

УДК 621 372 8

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗЛИЧЕНИЯ ЛУЧЕЙ В ВОЛНОВОДЕ ПО УГЛАМ ИХ ПРИХОДОВ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

А. Л. Вировлянский, А. Н. Малахов, М. М. Славинский

В приближении геометрической оптики, а также в рамках подхода, объединяющего модовое и лучевое представления поля точечного источника в плоскослоистом волноводе, получены оценки точности, с которой могут быть измерены углы приходов различных лучей в фиксированную точку пространства. Оценки выполнены для случая, когда измерения проводятся с помощью линейной синфазной антенны. Предполагается полное отсутствие помех и флуктуаций среды. Использование двух разных представлений позволило достаточно детально проанализировать структуру поля, представляющего вклад отдельного луча в суммарную волновую картину.

1. Одной из важных областей применения метода геометрической оптики является расчет полей монохроматических точечных источников в многомодовых волноводах различной физической природы [1-4]. Характерная особенность лучевых картин в такого рода задачах заключается в том, что в любую освещенную точку пространства обычно приходит много (часто бесконечно много) лучей. Это обстоятельство, очевидно, затрудняет измерение углов приходов лучей. Более того, поскольку точность измерения углов всегда конечна, часть лучей (во многих случаях подавляющее большинство) вообще нельзя разрешить. В отличие от неволноводных задач такая ситуация имеет место не только вблизи каустики, но и в тех точках пространства, где приближение геометрической оптики хорошо «работает».

В связи с этим возникает потребность в количественных оценках точности измерений, показывающих возможность или невозможность выделения того или иного представителя совокупности приходящих в заданную точку лучей. В данной работе такие оценки получены для случая, когда измерения проводятся с помощью линейной синфазной антенны (антенна представляет собой отрезок прямой линии, и сигнал на ее выходе пропорционален сумме значений волнового поля во всех точках отрезка).

Целью работы является выяснение тех «первичных» факторов, препятствующих разрешению части лучей, которые имеются в любом волноводном канале и не связаны с наличием разного рода помех и флуктуаций среды. Поэтому речь здесь идет только о стационарных во времени и однородных вдоль трассы плоскослоистых волноводах.

Необходимые оценки получены двумя существенно разными способами. Один из них основан на использовании обычных уравнений геометрической оптики (разд. 2, 3). Другой (разд. 4) базируется на результатах известной работы Тиндля и Гатри [5] (эти результаты изложены в [4]), где показано, что вклад отдельных лучей в суммарное волновое поле обусловлен конструктивной интерференцией (сложением в фазе) групп мод с близкими номерами. Возможность взглянуть на обсуждаемую проблему с двух разных точек зрения поз-

воляет глубже понять суть дела и выработать простой критерий для определения тех лучей, которые можно разрешить с помощью линейной антенны (разд. 5).

Результаты работы не исчерпываются только лишь получением упомянутых выше оценок. Сопоставление модового и лучевого подходов дает возможность детально исследовать структуру «вклада» одного луча в суммарное волновое поле при конечной длине волны. В частности, указаны условия, когда приход луча в точку наблюдения можно интерпретировать как приход пучка из нескольких плоских волн.

2. Далее предполагается, что измерение углов приходов лучей производится следующим образом. Центр линейной антенны закрепляется в точке наблюдения и снимается график зависимости сигнала на выходе антенны от угла ее поворота вокруг центра. Максимумы сигнала отвечают направлениям на отдельные лучи.

Приход каждого луча означает приход волны с неплоским фазовым фронтом, форма которого не зависит от длины волны λ . При $\lambda \rightarrow 0$ каждая такая волна в точке приема «выглядит» как плоская и угол ее прихода — угол прихода луча — может быть измерен с любой точностью антенной малой апертуры. При конечной λ для повышения точности измерений нужно увеличивать размер апертуры L . Однако вследствие конечной кривизны фазового фронта такое увеличение, начиная с некоторого критического значения, становится нецелесообразным. Поясним этот важный для дальнейшего момент более подробно.

Аппроксимируем фазовый фронт вблизи антенны дугой окружности радиуса R (R — радиус кривизны линии постоянной фазы в центре антенны) и формально будем считать, что принимается сигнал от точечного источника, удаленного на расстояние R от места приема. Очевидно, что увеличение L ведет к уменьшению Δ — ширины главного максимума зависимости амплитуды принимаемого сигнала от угла поворота антенны — лишь до тех пор, пока источник не окажется в прожекторной зоне антенны, т. е. до тех пор, пока L не достигнет значения $L^* = \sqrt{\lambda R}$. Поэтому в точке $L = L^*$ зависимость $\Delta(L)$ имеет минимум, равный $\Delta^* = \sqrt{\lambda/R}$.

