ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 621.372 8

К АНАЛИЗУ ОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ (НЕКООРДИНАТНАЯ ЗАДАЧА)

Г. И. Веселов, Г. Г. Воронина, Н. И. Платонов

Обсуждаются особенности применения метода частичных областей для решения некоординатной задачи о собственных волнах открытых диэлектрических волноводов. В качестве тестовой рассмотрена задача о круглом диэлектрическом волноводе, сформулированная как некоординатная. Исследованы свойства получаемого решения при определении собственных значений и собственных функций.

В работах [1,2] предложен, а в [3] развит метод решения задачи о собственных волнах открытого диэлектрического волновода (ОДВ) произвольного сечения при использовании в качестве базисной цилиндрической системы координат. Предполагается, что поперечное сечение стержня представляет собой односвязную область, ограниченную замкнутым контуром типа Ляпунова, звездным относительно центра базисной системы координат. Поля собственных волн в диэлектрическом стержне и вне его представляются в виде рядов круговых цилиндрических гармоник, почленно удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и так называемым внутренним граничным условиям. К ним относятся условия периодичности вдоль угловой координаты, ограниченности в начале координат и условие на бесконечности. Сопряжение тангенциальных составляющих полей на граничном контуре приводит к системе функциональных уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты рядов, которыми представляются поля в областях. Переразложение полей по полным системам функций, удовлетворяющих условию периодичности вдоль контура, сводит систему функциональных уравнений к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Из условия равенства нулю ее определителя получается искомое дисперсионное уравнение ОДВ. На основании предложенного метода разработана универсальная ЭВМ-программа [4], позволяющая исследовать дисперсионные характеристики ОДВ разнообразных поперечных сечений.

Представляет интерес апробирование этого алгоритма на примере задачи о собственных волнах ОДВ кругового сечения, которая имеет строгое решение в замкнутой форме. Эту задачу можно сформулировать как некоординатную, если выбрать центр базисной системы координат O не совпадающим с центром круга O' ($0<e<a$, рис. 1).

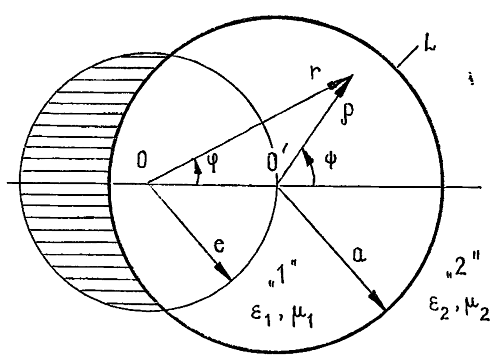

Рис. 1.

В соответствии с методом [1–3] представим продольные составляющие поля в областях «1» ($0\leqslant\rho<a$) и «2» ($a<\rho<\infty$) в виде рядов

$$
\begin{gathered}
E_{z1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_{c1} r)\left[A_\nu^{(1)} \cos (\nu\varphi)+A_\nu^{(2)} \sin (\nu\varphi)\right], \\
H_{z1}=\rho_0^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_{c1} r)\left[A_\nu^{(3)} \sin (\nu\varphi)+A_\nu^{(4)} \cos (\nu\varphi)\right];
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
E_{z2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)}(k_{c2} r)\left[A_\nu^{(5)} \cos (\nu\varphi)+A_\nu^{(6)} \sin (\nu\varphi)\right], \\
H_{z2}=\rho_0^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)}(k_{c2} r)\left[A_\nu^{(7)} \sin (\nu\varphi)+A_\nu^{(8)} \cos (\nu\varphi)\right].
\end{gathered} \tag{2}
$$

В формулах (1) и (2) с целью упрощения записи опущен волновой множитель $\exp[i(\omega t-\beta z)]$, где ω — угловая частота, β — фазовая постоянная, $A_\nu^{(s)}$ ($s=1, \dots, 8$) — неизвестные коэффициенты; $J_\nu(k_{c1}r)$ и $H_\nu^{(2)}(k_{c2}r)$ — функции Бесселя первого рода и Ханкеля второго рода порядка ν соответственно; $k_{cj}=\sqrt{k_0^2\varepsilon_j\mu_j-\beta^2}$, $j=1,2$ — номер области; $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и $\rho_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — волновое число и волновое сопротивление вакуума.

Граница раздела диэлектрических сред в базисной системе координат задается функцией $\tilde{r}(\varphi)=e\cos\varphi+\sqrt{a^2-e^2\sin^2\varphi}$, где $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$.

