ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1985*

УДК 538.56

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Н. С. Горская, М. А. Раевский

Проведено исследование пространственной корреляции цилиндрических волн, распространяющихся в случайно-неоднородных рефракционных волноводах. Рассмотрены случаи рассеяния волны на анизотропных флуктуациях показателя преломления и на неровностях границы. Получено аналитическое решение уравнения для поперечной функции корреляции нормальных мод в волноводах с произвольными степенными профилями регулярного показателя преломления.

Вопрос о пространственных корреляционных характеристиках волн в случайно-неоднородных рефракционных волноводах имеет важное значение в связи с распространением электромагнитных волн в ионосферном волноводе, звука в океане и атмосфере и т. д. Особый интерес эта задача приобретает ввиду необходимости расчетов оптимальных приемно-излучающих систем. Очевидна также ее важность и для проблемы диагностики среды зондирующими сигналами (например томографии океана). В том случае, если волна, распространяясь в волноводе, является однородной вдоль одной из координат (для краткости такую волну будем называть плоской, хотя поперек волновода поле волны имеет сложную структуру), задача довольно подробно исследована аналитически [1, 2]. В этих работах изучалось поведение когерентных компонент и пространственно-временных корреляционных функций амплитуд нормальных мод в рефракционных волноводах с неровной границей, а также с крупномасштабными анизотропными флуктуациями показателя преломления. Поскольку вдали от источника волна в волноводе является цилиндрической, представляет интерес рассмотреть влияние неоднородностей на пространственные корреляционные характеристики цилиндрических волн. Соответствующая задача подробно исследована лишь для волны, распространяющейся в безграничной среде с постоянным в среднем показателем преломления [3]. В волноводе рассмотрение существенно усложняется, поэтому до сих пор были проделаны лишь некоторые численные расчеты [4, 5] для волноводов с шероховатой границей, которые, к сожалению, дают весьма мало информации о зависимости эффектов от параметров задачи. В данной работе проводится аналитическое исследование пространственных функций корреляции и когерентных компонент нормальных мод как для волноводов с флуктуациями показателя преломления, так и для волноводов со случайно-неровной границей. Рассматривается изменение корреляции поля волны на малых и больших расстояниях. Получено аналитическое решение задачи для рефракционных волноводов с произвольными степенными профилями регулярного показателя преломления.

Рассмотрим вначале распространение цилиндрической волны в плоском рефракционном волноводе со случайными крупномасштабными флуктуациями показателя преломления. Поскольку основное отличие цилиндрического и плоского случаев состоит в поведении пространственных корреляций, ограничимся рассмотрением флуктуаций показателя преломления, не зависящих от времени. При этом для потенциала скалярного поля монохроматической волны в области вне источников имеем уравнение

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = 2\frac{\Delta c\,\omega^2}{c_0^3(z)}\Phi. \tag{1}$$

Здесь ω — частота волны, $c_0(z)$ — регулярный профиль фазовой скорости волны, Δc — ее флуктуации, малые по сравнению со значениями $c_0(z)$ (предполагается, что ось z перпендикулярна плоскости волновода). В случае открытых волноводов уравнение (1) следует дополнить условиями излучения при $z=\pm\infty$, в случае закрытых волноводов — условием $\Phi=0|_{z=\pm\infty}$.

Рассмотрим вначале более простой случай закрытого волновода. Потенциал волны Φ представим в виде разложения в ряд по ортонормированным собственным функциям, являющимся решением краевой задачи:

$$\frac{d^2\psi_p}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - k_p^2\right)\psi_p = 0, \qquad \psi_p\,|_{z\to\pm\infty} = 0. \tag{2}$$

Для коэффициентов разложения a_p имеем систему связанных уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a_p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_p}{\partial\varphi^2} + k_p^2 a_p = 2\omega^2\sum_{p_2} a_{p_2}\int\frac{\Delta c}{c_0^3}\psi_p\psi_{p_2}dz. \tag{3}$$

