

УДК 538.3

СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ
ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

С. Г. Арутюнян

Получены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие мгновенную конфигурацию силовых линий электрического и магнитного полей произвольно движущегося в вакууме заряда. Данные уравнения решены для магнитного поля в общем виде и для электрического поля в случае постоянства величины $\tau/(\gamma\kappa)$, где γ — лоренц-фактор заряда, κ и τ — кривизна и кручение траектории движения.

Решение ряда электродинамических задач (например, вычисление сил Лоренца в релятивистских пучках) связано с определением пространственно-временной картины поля движущегося в вакууме заряда, которая может быть получена с помощью потенциалов Лиенара—Вихерта. Такой метод сводится в общем случае к решению трансцендентного алгебраического уравнения (см., например, [1]).

Дополнительную наглядную информацию дают силовые линии электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, которые, как показано в работе, можно получить, не решая уравнения запаздывания. Полученная картина силовых линий дает представление также о линиях вектора Пойнтинга. Поле точечного заряда принадлежит к классу полей с взаимоперпендикулярными векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , поэтому картину силовых линий можно сделать релятивистски инвариантной [2], считая, что силовые линии движутся вдоль вектора Пойнтинга с определенной скоростью.

Получаемый с помощью силовых линий графический материал иллюстрирует традиционное спектральное разложение поля. В работе такие иллюстрации приведены для поля синхротронного излучения, включающего кулоновский член.

Для равномерного и прямолинейного движения заряда вид силовых линий хорошо известен (см., например, [3]). В [4] рассмотрен также случай движения со скачком скорости. Изучена и пространственно-временная структура лиенар-вихертовского поля прямолинейно движущегося равноускоренного заряда (см., например, [5]). В данной работе исследуются силовые линии поля произвольно движущегося точечного заряда. Найдены обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие вид силовых линий в данный момент времени на любых расстояниях от заряда. В общем виде доказано, что для фиксированного момента времени наблюдения силовые линии магнитного поля представляют собой окружности, образованные пересечением сферы одновременного прибытия запаздывающих сигналов и пучка плоскостей с осью, параллельной бинормали траектории в соответствующий запаздывающий момент времени. Определено расположение оси пучка в пространстве, зависящее от скорости и ускорения частицы в этот же момент времени.

Увыные выражения для электрических силовых линий получены в случае, когда выражение $\tau/(\kappa\gamma)$ постоянно вдоль траектории движения, здесь γ — лоренц-фактор частицы, κ и τ — кривизна и кручение траектории.

Наглядная картина поля произвольно движущегося заряда, которую дают релятивистски инвариантные силовые линии, может быть полезна как для нахождения интерференционных максимумов полей от многих частиц в локальных областях пространства, так и для анализа коллективных эффектов в релятивистских пучках.

Силовые линии магнитного поля. Пусть $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор движущегося точечного заряда и \mathbf{r} — радиус-вектор, направленный в точку наблюдения. Удобно ввести натуральную систему координат, в которой \mathbf{e}'_1 и \mathbf{e}'_2 — единичные орты вдоль главной нормали траектории и скорости частицы βc в запаздывающий момент времени t' . Положим $\mathbf{e}'_3 = [\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2]$. Тогда в точке наблюдения для электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей получим выражения вида

$$\mathbf{E} = \frac{e}{D^2 (1 - \beta v_2)^2} \{ [\gamma^{-2} v_1 + D \kappa \beta^2 (1 - \beta v_2 - v_1^2) + v_1 v_2 \dot{\beta} D/c] \mathbf{e}'_1 + \quad (1)$$

$$+ [(v_2 - \beta) (\gamma^{-2} - D \kappa \beta^2 v_1) - (1 - v_2^2) \dot{\beta} D/c] \mathbf{e}'_2 + [\gamma^{-2} - D \kappa \beta^2 v_1 + v_2 \dot{\beta} D/c] v_3 \mathbf{e}'_3 \};$$

$$\mathbf{H} = \frac{e}{D^2 (1 - \beta v_2)^3} \{ [\beta (\gamma^{-2} - D \kappa \beta^2 v_1) + \dot{\beta} D/c] v_3 \mathbf{e}'_1 + D \kappa \beta^2 (1 - \beta v_2) v_3 \mathbf{e}'_2 + \quad (2)$$

$$+ [-\beta v_1 \gamma^{-2} + D \kappa \beta^2 (\beta (v_1^2 + v_2^2) - v_2) - v_1 \dot{\beta} D/c] \mathbf{e}'_3 \},$$

