Здесь полная энергия элементарного возмущения пропорциональна длительности пребывания $\theta$. В [8–10] подобным актом является захват и освобождение носителя тока центром рекомбинации. Полная энергия элементарного флуктуационного акта не зависит от величины времени релаксации, а определяется лишь элементарным зарядом. Поэтому для получения спектра типа (1) в моделях [8–10] удельный вклад медленных процессов должен быть выше, чем в [1], что и нашло отражение в (4) (см. также рис. 1).

Случайность энергии активации диффузии может быть обусловлена тепловыми колебаниями решетки, а также наличием других структурных несовершенств. Однако вопрос о виде распределения энергий активации до сих пор в литературе, по-видимому, не рассматривался. Поэтому распределение (4), равно как и распределения, предложенные в [8–10], является гипотетическим.

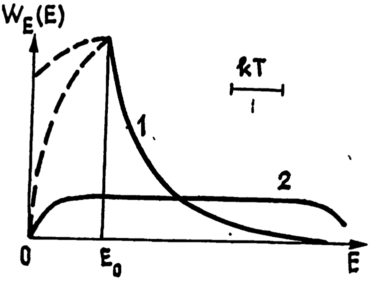

Рис. 1.

Результат, аналогичный (4), предложен в [11], где, однако, тоже не конкретизировались физические механизмы, приводящие к такому виду распределения.

Автор благодарен А. Н. Малахову и М. Е. Герценштейну за полезное обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Якимов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 2, с. 238.
2. Halford D. — Proc. IEEE, 1968, **56**, № 3, p. 251.
3. Дубков А. А., Якимов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 10, с. 1235.
4. Якимов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 3, с. 308; 1984, **27**, № 1, с. 120; Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1983, **26**, № 11, с. 68.
5. Кревский М. А., Якимов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 12, с. 1552.
6. Болтакс Б. И. Диффузия в полупроводниках. — М.: Физматгиз, 1961.—462 с.
7. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961. — 559 с.
8. Van der Ziel A. — Physica, 1950, **16**, № 4, p. 539.
9. Du Pre F. K. — Phys. Rev., 1950, **78**, № 5, p. 615.
10. Dutta P., Dimon P., Horn P. M. — Phys. Rev. Lett., 1979, **43**, № 9, p. 646.
11. Вайнштейн Л. А., Рождественский В. В. — ЖЭТФ, 1984, **87**, № 6, с. 2142.


Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 4 октября 1984 г.

---

УДК 537.876.2

# ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ТОКОВ ЧЕРЕЗ АСИМПТОТИКУ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

*А. В. Масюков*

Представление Вейля—Зоммерфельда волнового поля в виде интеграла по плоским волнам, как и представление Рэлея в виде ряда по сферическим волнам, входит в активный арсенал для решения задач дифракции и обратных задач рассеяния. В связи с неустойчивостью этих представлений приобретает интерес предлагаемое упрощение представления Вейля—Зоммерфельда.

Для простоты изложения рассматриваем скалярное монохроматическое поле

$$F(\boldsymbol{r}) = \int d\ \boldsymbol{r}' g(\boldsymbol{r}') \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

где $k>0$, функция источника $g(\boldsymbol{r})$ предполагается финитной и абсолютно интегрируемой. Как известно, поле $F(\boldsymbol{r})$ в дальней зоне определяется, с точностью до $O(|\boldsymbol{r}|^{-2})$, формфактором

$$f(\alpha, \beta) = \int d^3 r g(\boldsymbol{r}) \exp[ikq(\boldsymbol{r}, \alpha, \beta)], \tag{1}$$