Для переразложения функциональных равенств, получаемых из условия сопряжения тангенциальных составляющих полей на некоординатной границе L, используются системы собственных функций контура (ССФК)

$$
\left\{\frac{2-\delta_{0m}}{T} \cos \left(m \frac{2\pi}{T} l\right)\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{2}{T} \sin \left(m \frac{2\pi}{T} l\right)\right\},
$$

где $T=2\pi a$ — длина контура L; $l=a\psi(\varphi)$ — длина дуги контура, отсчитываемая от точки пересечения с линией $\varphi=0$: $\psi(\varphi)=\varphi+\arcsin(e\sin\varphi/a)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$; $\delta_{0m}=1$ при $m=0$, $\delta_{0m}=0$ при $m>0$.

Переразлагая функциональные равенства, получаемые при сопряжении на L касательных составляющих полей, по ССФК, будем иметь СЛАУ

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m\nu}A_\nu=0, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \tag{3}
$$

где A_ν — матрица-столбец из неизвестных коэффициентов $A_\nu^{(s)}$, $a_{m\nu}$ — блочная матрица коэффициентов при неизвестных, имеющая при $\nu\neq0$, $m\neq0$ размерность (8×8) и элементы $a_{m\nu}^{(t,s)}$, определяемые соотношениями

$$
\begin{gathered}
a_{m\nu}^{(1,1)}=a_{m\nu}^{(4,4)}=Jcc_{m\nu}, \quad a_{m\nu}^{(2,2)}=a_{m\nu}^{(3,3)}=Jss_{m\nu}, \quad a_{m\nu}^{(5,1)}=\chi_{\varepsilon1}Jcc'_{m\nu}, \\
a_{m\nu}^{(5,3)}=a_{m\nu}^{(8,2)}=m\alpha Jss_{m\nu}, \quad a_{m\nu}^{(6,4)}=a_{m\nu}^{(7,1)}=-m\alpha Jcc_{m\nu}, \\
a_{m\nu}^{(6,2)}=\chi_{\varepsilon1}Jss'_{m\nu}, \quad a_{m\nu}^{(7,3)}=\chi_{\mu1}Jss'_{m\nu}, \quad a_{m\nu}^{(8,4)}=\chi_{\mu1}Jcc'_{m\nu}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Здесь $\alpha=2\pi p/(k_0T)$, $\chi_{\mu1}=-\mu_1/(k_0\bar{k}_{c1}^2)$, $\chi_{\varepsilon1}=\varepsilon_1/(k_0k_{c1}^2)$, $\bar{k}_{c1}^2=\varepsilon_1\mu_1-p^2$, $p=\beta/k_0$ — коэффициент замедления в системе. Элементы $a_{m\nu}^{(t,s+4)}$ $(t=1,...,8;\ s=1,...,4)$ записываются аналогично $a_{m\nu}^{(t,s)}$ с заменами $J\to-H$, $\chi_{\mu1}\to\chi_{\mu2}=-\mu_2/(k_0\bar{k}_{c2}^2)$, $\chi_{\varepsilon1}\to\chi_{\varepsilon2}=\varepsilon_2/(k_0\bar{k}_{c2}^2)$, где $\bar{k}_{c2}^2=\varepsilon_2\mu_2-p^2$. Остальные элементы матрицы $a_{m\nu}$ равны нулю. Входящие в выражения элементов интегральные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{matrix} Zcc_{m\nu} \\ Zss_{m\nu}\end{matrix} = \frac{2-\delta_{0m}}{T}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[Z_\nu(k_cr)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu\varphi)\right]_L \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[m\frac{2\pi}{T}l(\varphi)\right]l'(\varphi)\,d\varphi, \tag{5}$$

где $l'(\varphi)=dl/d\varphi=\sqrt{\tilde{r}^2+(d\tilde{r}/d\varphi)^2}$; для коэффициентов, отвечающих области «1», $Z=J$, $Z_\nu(k_c\,r)=J_\nu(k_{c1}r)$, а для коэффициентов, соответствующих области «2», $Z=H$, $Z_\nu(k_cr)=H_\nu^{(2)}(k_{c2}r)$. Штрих ($'$) в (4) означает, что в ядрах интегралов (5) необходимо произвести замены вида

$$\left[Z_\nu(k_cr)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu\varphi)\right]_L \to \left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[Z_\nu(k_c\,r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu\varphi)\right]\right\}_L,$$

где n — нормаль к контуру L.

Если $m=0$ или $\nu=0$, блочная матрица $a_{m\nu}$ становится прямоугольной размерностью (4×8) или (8×4) соответственно. Она может быть получена из матрицы $a_{m\nu}$ вычеркиванием тех ее строк или столбцов, у которых все элементы равны нулю. Аналогично при $m=\nu=0$ получаем матрицу a_{00} размерностью (4×4).