где $\mathbf{D} = D(v_1 \mathbf{e}'_1 + v_2 \mathbf{e}'_2 + v_3 \mathbf{e}'_3)$ — вектор, проведенный из запаздывающей точки $\mathbf{r}_0(t')$ в точку наблюдения \mathbf{r} , $D = c(t - t')$, t — момент времени наблюдения, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, κ — кривизна траектории в точке $\mathbf{r}_0(t')$, $\dot{\beta} = d\beta/dt'$. При изменении величин v_1 , v_2 , v_3 , связанных соотношением $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, конец вектора \mathbf{D} описывает сферу с радиусом $c(t - t')$ и центром в точке $\mathbf{r}_0(t')$, которую мы назовем световой сферой.

Для фиксированной точки наблюдения \mathbf{r} запаздывающий момент времени t' находится из уравнения

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \quad (3)$$

и при подстановке в (1) и (2) дает явную зависимость поля от \mathbf{r} и t . Уравнение (3) решается точно для прямолинейного равноускоренного движения частицы. В случае равномерного кругового движения, когда точка наблюдения находится на орбите, решение (3) аналогично задаче Кеплера [6] и разлагается в ряд по функциям Бесселя. При больших γ число основных членов этого ряда $\sim \gamma^3$ (совпадает с числом основных гармоник синхротронного излучения).

В ультрарелятивистском случае уравнение (3) можно решать вблизи частицы разложением по γ^{-2} и малому отношению x/R , где x — расстояние от точки наблюдения до заряда, движущегося по траектории с радиусом кривизны R . Уравнение запаздывания при этом сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка, разрешимому в радикалах [7]. Картина поля, найденная в этом приближении, однако, имеет мозаичную структуру — замкнутые формулы получаются для пространственной локализации высокочастотной части поля (здесь $E \sim H \sim \gamma^4$) и вне ее, где поле не зависит от γ . Кроме того, приведенные в [7] формулы не определяют поля на расстояниях, сравнимых с R .

Наглядную картину поля во всем пространстве можно строить с помощью силовых линий.

Для нахождения магнитных силовых линий заметим, что вектор \mathbf{H} касателен к световой сфере для произвольного движения заряда. Одномерную силовую линию магнитного поля на этой сфере будем описывать функциями $v_1(\sigma)$, $v_2(\sigma)$, $v_3(\sigma)$, зависящими от формального параметра σ . Из выражения (2) следует, что функции $v_i(\sigma)$, $i=1, 2, 3$, являются решениями системы уравнений вида [8]

$$\begin{aligned} dv_1/d\sigma &= v_3(\beta(1-\beta^2 D\kappa\gamma^2 v_1) + \beta D\gamma^2/c), & dv_2/d\sigma &= v_3\beta^2 D\kappa\gamma^2(1-\beta v_2), \\ dv_3/d\sigma &= -\beta v_1 + \beta^2 D\kappa\gamma^2(\beta(v_1^2 + v_2^2) - v_2) - v_1\beta D\gamma^2/c. \end{aligned} \quad (4)$$

Величины β , γ , β , κ и D фиксированы на световой сфере, т. е. коэффициенты уравнений (4) не зависят от переменной σ . Имеется очевидный интеграл движения $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Кроме того, из первых двух уравнений следует еще один интеграл вида

$$\beta + \beta^2 D\gamma^2/c - \beta^3 D\kappa\gamma^2 v_1 = \mu \beta^3 D\kappa\gamma^3 (1 - \beta v_2), \quad (5)$$

где μ — постоянная интегрирования.

Это выражение в пространстве направлений (v_1, v_2, v_3) задает пучок плоскостей, перпендикулярных плоскости (v_1, v_2) и проходящих через точку $(A, \beta^{-1}, 0)$, где $A = (\beta + \beta D\gamma^2/c)(\beta^3 D\kappa\gamma^2)^{-1}$. Сечения этих плоскостей с единичной сферой (окружности переменного радиуса) определяют силовые линии в пространстве (v_1, v_2, v_3) . Увеличивая радиус единичной сферы до размеров D и совмещая с соответствующей световой сферой, получим вид силовых линий магнитного поля в реальном пространстве.

