$$|f(\alpha,\beta)| = O\left[\exp\left(\frac{1}{2} k R e^{\mathrm{Im}\,\alpha}\right)\right], \quad \mathrm{Im}\,\alpha \to +\infty,$$

где R есть верхняя грань значений $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ при $g(\boldsymbol{r}) \neq 0$. Поэтому ошибка $F_2(\boldsymbol{r})$, вызываемая отбрасыванием «хвоста» интеграла по η убывает, как $o\left(\exp\left[-\frac{k}{2}(z-z_0)e^b\right]\right)$, очень быстро при увеличении b. Далее, ошибка $f\left(\frac{\pi}{2}+i\eta, \beta\right)$, вызванная конечным значением a, возникает, как следует из доказательства формулы (4), из-за пренебрежения интегралом по контуру γ. Если в качестве контура γ рассматривать окружность радиуса $e^{-\rho} < e^{-b}$, то эту ошибку можно оценить, при $0<\eta<b$, как $o\left(\exp\left[\frac{k}{2} R e^{\rho} + a(e^{-\rho} - e^{-b})\right]\right)$. Нетрудно видеть, что эта оценка минимизируется при $e^{\rho} = [2a/kR]^{1/2}$ и становится $o(\exp[(kRa/2)^{1/2} - ae^{-b}])$. Если, не ограничивая общности, полагать $z>0$, то ошибка $F_2(\boldsymbol{r})$, вызванная конечностью a, может быть оценена так же. Следовательно, для получения достоверного результата необходимо

$$e^b \gg 2/k(z-z_0), \quad a \gg (k/2) R e^{2b}. \tag{6}$$

Естественно, что увеличение b требует увеличения a, но при увеличении a возрастает вызванная невязкой $f(\alpha,\beta)$ ошибка $F_2(\boldsymbol{r})$, которая по модулю меньше

$$\varepsilon = (e^a/z)\delta,$$

где δ есть максимум модуля невязки, $z>0$. Таким образом, точность вычисления $F_2(\boldsymbol{r})$ гарантирована при выполнении условий (6) и если полученное приближенное значение $F_2'\boldsymbol{r})$ по модулю много больше ε. Получить в какой-либо метрике мажорирующие оценки для ошибок, вызванных конечностью a и b, не представляется возможным, поскольку формфактор $f(\alpha,\beta)$ не содержит достаточной информации о функции источника $g(\boldsymbol{r})$. Но поскольку приведенные асимптотические оценки убывают очень быстро, условия (6) можно выполнить не очень сильно. Таким образом, для практического использования результата в качестве априорной информации об источнике необходимы только оценки сверху величин z_0 и R, что весьма естественно, так как его сходимость ухудшается при увеличении z_0 и R.

Автор благодарит М. Л. Левина за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Weston V. H., Bowman J. J., Ergun Ar. — Arch. Pat. Mech. Anal., 1968, **31**, № 3, p. 199.
3. Лаврентьев М А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973
4. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979
6. Кюркчан А. Г. — ДАН СССР, 1985, **275**, № 1, с. 48.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 8 октября 1984 г.

УДК 621.396.677.45

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ПЛОСКОЙ СПИРАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Н. Н. Горобец, А. И. Елисеев, Н. А. Хижняк

При исследовании плоских спиральных антенн методом частичных областей важным является вопрос о правильном выборе вида азимутальной зависимости частных решений уравнений Максвелла с учетом направления намотки витков спирали. В литературе этому вопросу уделено недостаточно внимания [1], а в ряде работ [2–5], посвященных расчету спиральных антенн, влияние знака параметра намотки спирали на поведение получаемых решений не анализируется. В данной работе на примере плоской логарифмической спирали в свободном пространстве обоснован выбор решений с учетом направления намотки витков при различной временной зависимости комплексных амплитуд полей.

Спираль расположена в плоскости $z=0$ цилиндрической системы координат ρ, φ, z, полупространство $z>0$ — область I, $z<0$ — область II. Общие решения уравнений Максвелла для компонент E_z, H_z имеют вид [1]

$$E_z^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} \varkappa f_{nm}(\varkappa) J_n(\varkappa\rho) e^{\pm i\alpha z} d\varkappa,$$
$$H_z^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\varphi} \int_0^{\infty} \varkappa g_{nm}(\varkappa) J_n(\varkappa\rho) e^{\pm i\alpha z} d\varkappa, \quad (1)$$

где $\alpha=\sqrt{k^2-\varkappa^2}$, $k=\omega/c$, $m=1, 2$ — номер частичной области, $J_n(\varkappa\rho)$ — функция Бесселя, $f_{nm}(\varkappa)$, $g_{nm}(\varkappa)$ — неизвестные функции, которые на интервале $[0; \infty]$ должны быть непрерывными или иметь особенность типа $(\varkappa-\varkappa_0)^{-p}$, где $p<1$ для абсолютной сходимости несобственных интегралов (1).