Покажем, что при некоординатной постановке задачи, когда граничный контур L имеет форму окружности, можно получить решение СЛАУ (3) в аналитическом виде. С этой целью найдем аналитические выражения для интегральных коэффициентов (5), для чего введем новую переменную интегрирования $\psi=l/a$ и ядра подынтегральных выражений $[Z_\nu(k_cr)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu\varphi)]_L$ разложим в ряды с использованием теоремы сложения для бесселевых функций [5]. В результате получим

$$\begin{matrix} Zcc_{m\nu} \\ Zss_{m\nu}\end{matrix} = \frac{2-\delta_{0m}}{2}Z_m(k_ca)\left[J_{\nu-m}(k_ce)\pm(-1)^mJ_{\nu+m}(k_ce)\right],$$

$$\begin{matrix} Z\,cc'_{m\nu} \\ Z\,ss'_{m\nu}\end{matrix} = \frac{2-\delta_{0m}}{2}k_cZ'_m(k_ca)\left[J_{\nu-m}(k_ce)\pm(-1)^mJ_{\nu+m}(k_ce)\right]$$

Ввиду симметрии поперечного сечения ОДВ относительно оси $\varphi=0,\pi$ (рис. 1) исходная СЛАУ (3) распадается на две независимые системы, отвечающие нечетным и четным типам волн

$$\sum_\nu a_{m\nu}^{\text{н,ч}}A_\nu^{\text{н,ч}}=0,\quad m,\nu=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Элементы блочных матриц $a_{m\nu}^{\text{н}}$ и $A_\nu^{\text{н}}$ составлены из элементов матриц $a_{m\nu}$, A_ν с нечетными номерами t и s $(t,s=1,3,5,7)$, а элементы блочных матриц $a_{m\nu}^{\text{ч}}$, $A_\nu^{\text{ч}}$ — из элементов $a_{m\nu}$, A_ν с четными номерами $(t,s=2,4,6,8)$. Нечетные волны характеризуются наличием магнитной стенки при $\varphi=0,\pi$, а четные — электрической.

Блочные матрицы СЛАУ (6) можно представить в форме $a_{m\nu}^{н,ч}=$ $=c_m b_{m\nu}^{н,ч}$, где c_m — матрица, элементы которой определяются выражениями для $a_{m\nu}^{н,ч}$ при $e=0$, $b_{m\nu}^{н,ч}$ — диагональные матрицы с элементами

$$b_{m\nu}^{(s,s)}=(2-\delta_{0m})\left[J_{\nu-m}(k_c e)\pm(-1)^m J_{\nu+m}(k_c e)\right]/2, \qquad (7)$$

где $k_c=k_{c1}$ при $s=1,2$ и $k_c=k_{c2}$ при $s=3,4$; для нечетных волн верхний знак (+) соответствует индексам $s=1,3$, нижний (—) — индексам $s=2,4$. Для четных волн знаки противоположны.

Таким образом, бесконечные матрицы $a^{н,ч}$ СЛАУ (6) представляются в виде произведения двух матриц $a^{н,ч}=cb^{н,ч}$, где c — диагональная матрица из блоков c_m, $b^{н,ч}$ — матрица из блоков $b_{m\nu}^{н,ч}$. Заметим, что c соответствует СЛАУ, получаемой при решении задачи в естественной системе координат (ρ,ψ) с началом O' в центре круга (рис. 1).

Нетрудно видеть, что нули бесконечного детерминанта СЛАУ (6) совпадают с нулями характеристического уравнения $\det(c)=$ $=\prod\limits_m \det(c_m)=0$. Последнее распадается на ряд независимых уравнений $\det(c_m)=0$, определяющих дисперсионные характеристики волн ОДВ кругового сечения с азимутальным индексом $m=0,1,2,\ldots$ Отметим, что при использовании метода редукции для решения СЛАУ (6) $(\nu, m=0,1,\ldots,M)$ собственные значения $\beta_q(\omega)$ (q — номер собственного значения) определяются точно для типов волн, у которых $m\leqslant M$.

Можно показать, что решения СЛАУ (6) имеют вид

$$A_\nu^{н,ч}=C_n c_{n\nu}^{н,ч}, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (8)$$

Здесь $c_{n\nu}^{н,ч}$ — диагональные матрицы с элементами $c_{n\nu}^{(s,s)}$, определяемыми аналогично (7) с заменами $\delta_{0m}\to\delta_{0\nu}$ и $m\to n$; C_n — матрица-столбец из коэффициентов $C_n^{(s)}$, индексы s которых соответствуют индексам элементов $A_n^{(s)}$, а значения находятся с точностью до постоянной из СЛАУ

$$c_n C_n=0 \qquad (9)$$

при условии $\det(c_n)=0$.