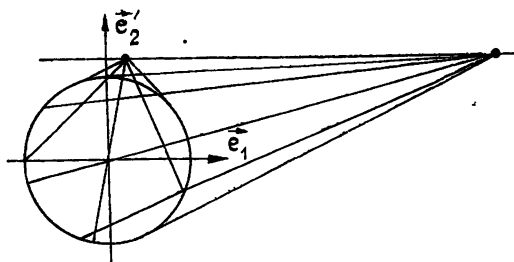


Рис. 1. Силовые линии магнитного поля. В плоскости (e'_1, e'_2) изображены сечения световой сферы пучком плоскостей с осью, проходящей через точку $(DA, D\beta^{-1})$, где D — радиус световой сферы, для двух значений A .

Существенно, что точка $(A, \beta^{-1}, 0)$ в пространстве (v_1, v_2, v_3) всегда лежит вне единичной сферы, т. е. пересечения плоскостей пучка с ней происходят для ограниченного интервала значений μ :

$$(A\gamma - \sqrt{1 + (A\beta\gamma)^2}) \leq \mu \leq (A\gamma + \sqrt{1 + (A\beta\gamma)^2}).$$

Для значений μ на концах этого интервала плоскости пучка касаются сферы, причем в соответствующих точках пространства, как и следовало ожидать, магнитное поле равно нулю. Множество таких точек образует характерную нейтральную линию магнитного поля, отмечающую в случае ультрарелятивистского криволинейного движения высокочастотные пространственные локализации поля в фиксированный момент времени [8].

На рис. 1 показаны сечения плоскостями пучка единичной сферы при $v_3=0$ для двух значений A ($A \ll 1$, $A \gg 1$). Случай $A \gg 1$ соответствует либо наблюдению поля вблизи заряда (малые D), либо прямолинейному движению частицы ($\kappa \rightarrow 0$, $A \rightarrow \infty$). Случай $A \ll 1$ соответствует заметному искривлению картины поля по сравнению с прямолинейным движением. Отметим, что для сколь угодно медленного движения по криволинейной траектории ($\beta \rightarrow 0$, $\kappa \neq 0$) всегда найдутся такие запаздывающие расстояния $D \gg 1/(\kappa\beta)$, для которых $A \ll 1$, т. е. будет заметна криволинейная структура поля.

Силовые линии электрического поля. При построении силовых линий электрического поля нужно иметь в виду, что они пронизывают все световые сферы, построенные для данной траектории в фиксированный момент времени. Действительно, произведение $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = e\gamma^2 D^{-1} (1 - \beta v_2)^{-2}$ никогда не обращается в нуль. Это значит, что в качестве параметра, описывающего силовую линию электрического поля, можно выбрать радиус световых сфер D . Радиус-вектор \mathbf{Q} , связанный с силовой линией, ищем в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}_0(D) + D(v_1 \mathbf{e}'_1 + v_2 \mathbf{e}'_2 + v_3 \mathbf{e}'_3), \quad (6)$$

где $v_i = v_i(D)$, вектор $\mathbf{r}_0(D)$ описывает движение заряда в обратном направлении. Дифференцируя выражение (6) по D , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dD} = & \mathbf{e}'_1 \left(v_1 + \left(\frac{dv_1}{dD} + v_2 \beta \kappa - v_3 \beta \tau \right) D \right) + \mathbf{e}'_2 \left(v_2 - \beta + \right. \\ & \left. + \left(\frac{dv_2}{dD} - v_1 \beta \kappa \right) D \right) + \mathbf{e}'_3 \left(v_3 + \left(\frac{dv_3}{dD} + v_1 \beta \tau \right) D \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где τ — кручение орбиты. Компоненты вектора $d\mathbf{Q}/dD$ пропорциональны компонентам электрического поля, если выполняются соотношения [8]