При использовании этой формулы следует иметь в виду, что длина волны в разных точках волновода зависит от величины показателя преломления n в этих точках. Чтобы избежать путаницы, буквой λ ниже всюду обозначена длина волны вблизи источника (показатель преломления там считаем равным единице). При этом выражения для Δ^* и L^* в произвольной точке волновода имеют вид

$$\Delta^* = \sqrt{\lambda/nR}, \quad L^* = \sqrt{\lambda R/n}. \quad (1)$$

В дальнейшем мы ограничимся этой довольно грубой оценкой. Для ее уточнения в первую очередь следовало бы более четко определить, что, собственно, следует считать шириной основного максимума принимаемого сигнала. Выбор того или иного определения этой величины (т. е. Δ) приведет к появлению в правой части (1) множителя порядка единицы.

Итак, установлено, что существует оптимальный размер апертуры линейной антенны L^* , при котором достигается наиболее точное определение угла прихода луча. Для каждого луча имеется свое L^* . Далее, не оговаривая этого каждый раз особо, будем считать, что измерения проводятся с помощью именно таких «оптимальных» антенн.

3. В плоскослойных волноводах (в этой статье речь идет только о них) траектории всех лучей, приходящих в заданную точку пространства после выхода из точечного источника, целиком лежат в одной

и той же плоскости. В ней же, очевидно, должна быть размещена и приемная антенна. В этой плоскости введем декартову систему координат x, y . Ось y совместим с направлением изменения показателя преломления n . Пусть источник расположен в точке $(0, y_0)$. Без ограничения общности можно считать, что $n(y_0) = 1$. Траектории выходящих из источника лучей задаются соотношениями $x = x(\chi, y)$ или в развернутом виде [2]:

$$x = Nd(\chi) \pm D(y_{\max}, y_0; \chi) \pm D(y_{\max}, y; \chi). \quad (2)$$

Здесь χ — угол выхода луча из источника по отношению к оси x (положительные χ соответствуют выходу «вверх», т. е. в направлении $y > y_0$),

$D(y_{\max}, y; \chi) = \cos \chi \int_y^{y_{\max}} dy \sqrt{n^2(y) - \cos^2 \chi}$, где y_{\max} — ордината верхней точки заворота луча, $d(\chi) = 2D(y_{\max}, y_{\min}; \chi)$, где y_{\min} — ордината нижней точки заворота луча, N — число полных циклов осцилляций лучевой траектории. Смысл величин D и d пояснен на рис. 1.

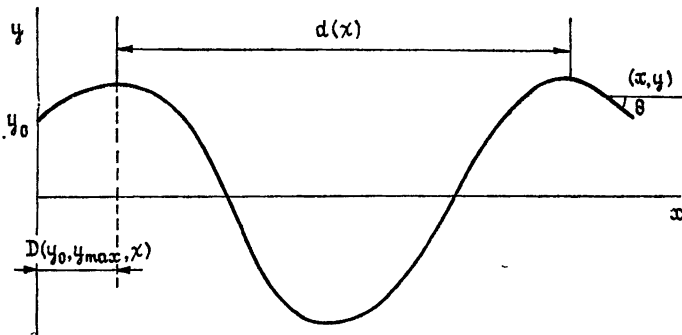


Рис. 1.

Вычисление радиуса кривизны фазового фронта волны, приход которой означает приход одного из лучей в точку (x, y) , выполнено в Приложении. Соответствующая формула имеет вид (радиус кривизны вычислен в точке (x, y)):

$$R = \left| \frac{n^3(y) \sin^2 \theta}{\frac{dn}{dy} \cos^2 \chi \sin \theta + n^2 \sin \chi \frac{\partial \chi}{\partial x}} \right|, \quad (3)$$

где θ — угол прихода луча по отношению к оси x (см. рис. 1), $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(\frac{\partial x(\chi, y)}{\partial \chi} \right)^{-1}$. Величины углов θ и χ связаны законом Снеллуса: $\cos \chi = n \cos \theta$.