Действительно, в результате подстановки (8) в (6) с учетом (7) в каждой строке СЛАУ получаем равномерно сходящийся ряд $\sum\limits_\nu a_{m\nu}^{н,ч} A_\nu^{н,ч}=c_m C_n \sum\limits_\nu b_{m\nu}^{н,ч} c_{n\nu}^{н,ч}$, сумма которого представима через табличный ряд [5] в замкнутой форме $\sum\limits_\nu b_{m\nu}^{н,ч} c_{n\nu}^{н,ч}=\delta_{mn}$. При этом исходная СЛАУ (6) сводится к (9).

Анализ рядов (1) и (2) с учетом (8) показал, что ряды (1) равномерно сходятся всюду в области «1», а ряды (2) — в области «2» — лишь при $r>e$. Следовательно, если $e>a/2$, существует область, в которой ряды (2) расходятся (на рис. 1 указанная область заштрихована). Этот результат соответствует оценкам, полученным в [6] в связи с рассмотрением гипотезы Рэлея для внешней области «2», и является следствием небазисности [7] используемых систем функций $\left\{Z_\nu(k_c r)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(\nu\varphi)\right\}$ (ν — целое число), если начало базисной системы не совпадает с центром окружности. Отметим, что отсутствие базисности не проявляется при представлении полей собственных типов волн внутри стержня, т. е. в данном случае гипотеза Рэлея справедлива. Это же показано и в работе [8] применительно к круговой области с нулевыми условиями Дирихле на контуре. Численное решение задач о волноводах ряда сечений, содержащееся в [1], позволяет предположить, что гипотеза

Рэлея справедлива и для других односвязных областей, ограниченных гладким замкнутым контуром, когда используемая система функций удовлетворяет условию ограниченности в области ($Z_\nu = J_\nu$).

Нетрудно убедиться, что ряды (1) и (2) в области их сходимости представляют с точностью до постоянной, определяемой условиями нормировки, известные замкнутые выражения для продольных составляющих полей собственных волн в системе координат (ρ, ψ). Для волн с числом азимутальных вариаций поля n они описываются выражениями, аналогичными (1) и (2), с заменами сумм одним членом ряда с номером $\nu = n$, а также $r \to \rho$, $\varphi \to \psi$, $A_n^{(s)} \to C_n'^{(s)}$. Связь между постоянными $C_n^{(s)}$ определяется из СЛАУ (9), в которой одно уравнение является следствием остальных и может быть отброшено. В случае $e > a/2$ необходимо строить продолжение решения в часть области «2» ($r < e$, $\rho > a$), где ряды (2) расходятся. Анализ с использованием теоремы сложения для бесселевых функций показал, что равномерно сходящиеся ряды в указанной области получаются, если в (2) провести замены $H_\nu^{(2)}(k_{c2}r) \to J_\nu(k_{c2}r)$, а коэффициенты разложений определить из условия сопряжения продольных составляющих полей на границе области сходимости ($r = e$).

Таким образом, на примере рассматриваемой задачи видно, что метод позволяет точно находить собственные значения независимо от того, сходятся ли ряды всюду в поперечном сечении волновода или лишь в его части. Однако при расчете собственных функций следует проводить оценку области сходимости исходных разложений и строить продолжение в область, где они расходятся, либо использовать другую базисную систему координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселов Г. И. Диссертация. М, 1971.
2. Веселов Г. И, Воронина Г Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 15, № 12, с. 1891.
3. Веселов Г. И., Воронина Г. Г., Платонов Н. И., Поветкин В. А. — Сб. научных трудов по проблемам микроэлектроники. Микроэлектронные радиотехнические устройства и техника СВЧ. — М.: МИЭТ, 1980, с. 53.
4. Веселов Г. И., Воронина Г. Г, Платонов Н. И. — Сб.: Проектирование и применение радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах. Всесоюзная научно-техническая конференция. Тезисы докладов и сообщений. — Саратов: Гос. ун-т, 1983, с. 144.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М: Физматгиз, 1962.
6. Баранцев Р. Г., Грудцын В. В, Заболотный Ф. Т., Козачек В. В. — Вестник ЛГУ, 1971, № 7, вып. 2, с 56.
7. Кравцов В. В. — ЖВМ и МФ, 1980, № 3, с. 778.
8. Веселов Г. И., Платонов Н. И. — Радиотехника, 1984, 39, № 12, с. 49.

Московский институт
электронной техники

Поступила в редакцию
26 апреля 1984 г.

TO ANALYSIS OF OPEN DIELECTRIC WAVEGUIDES (NON-COORDINATE PROBLEM)

G. I. Veselov, G. G. Voronina, N.I. Platonov

The peculiarities of application of the subregion method for the solution of the non-coordinate problem about normal modes in open dielectric waveguides are discussed. The problem on the round dielectric waveguide is considered as a test. It is formulated as the non-coordinate problem. The properties of the solution for the eigenvalues and eigenfunctions are investigated.