Из граничных условий на спирали следует система дифференциальных уравнений для $f_{n1}(\varkappa)$, $g_{n1}(\varkappa)$, общее решение которой имеет вид [3]

$$f_{n1}(\varkappa) = C_n U_n(\varkappa) + D_n V_n(\varkappa),$$
$$g_{n1}(\varkappa) = -iC_n U_n(\varkappa) + iD_n V_n(\varkappa), \quad (2)$$

где

$$U_n(\varkappa) = (a\alpha+ik)^{in/a-1}[(k-\alpha)/\varkappa]^n; \quad (3)$$
$$V_n(\varkappa) = (a\alpha-ik)^{in/a-1}[(k-\alpha)/\varkappa]^{-n}, \quad (4)$$

C_n, D_n — постоянные интегрирования, a — параметр намотки спирали, описываемой уравнением $\rho=\rho_0 e^{a\varphi}$.

При выборе частных решений для $f_{n1}(\varkappa)$, $g_{n1}(\varkappa)$ необходимо исходить из следующих физических соображений. Точки $\varkappa=\pm k$ являются точками ветвления подынтегральных функций (1) в комплексной $\varkappa$-плоскости. Поэтому, чтобы значения интегралов (1) были однозначными, необходимо предварительно выбрать определенный лист поверхности Римана на комплексной плоскости, учитывая условия излучения на бесконечности. Если зависимость полей от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$, то в (1) следует брать знак плюс, если $z>0$, знак минус, если $z<0$, а контуры интегрирования проводятся через точки ветвления так, чтобы

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{k^2-\varkappa^2} & \text{для } 0\leqslant\varkappa\leqslant k \\ i\sqrt{\varkappa^2-k^2} & \text{для } \varkappa>k \end{cases}, \quad (5)$$

что соответствует излучению в направлении от структуры.

Исследуем функции $U_n(\varkappa)$, $V_n(\varkappa)$ на непрерывность, учитывая условие (5) и знак параметра a, определяющий направление намотки витков спирали. Если спираль имеет правую намотку, то $a>0$. На основании (5) функция $V_n(\varkappa)$ в этом случае имеет особенность типа $(\varkappa-\varkappa_0)^{-1}$ при $\varkappa=\varkappa_0=k\sqrt{1+a^{-2}}$, а несобственный интеграл от $V_n(\varkappa)$ расходится. Функция $U_n(\varkappa)$ непрерывна и ограничена при $n>0$, а при $n<0$ имеет в точке $\varkappa=0$ бесконечный разрыв. Следовательно, если $a>0$, то при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ частные решения для $f_{n1}(\varkappa)$, $g_{n1}(\varkappa)$ имеют вид

$$f_{n1}(\varkappa) = C_n U_n(\varkappa), \quad g_{n1}(\varkappa) = -iC_n U_n(\varkappa), \quad n=1, 2, \ldots, \quad (6)$$

а в решениях (1) необходимо брать только слагаемые с положительными n. Для спирали левой намотки ($a<0$) в силу условия (5) непрерывной является только функция $V_n(\varkappa)$ при $n<0$. В этом случае,

$$f_{n1}(\varkappa) = D_n V_n(\varkappa), \quad g_{n1}(\varkappa) = iD_n V_n(\varkappa), \quad n=-1, -2, \ldots, \quad (7)$$

изменение полей по φ имеет вид $e^{-i|n|\varphi}$, а в решениях (1) суммирование проводится только по отрицательным n.