где $q(\boldsymbol{r},\alpha,\beta) = (x\cos\beta + y\sin\beta)\sin\alpha + z\cos\alpha$, здесь и далее $x, y, z$ есть декартовы координаты вектора $\boldsymbol{r}$. С помощью представления Вейля—Зоммерфельда [1] поле $F(\boldsymbol{r})$ может быть выражено через $f(\alpha,\beta)$ всюду вне выпуклой области, снаружи которой $g(\boldsymbol{r}) = 0$. Пусть $z_0$ есть верхняя грань аппликат множества точек, на котором $g(\boldsymbol{r}) \neq 0$, тогда, при $z > z_0$,

$$F(\boldsymbol{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(\alpha,\beta)\exp[-ikq(\boldsymbol{r},\alpha,\beta)]\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta + F_2(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

где

$$F_2(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{2\pi}\int_0^{\infty} d\eta \operatorname{ch}\eta \int_0^{2\pi} \exp[-ik(x\cos\beta + y\sin\beta)\operatorname{ch}\eta - kz\operatorname{sh}\eta] f\left(\frac{\pi}{2} + i\eta, \beta\right) d\beta. \tag{3}$$

Аналитическое продолжение $f(\alpha,\beta)$ в формуле (3) предполагается осуществленным с помощью ряда Фурье этой функции [2], но может быть проведено более эффективно. А именно, нетрудно показать, пользуясь интегральной формулой Коши [3], что $2\pi$-периодическая функция может быть продолжена на верхнюю полуплоскость следующим образом:

$$f(\alpha,\beta) = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_{|\zeta|=1} - \oint_{|\zeta|<|e^{i\alpha}|}\right\} d\zeta \frac{f(-i\ln\zeta,\beta)}{\zeta - e^{i\alpha}}\exp[a(\zeta - e^{i\alpha})e^{-i\operatorname{Re}\alpha}] =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{f(\varphi,\beta)}{e^{i\varphi} - e^{i\alpha}}\exp[i\varphi + a(e^{i\varphi} - e^{i\alpha})e^{-i\operatorname{Re}\alpha}], \quad \operatorname{Im}\alpha < 0. \tag{4}$$

Действительно, функция $f(-i\ln\zeta,\beta)$ регулярна по $\zeta$ на комплексной плоскости с выколотым началом координат, так как $f(\alpha,\beta)$, как следует из (1), целая и $2\pi$-периодическая по $\alpha$ функция, а входящий в выкладки интеграл по контуру $\gamma$, $|\zeta| < |e^{i\alpha}|$, в пределе $a\to+\infty$ обращается в нуль, так как на контуре $\gamma$ выполняется

$$\operatorname{Re}[(\zeta - e^{i\alpha})e^{-i\operatorname{Re}\alpha}] < 0.$$

В идейном отношении результат (4) совпадает с формулой Голузина и Крылова [4]. Заметим, что он может быть представлен в виде

$$f(\alpha,\beta) = \frac{e^{-i\operatorname{Re}\alpha}}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\beta)\exp[i\varphi + \xi(e^{i\varphi} - e^{i\alpha})e^{-i\operatorname{Re}\alpha}]\, d\varphi\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\beta)\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{i\alpha}}\, d\varphi, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0,$$

так как последний интеграл, как и предел (4), сходится. Подставляя (4) в (3), имеем

$$F_2(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} d\eta \operatorname{ch}\eta \exp[-ik(x\cos\beta + y\sin\beta)\operatorname{ch}\eta - kz\operatorname{sh}\eta] \times$$

$$\times \lim_{a\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi,\beta)}{e^{i\varphi} - ie^{-\eta}}\exp[i\varphi + a(-ie^{i\varphi} - e^{-\eta})]\, d\beta\, d\varphi. \tag{5}$$

Задача аналитического продолжения является некорректной [5], и представление (2), (3) и его замкнутая форма (2), (5) неустойчивы и, в общем случае, расходятся даже на классе бесконечно дифференцируемых функций. Ясно, что регуляризации требует только $F_2(\boldsymbol{r})$. Естественной регуляризацией решения является определение отрезка интегрирования $0 < \eta < b$ и значения $a$, которыми следует ограничиться в формуле (5) при известной невязке заданных значений $f(\alpha,\beta)$ для получения требуемой точности результата. Как известно (см., например, [6]), из (1) следует

