n(\omega)\theta(t)] d\omega, \quad (\text{П.1.3})$$

где $h_n(\omega) = \gamma(\omega) - \gamma(\omega_n)g(\omega)/g(\omega_n)$. Поскольку под знаком интеграла стоит усредненная по группе близких мод спектральная плотность, флуктуационный характер начальных условий сохраняется только в предынтегральном множителе $m_n(0)$.

Примененный далее прием приближенного вычисления, именуемый методом Лапласа [16], основан на том, что при $\gamma(\omega)\theta(t) \gg 1$ функция $\exp[-h_n(\omega)\theta(t)]$ быстро спадает по мере удаления от точек максимумов функции $h_n(\omega)$. Окрестности максимумов $h_n(\omega)$ вносят, таким образом, основной вклад в интеграл (П.1.3). Оценивая этот вклад, можно ограничиться низшими членами разложения $h_n(\omega)$ в ряд Тейлора. Быстрое спадание подынтегральной функции дает также возможность удалить пределы интегрирования в бесконечность. При плавном распределении $\rho(0, \omega)$ в окрестностях максимумов функции $h_n(\omega)$ указанный путь приводит от (П.1.3) к выражению

$$F_n(t) = \frac{1}{m_n(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta(t)}} \sum_s \frac{g(\omega^{(s)}) \rho(0, \omega^{(s)})}{[h_n''(\omega^{(s)})]^{1/2}} \exp[h_n(\omega^{(s)}) \theta(t)], \quad (\text{П.1.4})$$

в котором $\omega^{(s)}$ — координата s -го максимума функции $h_n(\omega)$,

$$h_n''(\omega^{(s)}) = \left[\frac{\bar{\gamma}(\omega_n)}{g(\omega_n)} \frac{\partial^2 g(\omega)}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \bar{\gamma}(\omega)}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\omega^{(s)}}. \quad (\text{П.1.5})$$

На трех конкретных примерах исследуем асимптотику $F_n(t)$ для лазеров со стационарными потерями $\kappa(t) = 1$.

а) *Резонатор лазера не обладает селективными свойствами*, т. е. все аксиальные моды обладают равными потерями. Функция $h_n(\omega)$ имеет единственный максимум на центральной частоте линии усиления: $\omega^{(1)} = \omega_{k_0}$. В качестве эталонной моды удобно выбрать моду, попадающую в центр линии усиления, т. е. моду с индексом k_0 , в этом случае будет выполнено условие (2.12). Тогда $h_{k_0}''(\omega^{(1)}) = -g''(\omega_{k_0}) = -2(\delta\omega_0)^2$ и (П.1.4) сводится к

$$F_{k_0}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\bar{\gamma}^0 t}} \rho(0, \omega_{k_0}) \frac{\delta\omega_0}{m_{k_0}(0)}. \quad (\text{П.1.6})$$

б) *Остроселективный дисперсионный резонатор* выделяет единственную группу мод. Функция $h_n(\omega)$, так же как и в предыдущем случае, обладает одним экстремумом, приходящимся теперь на минимум потерь резонатора. Эталонная мода выбирается из условия $\bar{\gamma}'(\omega) = 0$ и

$$F_{n_0}(t) = \frac{g(\omega_{n_0}) \rho(0, \omega_{n_0})}{m_{n_0}(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\gamma}''(\omega_{n_0}) t}}. \quad (\text{П.1.7})$$

Легко видеть, что в этом случае также имеет место (2.12).