Если временная зависимость полей выбрана в виде $e^{i\omega t}$, то в (1) знак минус соответствует $z>0$, знак плюс — $z<0$, а контур интегрирования по $\varkappa$ проводится так, чтобы

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{k^2-\varkappa^2} & \text{для } 0\leqslant\varkappa\leqslant k \\ -i\sqrt{\varkappa^2-k^2} & \text{для } \varkappa>k \end{cases}. \quad (8)$$

Исследуя функции $U_n(\varkappa)$, $V_n(\varkappa)$ на непрерывность с учетом (8), получим, что в этом случае по закону $e^{in\varphi}$, $n>0$ изменяется поле спирали с левой намоткой витков, для которой $f_{n1}(\varkappa)$, $g_{n1}(\varkappa)$ определяются выражениями (6). Поле спирали правой намотки изменяется по φ, как $e^{-i|n|\varphi}$, а $f_{n1}(\varkappa)$, $g_{n1}(\varkappa)$ определяются выражениями (7).

Обобщая полученные результаты, приходим к следующим выводам. Спиральная антенна с правой намоткой витков излучает поле, фаза которого в зависимости от t и φ изменяется по закону

$$\Phi_1(t, \varphi) = \mathrm{Re}\, e^{\pm i(\omega t - n\varphi + \psi_1)} = \cos(\omega t - n\varphi + \psi_1), \quad n>0. \tag{9}$$

Изменение фазы поля, излучаемого спиралью левой намотки, происходит по закону

$$\Phi_2(t, \varphi) = \mathrm{Re}\, e^{\pm i(\omega t + n\varphi + \psi_2)} = \cos(\omega t + n\varphi + \psi_2), \quad n>0. \tag{10}$$

Так как вращение векторов поля происходит в направлении запаздывания фазы [6], то из (9), (10) следует, что направление вращения векторов поля плоской спиральной антенны совпадает с направлением намотки витков спирали. Этот вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований конических спиральных антенн, приведенных в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамзей В. Частотно-независимые антенны. — М: Мир, 1968. — 176 с.
2. Гошин Г. Г., Горощеня А. Б. — Радиотехника и электроника, 1967, 12, № 5, с. 937.
3. Елисеев А. И., Хижняк Н. А. —Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 8, с. 1205.
4. Горощеня А. Б. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 4, с. 682.
5. Горобец Н. Н., Елисеев А. И., Лытов Ю. В., Носенко О. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 8, с. 1027.
6. Дайсон Д., Мейс П. — В сб. Сверхширокополосные антенны. — М.: Мир, 1964, с. 74.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 24 июля 1984 г.

УДК 539.293.011.253

ПОПЕРЕЧНЫЙ ЭЛЕКТРОДИФФУЗИОННЫЙ ПЕРЕНОС НОСИТЕЛЕЙ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Э. М. Эпштейн

В работах [1, 2] было показано, что сильное переменное электрическое поле существенно влияет на диффузию носителей в полупроводнике, увеличивая расстояние от источника, на котором можно обнаружить неравновесные носители. В [1, 2] переменное электрическое поле предполагалось параллельным (одномерному) диффузионному потоку. В настоящей работе мы рассмотрим более общий случай, когда переменное электрическое поле образует произвольный угол с направлением диффузии. Как будет видно, при этом возникают новые эффекты — появление постоянного электрического тока в направлении, перпендикулярном к диффузионному потоку, и осцилляционная пространственная зависимость плотности этого тока.

Рассмотрим диффузию неравновесных неосновных носителей из плоского источника заданной мощности Q (неравновесные носители могут возбуждаться, например, узкой полоской света, падающего на поверхность полупроводниковой пластины и проникающего на всю ее толщину). Однородное переменное электрическое поле образует угол φ с плоскостью источника. В пренебрежении краевыми эффектами (например, поверхностной рекомбинацией на гранях пластины) диффузия неравновесных неосновных носителей (электронов проводимости) описывается уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \mu \boldsymbol{E}(t)\,\nabla n - \frac{n}{\tau} + Q\delta(x) \tag{1}$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Здесь n, D, μ, τ — соответственно концентрация, коэффициент диффузии, подвижность и время жизни электронов $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\Omega t$ — приложенное электрическое поле, ось x направлена перпендикулярно к плоскости источника (в направлении градиента концентрации). В дальнейшем будем полагать $\boldsymbol{E}_0 = \{E_{0x}, E_{0y}, 0\}$.

Установившееся $(t \to \infty)$ решение уравнения (1), найденное стандартным образом с использованием фурье-разложения по координатам, имеет вид [1]

$$n(x, t) = \frac{Q}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \frac{J_{m+l}(aq)\, J_m(aq)\, e^{il\Omega t}}{Dq^2 + \tau^{-1} - im\Omega}, \tag{2}$$