Будем считать, что горизонтальный масштаб корреляции неоднородностей удовлетворяет условию $k_p l_r \gg 1$, при этом можно рассматривать задачу в приближении «рассеяния вперед» [3]. Предположим также, что интересующие нас эффекты рассеяния проявляются в основном при цилиндрическом режиме распространения волны. Последнее означает, что область, где волна, излучаемая источником, достигает цилиндрической асимптотики, настолько мала, что влиянием флуктуаций показателя преломления для нее можно пренебречь. В случае, если поле источника обладает азимутальной симметрией (в плоскости волновода), удобно перейти к медленно меняющейся амплитуде $b_p(r,\varphi)$, определяемой соотношением

$$a_p(r,\varphi) = (k_p r)^{-0,5} b_p(r,\varphi)\, e^{ik_p r}.$$

Для нее на расстояниях $r \gg k_p^{-1}$ имеем стохастическое уравнение:

$$i\frac{\partial b_p}{\partial r} + \frac{1}{2r^2 k_p}\frac{\partial^2 b_p}{\partial\varphi^2} = \sum_{p_2}\frac{\omega^2}{\sqrt{k_p k_{p_2}}}\int\frac{\Delta c}{c_0^3}\psi_p\psi_{p_2}dz\, b_{p_2}\exp\left[i(k_{p_2}-k_p)r\right]. \tag{4}$$

Значения b_p при $r=0$ задаются с помощью некоторой процедуры согласования с источником и в дальнейшем считаются известными.

Рассмотрим изменение с расстоянием угловых функций корреляции нормальных мод $N_p(r,\varphi,\varphi_1) = \langle b_p(r,\varphi_1)\, b_p^*(r,\varphi_1+\varphi)\rangle$ и когерентных компонент $\langle b_p(r,\varphi)\rangle$. Будем считать, что флуктуации $\Delta c(r,\varphi,z)$ являются однородными и изотропными в плоскости волновода, при этом N_p зависит лишь от r,φ, а $\langle b_p\rangle$ — лишь от r в силу очевидной симметрии задачи по азимутальному углу φ. Получение замкнутых уравнений для моментов $N_p(r,\varphi)$ и $\langle b_p(r)\rangle$ вполне аналогично случаю распространения в волноводе плоской волны и изложено достаточно подробно в работах [1, 6]. В том случае, если рассеяние мало на масштабе корреляции l_r, а также на масштабе интерференции нормальных мод $l_{\text{инт}}=[\min(k_p-k_{p_2})]^{-1}$, уравнение для функции когерентности можно записать в виде

$$\frac{\partial N_p(r,\varphi)}{\partial r}=\sum_{p_2}[W_{pp_2}(r,\varphi)\,N_{p_2}(r,\varphi)-W_{pp_2}(r,0)\,N_p(r,\varphi)], \tag{5}$$

где для вероятности перехода $W_{pp_2}(r,\varphi)$ имеем выражение

$$W_{pp_2}(r,\varphi)=2\,\frac{\omega^4}{k_pk_{p_2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz_1\,dz\,\frac{\psi_p(z)\,\psi_{p_2}(z)\,\psi_p(z_1)\,\psi_{p_2}(z_1)}{c_0^3(z)\,c_0^3(z_1)}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty B(r,r_1,\varphi,z,z_1)\exp[i(k_p-k_{p_2})\,r_1]\,dr_1.$$

Здесь $B(r,r_1,\varphi,z,z_1)=\langle\Delta c(r,\varphi_1,z)\Delta c(r+r_1,\varphi+\varphi_1,z_1)\rangle$. Уравнение для когерентной компоненты $\langle b_p\rangle$ имеет при тех же условиях простой вид:

$$\frac{\partial\langle b_p(r)\rangle}{\partial r}+\frac{1}{2}\sum_{p_2}W_{pp_2}(r,0)\,\langle b_p(r)\rangle=0. \tag{6}$$