в) *Дисперсионный резонатор с периодической по спектру селекцией мод*: $\bar{\gamma}(\omega_k) = \bar{\gamma}(\omega_k + \Omega)$, причем $\Omega \ll \delta\omega_0$. За эталонную возьмем моду с индексом p , которой соответствует минимум потерь, ближайший к центру линии усиления. В силу $\Omega \ll \delta\omega_0$ ясно, что $g^{-1}(\omega_p) g''(\omega^{(s)}) \ll \ll \bar{\gamma}^{-1}(\omega_p) \bar{\gamma}''(\omega^{(s)})$. Действуя в духе изложенного выше подхода, получаем из (П.1.4) и (П.1.5)

$$F_p(t) = [G_p(t)/m_p(0)] \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\gamma}''(\omega_p) t}}, \quad (\text{П.1.8})$$

где

$$G_p(t) = \sum_s \rho(0, \omega^{(s)}) g(\omega^{(s)}) \exp[\bar{\gamma}^0 t (g(\omega^{(s)})/g(\omega_p) - 1)] \quad (\text{П.1.9})$$

и

$$\omega^{(s)} = \omega_p + s\Omega.$$

До тех пор пока общая ширина спектра генерации велика по сравнению с периодом селекции, $(\Omega/\delta\omega_0)^2 \ll (\bar{\gamma}^0 t)^{-1}$, имеем

$$G_p(t) \approx \rho(0, \omega_p) \sqrt{\pi/\bar{\gamma}^0 t \Omega^2 (\delta\omega_0)^{-2}}. \quad (\text{П.1.10})$$

Подстановка (П.1.10) в (П.1.8) дает убывание функции $F_p(t)$, обратно пропорциональное t . Когда же ширина спектра становится сравнимой с периодом селекции, $(\Omega/\delta\omega_0)^2 \gtrsim (\bar{\gamma}^0 t)^{-1}$, имеем из (П.1.8)

$$\begin{aligned} G_p(t) \approx \rho(0, \omega_p) \left\{ 1 + 2 \exp \left[-\bar{\gamma}^0 t \left(\frac{\Omega}{\delta \omega_0} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \operatorname{ch} \left[\frac{2\Omega(\omega_{k_0} - \omega_p)}{(\delta \omega_0)^2} \bar{\gamma}^0 t \right] \end{aligned} \quad (\text{П.1.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим функцию $|X_{k_2}(t)|$ (см. (3.76)) для случая тонкой активной среды $l/L \ll 10^{-4}$, расположенной в центре резонатора. Как известно [17], сумма членов знакопеременного ряда в $|X_{k_2}(t)|$ не превосходит максимального слагаемого, поэтому

$$|X_{k_2}(t)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{W_{k_2}}{W_{k_0}^2} g_{k_0} \langle m_{k_0}(t) \rangle \simeq (W_{k_0} - 1) (\bar{\gamma}^0 t \Delta^2)^{1/2}. \quad (\text{П.2.1})$$

Исходя из этой оценки сверху, можем убедиться, аналогично тому, как это делалось в случае равномерного заполнения резонатора активной средой, что условие $\delta k / (k_2 - k_0) \ll 1$ выполняется по крайней мере до момента $t \approx 10^{-3}$ с. Что же касается времени $t > 10^{-3}$ с, то, как видно из (3.3), основной вклад в сумму (3.76) дадут слагаемые с $q \leq 10^3$, для которых $lq/L \ll 1$. Ограничившись первым членом разложения функции $\sin[\pi l(k_2 - q)/L] / \pi l(k_2 - q)/L$ в ряд Тейлора, с учетом (3.3) имеем

$$|X_{k_2}(t)| \simeq A (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^{1/2} \left| \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp[-\Delta^2 (q - k_0)^2 \bar{\gamma}^0 t] (-1)^q \right|, \quad (\text{П.2.2})$$

где

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{g_{k_2}}{g_{k_0}} \frac{(W_{k_0} - 1)}{W_{k_0}} \frac{\sin \pi l k_2 / L}{\pi l k_2 / L} \approx (W_{k_0} - 1) / W_{k_0}.$$

После несложных преобразований имеем

$$|X_{k_2}(t)| \simeq A (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^{1/2} \left| 2 \sum_{s=0}^{\infty} f(s) - 1 \right|, \quad (\text{П.2.3})$$

где

$$f(s) = \exp[-\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t (2s)^2] - \exp[-\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t (2s+1)^2].$$