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dD} &= -\beta \kappa \gamma^2 v_2 + \beta \tau v_3 + \beta^2 \kappa \gamma^2 (1 - v_1^2) - \frac{v_1 v_2}{\beta \gamma} \frac{d\gamma}{dD}, \\ \frac{dv_2}{dD} &= \beta \kappa \gamma^2 v_1 - \beta^2 \kappa \gamma^2 v_1 v_2 + \frac{1 - v_2^2}{\beta \gamma} \frac{d\gamma}{dD}, \\ \frac{dv_3}{dD} &= -\beta \tau v_1 - \beta^2 \kappa \gamma^2 v_1 v_3 - \frac{v_2 v_3}{\beta \gamma} \frac{d\gamma}{dD}, \end{aligned} \quad (8)$$

где β , γ , κ , τ в общем случае функции D . Для величин v_1, v_2, v_3 снова выполняется соотношение $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Сделаем замену вида

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos \theta \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\gamma (1 - \beta v)}, \quad v_2 = \frac{\beta - v}{1 - \beta v}, \\ v_3 &= \sin \theta \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\gamma (1 - \beta v)}, \quad d\varphi = -\beta \kappa \gamma dD, \end{aligned} \quad (9)$$

систему (8) можно упростить:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \sqrt{1 - v^2} \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = b + \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \sin \theta, \quad (10)$$

где $b = \tau / (\kappa \gamma)$. Эти уравнения гамильтоновы с гамильтонианом $H = -b\nu + \sqrt{1 - \nu^2} \sin \theta$, который при $b = \text{const}$ является интегралом системы.

Заметим, что это условие выполняется, например, для произвольного плоского движения.

В случае $b = \text{const}$ явные решения для функций ν и θ имеют вид

$$\nu = \frac{z \sqrt{1 + b^2 - H_0^2} - bH_0}{1 + b^2}, \quad \theta = \arcsin \frac{H_0 + b\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}, \quad (11)$$

где $z = \sin(\sqrt{1 + b^2}(\varphi - \varphi_0))$, $\varphi_0 = \text{const}$; постоянная H_0 по модулю ограничена величиной $\sqrt{1 + b^2}$. неподвижные точки системы (10) соответствуют $|H_0| = \sqrt{1 + b^2}$:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{\beta \sqrt{1 + b^2} \pm b}{\sqrt{1 + b^2} \pm \beta b}, \quad \nu_3 = \pm \frac{1}{\gamma(\sqrt{1 + b^2} \pm \beta b)}, \quad (12)$$

сепаратрисы на фазовой плоскости (ν, θ) определяются значениями $|H_0| = b$.

Решения (11) определяют движение по окружностям единичной сферы в пространстве (ν_1, ν_2, ν_3) , образованным сечениями этой сферы пучком проходящих через точку $(0, \beta^{-1}, -\beta \gamma^{-1})$ и перпендикулярных осям ν_2, ν_3 плоскостей. Подставляя выражения (11) в формулу (8), найдем вид силовых линий в реальном пространстве.

Как отмечалось [2], для полей точечного заряда систему электрических силовых линий можно сделать релятивистски инвариантной, если считать, что эти линии движутся перпендикулярно своему направлению и перпендикулярно вектору магнитного поля с «дрейфовой скоростью» v_E , равной

$$v_E = \frac{[(\nu_1(\beta + s) + p(\nu_2 - \beta))^2 + \nu_3^2((\beta + s)^2 + p^2(1 - \beta^2))]^{1/2} c}{[(\nu_1(\beta + s) + p(\nu_2 - \beta))^2 + \nu_3((\beta + s)^2 + p^2(1 - \beta^2)) + (1 - \beta\nu_2)^2]^{1/2}}, \quad (13)$$

где $p = \beta^2 D \kappa \gamma^2$, $s = \beta D \gamma^2 / c$. Видно, что данная скорость всегда меньше скорости света и обращается в нуль на нейтральной линии магнитного поля, где $\nu_3 = 0$, $\nu_1(\beta + s) + p(\nu_2 - \beta) = 0$.

Силовые линии электрического поля синхротронного излучения.