Предполагая, что число мод p_{cr}, локализованных в волноводе, велико ($p_{\text{cr}}\gg1$), а масштабы флуктуаций Δc таковы, что в каждом акте рассеяния взаимодействуют лишь относительно близкие моды ($|p-p_2|\ll\ll p$), перейдем [1] от разностного уравнения (5) к дифференциальному

$$\frac{\partial N_p(r,\varphi)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial p}\left[D_p(r,\varphi)\,\frac{\partial N_p(r,\varphi)}{\partial p}\right]+F_p(r,\varphi)\,N_p(r,\varphi), \tag{7}$$

где

$$D_p(r,\varphi)=(1/2)\sum_{p_2}(p-p_2)^2\,W_{pp_2}(r,\varphi),$$

$$F_p=\sum_{p_2}[W_{pp_2}(r,\varphi)-W_{pp_2}(r,0)].$$

Это уравнение следует дополнить [1] граничными условиями $D_p\dfrac{\partial n_p}{\partial p}==0$ при $p=1$, $p=p_{\text{cr}}$.

В случае открытых волноводов необходимо учитывать, что вследствие перерассеяния на случайных неоднородностях энергия волны может излучаться из волновода. Соответствующий эффект учитывается модами сплошного спектра. При этом в правых частях уравнений (3)—(6) появляются члены, учитывающие эффект взаимодействия мод дискретного и сплошного спектра. В дальнейшем нас будет интересовать случай крупномасштабных неоднородностей, когда справедливо диффузионное приближение. Диффузионное уравнение (7) имеет в случае открытых волноводов тот же вид [1], но его необходимо решать уже совместно с граничными условиями $D_p\dfrac{\partial n_p}{\partial_p}=0$ при $p=1$, $n_p=0$ при $p=p_{\text{cr}}$. Диссипативное граничное условие при $p=p_{\text{cr}}$ описывает эффект перекачки энергии волны из мод дискретного спектра в моды сплошного спектра.

Рассмотрим некоторые общие свойства полученных уравнений. Прежде всего отметим, что при $\varphi=0$ уравнение (5) и соответственно дифференциальное уравнение (7) описывают изменение интенсивности нормальных мод. Поскольку флуктуации предполагаются статистически однородными в плоскости волновода, вероятность перехода $W_{pp_2}(r, 0)$ не зависит от r и тождественно совпадает с выражением для W_{pp_2} в случае плоской волны, приведенным в работе [1]. Таким образом, полученные в этой работе результаты для интенсивности и когерентных компонент нормальных мод справедливы и для цилиндрических волн (разумеется, с учетом цилиндрического фактора убывания амплитуд $r^{-1/2}$). Таким образом, отличие плоского и цилиндрического случаев проявляется лишь в поведении пространственных корреляционных функций.

Уравнение (7) содержит в правой части диффузионный член, пропорциональный D_p, который описывает эффект перераспределения корреляций между нормальными модами волновода, и член F_pN_p, который соответствует затуханию корреляций, обусловленному случайными фазовыми набегами волнового фронта на крупномасштабных неоднородностях среды. Относительный вклад этих эффектов в изменение угловой функции корреляции $N_p(r, \varphi)$ зависит от соотношения расстояния между точками наблюдения $\rho=2r\sin(\varphi/2)$ и масштаба корреляции неоднородностей l_r. Если $\rho \gtrsim l_r$, то диффузионным членом в уравнении (7) можно пренебречь. При этом имеем решение

$$N_p(r, \varphi)=N_p(0, \varphi)\exp\left[\int\limits_0^r F_p(r', \varphi)\,dr'\right]. \qquad (8)$$

Наоборот, если $\rho \ll l_r$, основным становится диффузионный член (функция $F_p(\rho)$ стремится к нулю при малых ρ). Получить аналитическое решение уравнения (7) в этом случае весьма затруднительно, однако в том частном случае, когда коэффициент диффузии $D_p(r, \varphi)$ представляет собой произведение функции, зависящей только от p, на функцию, зависящую только от r, φ, решение может быть получено методом разделения переменных. Очевидно, что если угловой масштаб корреляции источника не слишком мал, то приближенное решение (8) хорошо описывает изменения угловой корреляционной функции данной моды на расстояниях, сравнимых с длиной затухания ее когерентной компоненты $r \lesssim L_p^{\mathrm{cog}} = \gamma_p^{-1}$ $\left(\gamma_p = \frac{1}{2}\sum\limits_{p_2} W_{pp_2}(r, 0) - \text{декремент затухания}\right)$, тогда как на расстояниях $r \gg L_p^{\mathrm{cog}}$ следует рассматривать решение уравнения (7) с учетом диффузионного члена.