Подстановка (3) в (1) дает оценку точности, с которой может быть измерен угол прихода каждого конкретного луча. При решении вопроса о возможности различения отдельных лучей будем руководствоваться критерием Рэлея [8]. Согласно ему луч можно разрешить, если соответствующее Δ^* не превышает наименьшей из разностей $|\theta - \theta_j|$, где через θ_j обозначены углы приходов всех других лучей, попадающих в точку (x, y) . Обратим внимание на то, что R обращается в нуль при $\partial \chi / \partial x = \infty$ (в точках касания каустик). В этих точках луч заведомо нельзя разрешить,

4. Рассмотрим другой подход к решению обсуждаемой здесь проблемы. Воспользуемся модовым представлением поля точечного источника в волноводе [2, 4]:

$$\rho = A \sum_m \varphi_m(y) \varphi_m(y_0) H_0^{(1)}(k \xi_m x), \quad (1)$$

где ρ — величина поля в точке (x, y) , A — константа, $\varphi_m(y)$ — собственная функция, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, $k \xi_m$ — продольное волновое число m -й моды, $k = 2\pi/\lambda$.

Заменим $H_0^{(1)}$ ее асимптотикой при больших значениях аргумента, а $\varphi_m(y)$ и ξ_m — их ВКБ-приближениями. Быстроосциллирующие косинусы, входящие в выражения для $\varphi_m(y)$ и $\varphi_m(y_0)$ [2, 4], представим в виде сумм экспонент. При этом каждое слагаемое в (4) превратится в четыре слагаемых, которые будем называть неполными модами. Фаза одной такой неполной моды задается выражением [4]

$$\Phi_m = k \xi_m x \pm k \int_y^{y_m} \sqrt{n^2(y) - \xi_m^2} dy \pm k \int_{y_0}^{y_m} \sqrt{n^2(y) - \xi_m^2} dy. \quad (5)$$

Здесь y_m — наибольший из корней уравнения $n(y) = \xi_m$ (для простоты считаем, что это уравнение имеет всего два корня, т. е. $n(y)$ имеет всего один максимум, и второй корень обозначим через \underline{y}_m); ξ_m определяется соотношением

$$k \int_{\underline{y}_m}^{y_m} \sqrt{n^2(y) - \xi_m^2} dy = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (6)$$

где M — номер последней распространяющейся моды.

Формально рассматривая $\Phi_m(x, y)$ как эйконал некоего волнового поля, можно найти соответствующую ему систему лучей. Легко проверить [4], что все их траектории получаются смещением вдоль оси x траектории одного луча, который далее будем называть модовым лучом. Его траектория задается соотношением (2) с $\chi = \chi_m = \arccos \xi_m$. Определенные таким образом модовые лучи не надо путать с теми «истинными» лучами, вышедшими из источника, об измерении углов которых здесь идет речь. Во избежание недоразумений последние в дальнейшем будем называть геометрикооптическими лучами.

В работах [5, 6] (см. также [4]) показано, что вклад отдельного геометрикооптического луча в суммарное волновое поле в точке (x, y) определяется вкладом группы неполных мод с близкими номерами, разности фаз которых в этой точке мало отличаются от $2\pi N$, где N — целое число. Номер центральной моды каждой такой группы находится из соотношения

$$\partial \Phi_m / \partial m = -2\pi N, \quad (7)$$

где m формально рассматривается как непрерывная переменная, N — целое число. Каждое m , удовлетворяющее (7), задает определенный модовый луч со своим χ_m , которое примерно совпадает с χ — углом выхода из источника геометрикооптического луча, соответствующего данной группе неполных мод. Фигурирующее в (7) N — это число полных циклов лучевой траектории (в формуле (2) стоит то же самое M).

Разность $\chi_{m+1} - \chi_m = d\chi_m/dm$ легко найти с помощью следующей из (6) формулы [4] $k d\xi_m/dm = -2\pi/d(\chi_m)$. С учетом соотношения $\xi_m = \cos \chi_m$ получаем

$$d\chi_m/dm = \lambda/d(\chi_m) \sin \chi_m. \quad (8)$$

Количество неполных мод, входящих в группу, легко оценить, исходя из того, что крайние представители этой группы должны складываться в противофазе. Другими словами, $\Delta m = m_{\max} - m_{\min}$ (m_{\max} и m_{\min} — соответственно наибольший и наименьший номера неполных мод, входящих в группу, отвечающую данному лучу) находится из соотношения $(1/2) |\partial^2 \Phi_m / \partial m^2| (\Delta m / 2)^2 = \pi / 2$. Пользуясь (2), (5) — (8), несложно показать, что

$$\Delta m = d(\gamma_m) \left| 2 \sin \gamma_m / \lambda \frac{\partial x(\gamma_m, y)}{\partial \gamma} \right|^{1/2}.$$