На рис. 2—5 изображены электрические силовые линии для нескольких значений лоренц-фактора γ заряда, равномерно движущегося по окружности радиуса R . Направление движения указано стрелкой. Представленные линии соответствуют десяти эквидистантным значениям фазы φ_0 в формулах (11). Угол наклона силовой линии ψ по отношению к скорости заряда в момент времени наблюдения определяется соотношением $\text{tg } \psi = -\gamma \text{tg } \varphi_0$. Для этого момента времени силовая линия описывается параметром D , совершая γ оборотов вокруг частицы при изменении D на величину $2\pi R / \beta$. При равномерном изменении D получаемые точки силовой линии графопроектором соединялись ступеньками — разницей в их масштабе соответствует неравномерному прохождению силовой линии. Скорость прохождения максимальна для отрицательных значений ν_2 , т. е. когда силовая линия формируется сигналами, испущенными против движения заряда. В релятивистских случаях ν_2 близко к единице почти на всем интервале ее периодичности, равном $2\pi R / (\beta \gamma)$, и меняет знак на концах этого интервала на длине $\sim R / \gamma^2$. Заметим, что длина периодичности вдоль траектории $2\pi R / \gamma$ (имеется в виду запаздывающее расстояние) совпадает с длиной формирования синхротронного излучения [11].

Картина силовых линий в рассматриваемом аксиально-симметричном случае жестко связана с зарядом и в любой другой момент времени $t+\Delta t$, очевидно, получается ее вращением на угол $\beta c\Delta t/R$.

На рис. 3 изображены силовые линии для заряда с $\gamma=2$. В нескольких точках приведены векторы Пойнтинга, дающие представление о направлениях потока энергии поля синхротронного излучения.

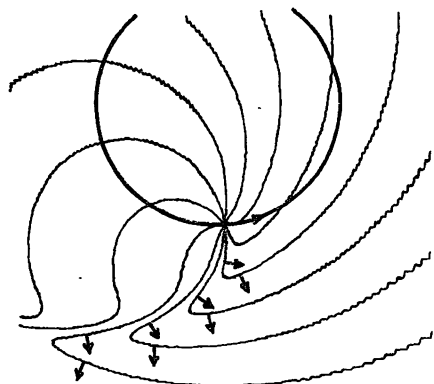


Рис. 2.

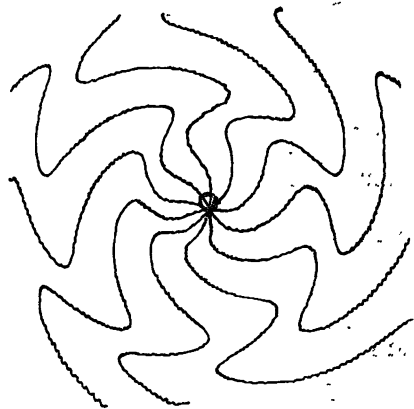


Рис. 3.

Рис. 2. Силовые линии электрического поля заряда, равномерно движущегося по окружности. Направление движения указано стрелкой. Лоренц-фактор частицы $\gamma=1,08$.

Рис. 3. То же для $\gamma=2$. Стрелками указано направление векторов Пойнтинга в нескольких точках.

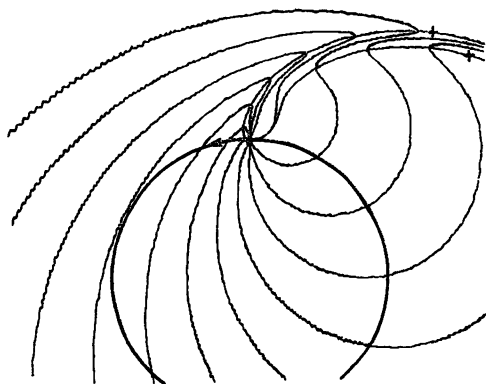


Рис. 4.

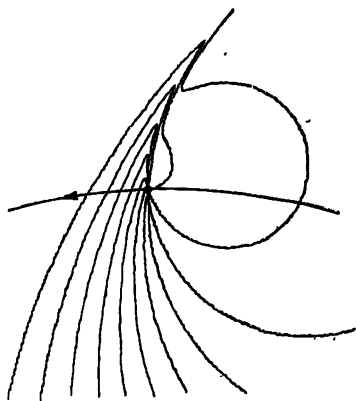


Рис. 5.