С точки зрения практических приложений более интересна не сама угловая функция корреляции $N_p(r, \varphi)$, а поперечная функция корреляции $n_p(\rho, r)$. Очевидно, что по определению функции $n_p(\rho, r)$ и $N_p(r, \varphi)$ связаны соотношением

$$n_p[\rho(r, \varphi), r] \equiv N_p(\varphi, r),$$

где $\rho(r, \varphi)=2r\sin(\varphi/2)$. Таким образом, уравнение (7) позволяет получить информацию и о функции поперечной корреляции. Поскольку мы предполагали, что рассеяние волны на одной неоднородности мало, изменения корреляционных функций $n_p(\rho, r)$ происходят в основном на расстояниях $r \gg l_r$. С другой стороны, вероятность перехода $W_{pp_2}(r, \varphi)$ отлична от нуля лишь при значениях $\rho(r, \varphi) \lesssim l_r$. Таким образом, в выражении для $W_{pp_2}(r, \varphi)$ вместо точного равенства $\rho=2r\sin(\varphi/2)$ можно использовать приближенное соотношение $\rho=r\varphi$, Функция W_{pp_2} зависит при этом только от произведения координат r и φ $(r\varphi)$. Учитывая это обстоятельство, на тех расстояних, где поперечный масштаб корреляции нормальных мод превышает l_r и справедливо выражение (8), для $n_p(\rho, r)$ можно получить выражение

$$n_p(\rho, r) = N_p[\varphi(\rho, r), 0] \exp\left[\frac{r}{\rho}\int_0^\rho F(\rho')\,d\rho'\right], \qquad (9)$$

где $N_p(\varphi, 0)$ — угловая функция корреляции источника, $\varphi(\rho, r) = 2\arcsin(\rho/2r)$. Это решение описывает как эффект увеличения радиуса поперечной корреляции за счет геометрического расхождения точек волнового фронта цилиндрической волны, так и эффект его экспоненциального уменьшения, обусловленный случайными фазовыми набегами на неоднородностях показателя преломления. Очевидно, радиус поперечной корреляции сначала увеличивается, а затем уменьшается, причем смена режима происходит на расстоянии порядка длины затухания когерентной компоненты данной моды L_p^{cog}. Аналогичное решение для плоской волны имеет вид [1]

$$n_p(\rho, r) = n_p(\rho, 0)\exp[F_p(\rho) r]. \qquad (10)$$

Из сравнения выражений (9), (10) можно сделать два важных вывода. Во-первых, независимо от конкретного вида функции $F_p(\rho)$ (т. е. параметров флуктуаций и волновода) мы имеем достаточно простое соответствие законов изменения поперечных корреляционных функций плоской и цилиндрической волн. Во-вторых, очевидно, что уменьшение поперечного радиуса корреляции в плоской волне происходит быстрее, чем в цилиндрической волне. Это понятно, если учтем, что расстояние между точками наблюдения в случае цилиндрической волны с увеличением r меняется из-за геометрического расхождения точек фазового фронта от нуля до ρ, тогда как для плоской волны это расстояние остается неизменным и равно ρ. Таким образом, в случае цилиндрической волны эффект рассеяния «набран» по более скоррелированным неоднородностям, что, естественно, приводит к меньшему затуханию корреляции по сравнению с плоским случаем.