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2} + i\eta, \beta\right)\right| = O\left[\exp\left(\frac{1}{2}kz_0 e^{\eta}\right)\right], \quad \eta\to+\infty,$$

$$|f(\alpha,\beta)| = O\left[\exp\left(\frac{1}{2}\,k\,Re^{\operatorname{Im}\alpha}\right)\right],\quad \operatorname{Im}\alpha \to +\infty,$$

где $R$ есть верхняя грань значений $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ при $g(r) \neq 0$. Поэтому ошибка $F_2(r)$, вызываемая отбрасыванием «хвоста» интеграла по $\eta$ убывает, как $o\left(\exp\left[-\frac{k}{2}(z-z_0)e^b\right]\right)$, очень быстро при увеличении $b$. Далее, ошибка $f\left(\frac{\pi}{2}+ +i\eta, \beta\right)$, вызванная конечным значением $a$, возникает, как следует из доказательства формулы (4), из-за пренебрежения интегралом по контуру $\gamma$. Если в качестве контура $\gamma$ рассматривать окружность радиуса $e^{-\rho} < e^{-b}$, то эту ошибку можно оценить, при $0<\eta<b$, как $o\left(\exp\left[\frac{k}{2}Re^{\rho} + a(e^{-\rho} - e^{-b})\right]\right)$. Нетрудно видеть, что эта оценка минимизируется при $e^{\rho} = [2a/kR]^{1/2}$ и становится $o(\exp[(kRa/2)^{1/2} - ae^{-b}])$. Если, не ограничивая общности, полагать $z>0$, то ошибка $F_2(r)$, вызванная конечностью $a$, может быть оценена так же. Следовательно, для получения достоверного результата необходимо

$$e^b \gg 2/k(z-z_0),\quad a \gg (k/2)Re^{2b}. \qquad (6)$$

Естественно, что увеличение $b$ требует увеличения $a$, но при увеличении $a$ возрастает вызванная невязкой $f(\alpha,\beta)$ ошибка $F_2(r)$, которая по модулю меньше

$$\varepsilon = (e^a/z)\delta,$$

где $\delta$ есть максимум модуля невязки, $z>0$. Таким образом, точность вычисления $F_2(r)$ гарантирована при выполнении условий (6) и если полученное приближенное значение $F_2'r)$ по модулю много больше $\varepsilon$. Получить в какой-либо метрике мажорирующие оценки для ошибок, вызванных конечностью $a$ и $b$, не представляется возможным, поскольку формфактор $f(\alpha,\beta)$ не содержит достаточной информации о функции источника $g(r)$. Но поскольку приведенные асимптотические оценки убывают очень быстро, условия (6) можно выполнить не очень сильно. Таким образом, для практического использования результата в качестве априорной информации об источнике необходимы только оценки сверху величин $z_0$ и $R$, что весьма естественно, так как его сходимость ухудшается при увеличении $z_0$ и $R$.

Автор благодарит М. Л. Левина за полезное обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Weston V. H., Bowman J. J., Ergun Ar. — Arch. Pat. Mech. Anal., 1968, **31**, № 3, p. 199.
3. Лаврентьев М А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973
4. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979
6. Кюркчан А. Г. — ДАН СССР, 1985, **275**, № 1, с. 48.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 8 октября 1984 г.

---

УДК 621.396.677.45

# К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ПЛОСКОЙ СПИРАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

*Н. Н. Горобец, А. И. Елисеев, Н. А. Хижняк*

При исследовании плоских спиральных антенн методом частичных областей важным является вопрос о правильном выборе вида азимутальной зависимости частных решений уравнений Максвелла с учетом направления намотки витков спирали. В литературе этому вопросу уделено недостаточно внимания [1], а в ряде работ [2-5], посвященных расчету спиральных антенн, влияние знака параметра намотки спирали на поведение получаемых решений не анализируется. В данной работе на примере плоской логарифмической спирали в свободном пространстве обоснован выбор решений с учетом направления намотки витков при различной временной зависимости комплексных амплитуд полей.