Рис. 4. То же для $\gamma=2,5$. Крестиком отмечена нейтральная линия магнитного поля, отмечающая пространственную локализацию высокочастотной части поля (называемую нами γ -областью).

Рис. 5. То же для $\gamma=6$. Виден характерный масштаб γ -области $\sim R/\gamma^3$ (эта величина совпадает с характерной длиной волны синхротронного излучения).

В релятивистских случаях ($\gamma=2; 2,5; 6$; рис. 3—5) видно сгущение силовых линий в пределах так называемой γ -области, где поля существенно зависят от γ . На рис. 4 эта γ -область отмечена нейтральной линией магнитного поля (помечена крестиком). Изображение силовых линий в ультрарелятивистских случаях в пределах одного рисунка затруднено из-за наличия трех масштабных величин: R/γ^3 —поперечного размера γ -области, R/γ^2 —максимального размера области, где силовые линии можно аппроксимировать прямыми, и R/γ —длины Z -образного участка силовой линии вдоль γ -области.

Наглядная картина поля движущегося в вакууме заряда, которую дают силовые линии, представляется хорошим дополнением в электродинамических задачах, где используется спектральный, либо лиенар-вихертовский подход для расчета поля. Кроме того, найденные в работе формулы для силовых линий произвольно движущегося заряда в ряде задач могут иметь самостоятельный интерес.

Предварительный анализ геометрии поля отдельных зарядов существен при определении коллективных сил взаимодействия в релятивистских пучках ускорителей и накопителей. Критерием искажения кулоновских полей отдельных частиц может служить отклонение электрических силовых линий от исходящих из заряда прямых. Отношение характерных размеров кулоновских областей к среднему расстоянию между частицами определяет влияние кривизны траекторий на суммарные силы Лоренца в пучке. Так, для электронного кольцевого накопителя PETRA [9] характерные размеры кулоновских полей $\sim R\gamma^{-2} \approx 2,6 \cdot 10^{-5}$ см, в то время как среднее расстояние между частицами $\approx 3 \cdot 10^{-4}$ см. Существенно также, что вне кулоновских областей двухчастичная сила Лоренца не содержит обратных степеней γ , возникающих во взаимодействии частиц в прямолинейных пучках.

С помощью построения силовых линий одного заряда можно находить траектории частиц, дающие интерференционные максимумы поля в заданных областях. Например, из предыдущего анализа легко определяются условия, когда выделенная в пространстве окружность будет являться силовой линией магнитного поля всех частиц пучка в некоторый момент времени. Такой интерференционный максимум поля торондального типа может быть получен модуляцией пучка в однородном магнитном поле.

Автор выражает благодарность В. Л. Гинзбургу и Б. М. Болотовскому за полезные замечания, высказанные на семинаре, А. Ц. Ама-туни, Г. А. Нагорскому за многочисленные стимулирующие дискуссии и Г. В. Карагеяну за помощь при оформлении рисунков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля — М.: Наука, 1973, § 63.
2. Леонтович М. А. — УФН, 1964, 84, № 4, с. 715.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1966.
4. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики. — М.: Наука, 1975, т. 2, § 5.7.
5. Fulton T., Rohrlich F. — Ann. Phys., 1960, 9, p. 499
6. Ватсон Дж. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, гл. 17.
7. Арутюян С. Г. Препринт ЕФИ-387-(45)-79. — Ереван, 1979.
8. Агинян М. А., Арутюян С. Г. Препринт ЕФИ-684(74)-83. — Ереван, 1983.
9. Catalogue of high-energy accelerators, XI-th Int. Conf. on High Energy Accel. — Geneva: CERN, 1980.
10. Болотовский Б. М. Труды ФИАН. — М.: Наука, 1982, т. 140, с. 95.

Ереванский физический институт

Поступила в редакцию
7 мая 1984 г.

ELECTRIC AND MAGNETIC FORCE LINES OF AN ARBITRARY MOVING CHARGE

S. G. Arulunian

Ordinary differential equations which determine the force lines of electric and magnetic fields of an arbitrary moving charge are found. For magnetic field this equation have been solved in the general forme and electric field in the case when $\tau/(\gamma\kappa)$ —a constant, where γ —is the particle Lorents factor, κ and τ —are the trajectory curvature and twisting.