На больших расстояниях $(r \gg L_p^{\text{cog}})$ радиус корреляции волны становится малым по сравнению с l_r, при этом изменение функции $n_p(\rho, r)$ описывается в основном диффузионным членом уравнения (7), причем коэффициент диффузии $D_p(r, \varphi)$ зависит лишь от произведения φr. Если при этом коэффициент диффузии имеет вид $D_p(\rho) \equiv D_1(p) D_2(\rho)$, то решение диффузионного уравнения (7) с диссипативным граничным условием при p_{cr}, полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$n_p(\rho, r) = \sum_i C_i[\varphi(\rho, r)] P_i(p) \exp\left[-\frac{\lambda_i r}{\rho}\int_0^\rho D_2(\rho')\,d\rho'\right], \qquad (11)$$

где $P_i(p)$ и λ_i — соответственно собственные функции и собственные значения краевой задачи,

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[D_1(p)\frac{\partial P}{\partial p}\right] + \lambda P = 0, \quad D_1\frac{\partial P}{\partial p} = 0\Big|_{p=1}, \quad P = 0|_{p=p_{\text{cr}}}, \qquad (12)$$

$C_i(\varphi) = \int N_p(\varphi, r_0) P_i(p)\,dp$, $N_p(\varphi, r_0)$ — угловая функция корреляции при некотором $r = r_0$, которую можно найти из условия сшивки с решением (9). На больших расстояних фактор геометрической расходимости точек фазового фронта играет уже незначительную роль, поэтому коэффициенты $C_i[\varphi(\rho, r)]$ в решении (11) весьма слабо зависят от r. Учитывая, что при $\rho \ll l_r$ имеем $\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho D_2(\rho')d\rho' \approx D_2(0)$, можно утверждать, что на расстояниях $r \gg L_p^{\text{cog}}$ изменения ненормированной корреляционной функции нормальных мод $n_p(\rho, r)$ обусловлены в основном трансформацией энергии нормальных мод. Отметим также, что если $D_p(\rho) \equiv D_1(p)D_2(\rho)$, а $F_p(\rho)$ не зависит от номера p, то методом разделения переменных можно получить точное решение уравнения (7), описывающее поведение $n_p(\rho, r)$ при всех значениях r. Это решение получим, если выражение (11) домножим на $\exp\left[\frac{r}{\rho}\int\limits_0^\rho F(\rho')d\rho'\right]$.

Рассмотрим более продробно рефракционные волноводы с произвольными степенными профилями регулярного показателя преломления:

$$\frac{1}{c_0^2(z)} = \frac{1}{c_*^2} - \beta^2|z|^s \quad \text{при } z<H, \qquad c(z)=c_H \quad \text{при } z \geqslant H, \tag{13}$$

где s — любое положительное число.

Возьмем гауссову функцию корреляции флуктуаций, изотропную в плоскости волновода и анизотропную в его поперечном сечении:

$$B(r, r_1, \varphi, z, z_1) = \\ = \langle (\Delta c)^2 \rangle \exp\left[-\frac{r^2 + (r+r_1)^2 - 2r(r+r_1)\cos\varphi}{4l_r^2} - \frac{(z-z_1)^2}{4l_z^2}\right]. \tag{14}$$

Будем полагать, что частота волны ω и параметры волновода таковы, что в нем локализовано много мод, т. е. $p_{\text{cr}} \gg 1$. В этом случае при вычислении вероятности перехода W_{pp_1} и коэффициентов D_p и F_p диффузионного уравнения (7) можно воспользоваться собственными функциями $\psi_p(z)$ и собственными значениями k_p краевой задачи (2), полученными в приближении ВКБ. Соответствующие выражения для $D_p(\rho)$ и $F_p(\rho)$ при условии, что мал критический угол волновода $\theta_{\text{cr}} = \sqrt{2(c(H)-c(0))/c(0)}$, а также что $l_z/l_r \gg \theta_{\text{cr}}$, приведены в работе [1]. При этом функция $F_p(\rho)$ не зависит от номера моды p, а коэффициент диффузии имеет вид $D_p(\rho) = D_1(p)D_2(\rho)$, т. е. можно, как и отмечалось выше, получить точное аналитическое решение для поперечной функции корреляции $n_p(\rho, r)$ нормальных мод цилиндрической волны при всех значениях r. Соответствующее выражение имеет вид