Используя теорему Эйлера—Маклорена [17], можно записать

$$\sum_{s=0}^{\infty} f(s) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(s) ds \simeq \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \Delta^2 \bar{\gamma}^0 t + \frac{1}{10} (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^2 \right],$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [f(s=0) + f(s=\infty)] \simeq \frac{1}{2} \left[\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t - \frac{1}{2} (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^2 \right],$$

$$I_3 = \frac{1}{12} [f'(s=\infty) - f'(s=0)] \simeq -\frac{1}{3} \Delta^2 \bar{\gamma}^0 t [1 - \Delta^2 \bar{\gamma}^0 t],$$

$$I_4 = \frac{1}{4!} \frac{1}{30} \frac{f^{(4)}(\xi)}{(\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^{1/2}} \simeq (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^{5/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| 2 \sum_{s=0}^{\infty} f(s) - 1 \right| \approx \frac{4}{15} (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^2 + o(\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^2. \quad (\text{П.2.4})$$

Таким образом, из соотношения (П.2.3.), используя (П.2.4), получаем оценку

$$\left| X_{k_2}(t) \right| \approx \frac{1}{10} (W_{k_0} - 1) (\Delta^2 \bar{\gamma}^0 t)^{5/2}. \quad (\text{П.2.5})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer Y. H., Flamant P. — Opt. Commun., 1976, 19, № 1, p. 20.
2. Баев В. М., Беликова Т. П., Свириденков Э. А., Сучков А. Ф. — ЖЭТФ, 1978, 74, № 1, с. 43.
3. Мироненко В. Р. — Квантовая электроника, 1980, 7, № 10, с. 2069.
4. Mironenko V. R., Yudson V. I. — Opt. Commun., 1982, 41, № 2, p. 126.
5. Мироненко В. Р., Юдсон В. И. — Квантовая электроника, 1982, 9, № 11, с. 2234.
6. Brunner W., Paul H. — Opt. and Quant. Electron., 1980, 12, № 5, p. 393.
7. Brunner W., Paul H. — Opt. and Quant. Electron., 1982, 14, № 5, p. 453.
8. Мироненко В. Р., Юдсон В. И. — ЖЭТФ, 1980, 79, с. 1174.
9. Беликова Т. П., Свириденков Э. А., Сучков А. Ф. — Квантовая электроника, 1974, 1, № 4, с. 830.
10. Свириденков Э. А., Фролов М. П. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 5, с. 1028.
11. Баев В. М., Беликова Т. П., Коваленко С. А., Свириденков Э. А., Сучков А. Ф. — Квантовая электроника, 1980, 7, № 4, с. 903.
12. Stoechel F., Melieres M.-A., Chenevier M. — J. Chem. Phys., 1982, 76, № 5, p. 2191.
13. Антонов Е. Н., Antsyferov P. S., Kachanov A. A., Koloshnikov V. G. — Opt. Commun., 1982, 41, № 2, p. 131.
14. Анохов С. П., Марусий Т. Я., Соскин М. С. Перестраиваемые лазеры. — М.: Радио и связь, 1982, с. 44.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976, с. 47.
16. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979, с. 12.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969, 2, с. 302, 544.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
5 апреля 1984 г.,
после доработки
16 октября 1984 г

THE KINETICS OF THE RADIATION SPECTRUM OF A MULTIMODE LASER WITH FAST RELAXING ACTIVE MEDIUM

M. S. Gitlin, Ya. I. Khanin

The spectral kinetics of multimode lasers with fast relaxing medium is considered under most general assumptions on dispersion properties of the laser cavity, time behaviour of the pumping and losses, and on the position and dimensions of the laser medium. Study of the balance equations at a nonstationary stage has permitted us to find the form of the mode distribution function of photons and to reduce the spectrum evolution problem to the analysis of the reference mode dynamics. A number of important particular cases (small excess over threshold, dispersion characteristics of the laser cavity) are also considered.