Опираясь на эту формулу, оценим величину интервала углов приходов модовых лучей из исследуемой группы неполных мод. Искомая оценка, очевидно, равна $\delta \theta = \Delta m \frac{d\theta_m}{dm}$. Для нахождения $\frac{d\theta_m}{dm}$ используем закон

Снеллуса ($\cos \chi_m = n(y) \cos \theta_m$) и (8). Опуская простые выкладки, приведем результат

$$\delta \theta = \frac{1}{n(y)} \left| 2 \lambda \sin \gamma_m / \sin^2 \theta_m \frac{\partial x(\gamma_m, y)}{\partial \gamma} \right|^{1/2}. \quad (9)$$

Далее будем считать, что группа неполных мод, состав которой определяется приведенными выше формулами, в окрестности точки наблюдения описывает полс волны, приход которой означает приход в точку (x, y) отдельного геометрического луча. Строго говоря, это не так. На самом деле описания поля данной волны в соседних с (x, y) точках, очевидно, надо брать моды с номерами m , принадлежащими интервалам, несколько отличающимся друг от друга. Интересуясь здесь лишь оценками, мы пренебрежем этими отличиями.

Прежде чем перейти к обсуждению вопроса о точности измерения углов приходов лучей, вычислим величину радиуса кривизны линии постоянной фазы фиксированной неполной моды в точке (x, y) . Эта линия неявно задается соотношением $\Phi_m(x, y) = \text{const}$. Вместо Φ_m сюда надо подставить правую часть (5). Пользуясь стандартными формулами [7], найдем, что искомый радиус кривизны равен

$$R_m = n^3 |\sin \theta_m| / |dn/dy| \cos^2 \chi_m. \quad (10)$$

Сравним (10) и (3). Как легко видеть, R_m совпадает с $R(\chi_m \approx \bar{\chi})$, если второе слагаемое в знаменателе (3) много меньше первого. В противоположном случае, т. е. когда второе слагаемое много больше первого*, $R_m \gg R$. При этом антенна с апертурой L^* «воспринимает» все неполные моды как плоские волны. Интервал углов их приходов (см. (9)), как и должно быть, с точностью до множителя порядка единицы совпадает с Δ^* , вычисленным по формулам (1) и (3). Таким образом, точность измерения угла прихода геометрического луча тут ограничена величиной интервала углов приходов модовых лучей. При $R_m \approx R$ положение иное. Точность измерений тут ограничена кривизной фазовых фронтов неполных мод. Разброс углов приходов модовых лучей при этом проявляется слабо.

5. Укажем способ, позволяющий довольно просто делать заключения о возможности или невозможности разрешения того или иного луча в случае, когда $R_m \gg R$ (поскольку речь идет о достаточно грубых оценках, знак \gg можно заменить на $>$). Очевидно, геометрически-

* Такая ситуация обязательно имеет место по крайней мере в некоторых частях волновода, поскольку на каустиках $\partial \chi / \partial x = \infty$. В волноводах с постоянным n и отражающими стенками каустик нет, но зато там $dn/dy = 0$.

кий луч разрешим, если большинство представителей соответствующей ему группы неполных мод не входят в группы, соответствующие другим лучам, приходящим в точку наблюдения. При этом $\delta\theta$ (или Δ^*) меньше разности углов приходов данного и «ближайшего» к нему геометрико-оптических лучей.

В соответствии со сказанным ряд важных заключений можно сделать из простого сравнения двух последовательностей $\{\theta_i\}$ и $\{\theta_m\}$, где θ_i — углы приходов геометрико-оптических лучей в точку наблюдения, а θ_m — углы приходов модовых лучей. Легко понять, что в тех частях интервала значений углов θ (от $-\pi/2$ до $\pi/2$), где точки θ_i лежат «гуще», чем точки θ_m , лучи, приходящие под углами θ_i , заведомо нельзя разрешить. Подобная ситуация обязательно имеет место для части лучей, если последовательность $\{\theta_i\}$ состоит из бесконечного числа членов (последовательность $\{\theta_m\}$ в любом волноводе имеет конечное число членов). Таким образом, из бесконечного количества приходящих в точку наблюдения лучей всегда можно различить лишь конечное их число.

Из сравнения указанных последовательностей легко видеть, как меняется количество разрешимых лучей с изменением λ и с изменением длины трассы. Пусть, например, λ уменьшается. Это ведет к увеличению количества распространяющихся мод и, следовательно, к увеличению «густоты» последовательности $\{\theta_m\}$. Последовательность $\{\theta_i\}$ при этом не меняется. Отсюда ясно, что с уменьшением λ количество разрешимых лучей увеличивается. Изменение длины трассы, наоборот, мало влияет на последовательность $\{\theta_m\}$ (предполагается, что ордината точки наблюдения не меняется). Последовательность $\{\theta_i\}$, напротив, в большинстве случаев с увеличением (уменьшением) длины трассы становится более «густой» («редкой»). Следовательно, количество разрешимых лучей с увеличением длины трассы уменьшается.