$$n_m(\rho, r) = \exp\left\{F_*\left[\frac{\sqrt{\pi}\,l_r}{\rho}\operatorname{erf}(\rho/2l_r) - 1\right]r\right\}\sum_{q=1}^{\infty} A_q[\varphi(\rho, r)] \times \\ \times \exp\left[-\frac{D_*}{\rho}\operatorname{erf}(\rho/2l_r)\lambda_q^2 r\right] m^{(s-2)/2(s+2)} J_\nu(\lambda_q m^{s/(s+2)}), \tag{15}$$

$$D_* = \frac{\pi l_r^2 \langle(\Delta c)^2\rangle}{2c_*^2 l_z^2(1+2/s)\theta_{\text{cr}}^2}, \qquad F_* = \frac{2\sqrt{\pi}\,\omega^2\langle(\Delta c)^2\rangle\, l_r}{c_*^4},$$

$$A_q(\varphi) = \frac{\int\limits_0^1 N_m^0(\varphi)\, m^{(s-2)/2(s+2)} J_\nu[\lambda_q m^{s/(s+2)}]\,dm}{(1/2+1/s)(J_{\nu+1}(\lambda_q))^2}.$$

Здесь $m=p/p_{cr}$, $N_m^0(\varphi)$ — угловая функция корреляции при $r=0$, $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятности, $J_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода, $\nu=1/s-1/2$, λ_q — корни уравнения $J_\nu(\lambda_q)=0$, причем $\lambda_q\neq 0$. На тех расстояниях, где масштаб корреляции волны ρ_p^{cor} превышает l_r, это решение упрощается и определяется выражением

$$n_m(\rho, r) = N_m^0\,[\varphi(\rho, r)]\exp\left\{F_*\left[\frac{\sqrt{\pi}\,l_r}{\rho}\operatorname{erf}(\rho/2l_r)-1\right]r\right\}. \qquad (16)$$

Таким образом, изменение корреляционной функции $n_m(\rho,r)$ в данном случае не зависит от номера моды и типа рефракционного волновода (этот результат справедлив лишь при однородном распределении флуктуаций в сечении волновода). Следует также отметить, что показатель экспоненты в (16) пропорционален квадрату частоты волны, т. е. на этой стадии решения изменение поперечной корреляционной функции действительно обусловлено случайными фазовыми набегами (см. выше).

Найдем расстояние r_m^*, на котором происходит смена режима увеличения радиуса корреляции m-моды за счет цилиндрического расхождения точек волнового фронта на режим экспоненциального уменьшения радиуса корреляции, обусловленного рассеянием на флуктуациях показателя преломления. Определим радиус корреляции m-моды ρ_m^{cor} по уровню e^{-1}, т. е. $n_m\,[\rho_m^{cor}]=e^{-1}n_m(0)$. Как уже отмечалось выше, $\rho_m^{cor}(r)$ растет при изменении r от 0 до r_m^* и уменьшается при изменении r от r_m^* до ∞. Определяя r_m^* из условия $d\rho_m^{cor}/dr=0$ при $r=r_m^*$ и используя выражение (16), получим для r_m^* соотношение

$$r_m^* = \varphi_m^*\,\frac{dN_m^0}{d\varphi}(\varphi_m^*)\,(N_m^0)^{-1}F_*^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,l_r}{\rho_m^*}\operatorname{erf}\frac{\rho_m^*}{2l_r}-1\right]^{-1}, \qquad (17)$$

где ρ_m^* — поперечный радиус корреляции и, соответственно, $\varphi_m^*\equiv\equiv\varphi\,[\rho_m^*, r_m^*]$ — угловой масштаб корреляции при $r=r_m^*$. Для φ_m^* можно, в свою очередь ,получить соотношение

$$N_m^0(\varphi_m^*)\exp\left[\varphi_m^*\,\frac{dN_m^0}{d\varphi_m^*}\,(N_m^0)^{-1}\right]=e^{-1}. \qquad (18)$$

Рассматривая, для конкретности, гауссову угловую функцию корреляции источника, не зависящую от номера моды $N_0=N(0)\exp(-\varphi^2/\varphi_0^2)$, из соотношения (18) получаем для углового масштаба корреляции в точке r_m^* величину $\varphi_m^*=\varphi_0/\sqrt{3}$. Если угловой масштаб корреляции источника φ_0 не очень мал по сравнению с единицей, то из (17) получаем для r_m^* выражение

$$r_m^* = \frac{L^{cog}}{3}+\frac{\sqrt{3}\,l_r}{\varphi_0}$$

(при этом учитывается, что декремент затухания среднего поля $\gamma_m==F_*/2$ [1]). Интересно отметить, что с уменьшением φ_0 величина r_m^* увеличивается, а при $\varphi_0\sim 1$ r_m^* слабо зависит от конкретного значения φ_0, т. е. углового масштаба корреляции источника.

При значениях r, превышающих r_m^*, радиус корреляции волны экспоненциально уменьшается и весьма быстро становится меньше масштаба корреляции неоднородностей l_r. При этом поведение корреляционных функций n_m описывается уже точным решением (15) и имеет весьма сложный вид. Однако в силу экспоненциального характера изменения членов суммы (15) при $r \gtrsim D_*^{-1}$ основной вклад дает член, соответствующий наименьшему значению корня λ_1 дисперсионного уравнения $J_\nu(\lambda_q)=0$.Изменение нормированной функции корреляции $\tilde{n}_m(\rho, r)=n_m(\rho, r)/n_m(0, r)$ на расстояниях $r \leqslant L^{\cos}$ описывается, по-прежнему, выражением (16), так как на этих расстояних интенсивности нормальных мод $n_m(0, r)$ не меняются. На расстояних $r>D_*^{-1}$, где реализуется автомодельный режим [1], из (15) нетрудно получить

$$n_m(\rho, r) = \frac{A_1[\varphi(\rho, r)]}{A_1[0]} \exp\left\{F_*\left[\frac{\sqrt{\pi}\, l_r}{\rho} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho}{2l_r}\right) - 1\right] r - \right.$$

$$\left. - D_* \lambda_1^2 \left[\frac{1}{\rho} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho}{2l_r}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}\, l_r}\right] r\right\}.$$

Из сравнения этого выражения с аналогичным выражением для плоской волны [1] следует, что в волноводе и на больших расстояниях поперечный радиус корреляции для цилиндрической волны уменьшается медленнее, чем для плоской волны.

Отметим, что можно получить обобщение проведенных выше результатов для флуктуаций показателя преломления с произвольным соотношением между масштабами корреляции l_r и l_z, используя более общие выражения для функций $F_m(\rho)$, $D_m(\rho)$, полученные в работе [7].

Рассмотрим теперь рассеяние цилиндрической волны в рефракционных волноводах с неровной случайной границей $z=\zeta(r, \varphi)$. Пусть неровная граница имеет нулевой импеданс, характерный масштаб неровностей l_r превышает длину волны, а амплитуда неровностей ζ мала по сравнению с длиной волны. При условии малости рассеяния на масштабе корреляции неровностей l_r и масштабе интерференции нормальных мод можно получить уравнения для функций когерентности $N_p(r, \varphi)$ и когерентных компонент $\langle b_p(r)\rangle$. Они имеют тот же вид (5), (6), где меняется лишь выражение для вероятности перехода $W_{pp_2}(r, \varphi)$, теперь:

$$W_{pp_2}(r, \varphi) = \frac{1}{2k_p k_{p_2}} \left(\frac{d\psi_p}{dz} \frac{d\psi_{p_2}}{dz}\right)^2 \times$$

$$\times \operatorname{Re}\left\{\int_0^\infty B_\zeta(r, \varphi, r_1, z, z_1) \exp\left[i(k_p - k_{p_2}) r_1\right]\right\}, \tag{19}$$

где B_ζ — корреляционная функция неровностей $\zeta(r, \varphi)$, значения производных $d\psi_p/dz$ в выражении (19) берутся при координате $z=d$, соответствующей границе с нулевым импедансом в отсутствие неровностей.