Отметим, кстати, что в том интервале углов, где точки последовательности $\{\theta_m\}$ лежат реже, чем точки последовательности $\{\theta_i\}$, выходной сигнал антенны как функция угла поворота может иметь максимумы, отвечающие приходам модовых лучей. Таким образом, в этом интервале углов линейная антенна может быть использована для анализа модовой структуры звукового поля.

В случае, когда $R_m \approx R$, «непересечение» групп неполных мод является хотя и необходимым, но не достаточным условием возможности разрешения лучей. Однако и здесь сравнение последовательностей $\{\theta_i\}$ и $\{\theta_m\}$ позволяет определить те лучи (хотя и не все), которые заведомо нельзя разрешить.

Авторы благодарны С. Н. Гурбатову, А. А. Мальцеву, А. В. Полонкину и А. И. Саичеву за полезные обсуждения. Мы также признательны В. И. Таланову, предложившему простой вывод (изложенный в разд. 2) соотношений (1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим один из лучей, попадающих в точку наблюдения. Пусть линия фазового фронта соответствующей ему волны задается функцией $y=f(x)$. Тогда радиус кривизны этой линии в точке (x, y) определяется формулой [7]

$$R = \frac{[1 + (\partial f / \partial x)^2]^{3/2}}{|d^2 f / dx^2|}, \quad (\text{П.1})$$

Поскольку касательная к фазовому фронту в точке (x, y) перпендикулярна лучу, то

$$df/dx = \operatorname{ctg} \theta. \quad (\text{П.2})$$

(Определение θ и других используемых ниже величин см. в разд. 3.) Дифференцируя это выражение по x , получим

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dx}. \quad (\text{П.3})$$

При вычислении производной в правой части, θ следует рассматривать как функцию x и y , причем $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \theta(x, f(x))$. Воспользуемся законом Снеллиуса, согласно которому $\cos \chi = n(f(x)) \cos \theta$. Продифференцируем это равенство по x : $-\sin \chi \frac{d\chi}{dx} = \frac{dn}{dy} \frac{df}{dx} \cos \theta - n \sin \theta \frac{d\theta}{dx}$. Выражая отсюда $d\theta/dx$ и подставляя его в (П.3), с учетом (П.2) найдем, что

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{n \sin^3 \theta} \left[\frac{dn}{dy} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \chi \frac{d\chi}{dx} \right]. \quad (\text{П.4})$$

Относительно вычисления фигурирующей в двух последних формулах производной $d\chi/dx$ следует повторить то, что было выше сказано про $d\theta/dx$. Нетрудно показать, что $\frac{d\chi}{dx} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial x(x, y)}{\partial \chi} \right]^{-1}$, где $x(\chi, y)$ — правая часть равенства $x = x(\chi, y)$, задающего траектории лучей. Подставляя это соотношение в (П.4), а затем (П.4) и (П.2) в (П.1), получим приведенную в разд. 3 формулу (3).

Как следует из приведенного здесь вывода, эта формула остается справедливой в любой плоскослойной среде.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980
- 2 Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
- 3 Гуревич А. В., Цедиллина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
- 4 Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоназдат, 1982
- 5 Tindle C. T., Guthrie K. M. — J. Sound Vibr., 1974, 34, p. 291.
- 6 Guthrie K. M., Tindle C. T. — J. Sound Vibr., 1976, 47, p. 403.
- 7 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.
- 8 Ландсберг Г. С. Оптика. — М.: Наука, 1976.

Институт прикладной физики
АИ СССР

ON THE POSSIBILITY OF DISTINCTION OF RAYS A WAVEGUIDE BY THEIR ANGLES OF ARRIVAL USING A LINEAR ANTENNA

A. L. Virovlyanskij, A. N. Malakhov, M. M. Slavinskij

In the approximation of a geometrical optics as well as in the framework of the approach combining a mode and a ray concepts of the field of a point source in a plane-layered waveguide, the estimates of a precision of measuring the angles of arrival of different rays to a fixed point in space are obtained. The estimates are for the case of measuring with the aid of a linear broadside array supposing that there is no interference and medium fluctuations. The use of two different approaches allows a detailed analysis of the field structure representing the contribution of a separate ray into a total wave picture.