При условии $(\omega/c) l_r \theta_{\text{cr}}^2 \gg 1$ [2] также можно перейти от разностного уравнения (5) к диффузионному уравнению (7)*. Все приведенные выше основные соотношения и утверждения о поведении когерентных компонент $\langle b_p\rangle$, интенсивности, функции угловой корреляции $N_p(r, \varphi)$ и поперечной корреляционной функции $n_p(r, \rho)$ нормальных мод справедливы и в случае волновода с неровной границей. Отличие проявляется лишь в конкретных зависимостях эффектов от номеров мод и

* В случае однородного волновода с неровной границей уравнения переноса для интенсивности мод и его диффузионный аналог, соответствующий (7) при $\varphi=0$, были впервые получены в [8, 9].

параметров задачи. Приведем в явном виде решение для поперечной функции корреляции $n_p(\rho, r)$, соответствующее начальной стадии рассеяния $(\rho_m^{cor} \gtrsim l_r)$ для волноводов с профилями

$$\frac{1}{c_0^2(z)} = \frac{1}{c_*^2} - \beta^2 z^s, \quad 0<z<d, \qquad c(z) = c(d) \text{ при } z \geqslant d, \tag{20}$$

и неровностей с гауссовой изотропной корреляционной функцией:

$$B(r, r_1, \varphi) = \langle \zeta^2 \rangle \exp\left[- \frac{r^2 + (r+r_1)^2 - 2r(r+r_1)\cos\varphi}{4l_r^2} \right]. \tag{21}$$

Используя результаты работы [2], получим

$$n_m(\rho, r) = n_m(\rho, 0) \exp\left\{ F_m \left[\frac{\sqrt{\pi}\, l_r}{\rho} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho}{2l_r}\right) - 1 \right] r \right\}, \tag{22}$$

где

$$F_m = \frac{\langle \xi^2 \rangle (\beta c_*)^{2/s} F(s) (\sin\theta_{cr})^{(3s-2)/s} \omega^2 m^{(3s-2)/(s+2)}}{c_*^2},$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. Как видно из приведенного выражения (22), изменение поперечной корреляции нормальных мод в волноводе с неровной границей существенно зависит от номера моды m. Характер этой зависимости определяется конкретным типом регулярного профиля показателя преломления (индексом s). Для волноводов с $s>3/2$ эффект уменьшения поперечного радиуса корреляции максимален для высших мод, тогда как при $0<s<3/2$, наоборот, уменьшение корреляции происходит быстрее для низших мод волновода.

Авторы благодарят Л. С. Долина за полезное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артельный В. В., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 9, с. 1142.
2. Зайцев В. Ю., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 1, с. 65.
3. Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
4. Кряжев Ф. И., Кудряшов В. М., Петров Н. А. — Акуст. журн., 1976, 22, вып. 3, с. 377.
5. Кудряшов В. М. — В сб.: Математические проблемы геофизики. — Новосибирск: Наука, 1973.
6. Раевский М. А. Препринт ИПФ АН СССР № 81. — Горький, 1983.
7. Артельный В. В., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 4, с. 460.
8 Басс Ф. Г., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. — Укр. физ. журн., 1969, 14, № 9, с. 1548.
9. Bass F. G., Freulicher V. D., Fuks J. M. — IEEE Trans., 1974, AP-22, № 2, p. 288.

Институт прикладной физик
АН СССР

Поступила в редакцию
10 мая 1984 г.

THE CORRELATION CHARACTERISTICS OF CYLINDRICAL WAVES IN RANDOMLY INHOMOGENEOUS WAVEGUIDES

N. S. Gorskaya, M. A. Raevsky

The spatial correlation of cylindrical waves propagating in randomly inhomogeneous refraction waveguides is investigated. The cases of wave scattering by anisotropic refractive fluctuations of the index and by the boundary roughnesses are considered. An analytic solution is obtained for the equation of the transverse correlation function of normal modes in the case of waveguides with arbitrary power profiles of the regular refractive index.