ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.56:519.25

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Л. Апресян

Рассматривается одномерная задача о рассеянии излучения на слое с быстрыми (квазидельта—коррелированными по времени) пространственно-временными флуктуациями скорости распространения волны. Для двухточечных пространственных корреляций поля получены замкнутые линейные уравнения типа уравнения переноса. Показано, что в случае монохроматической падающей волны из уравнений для вторых моментов при определенных условиях следует существование пороговой толщины слоя, ниже которой возможен установившийся режим с ограниченными амплитудами; слой, имеющий большую толщину, играет роль параметрического усилителя, дающего неограниченный рост амплитуд рассеянных волн.

Рассмотрим одномерную задачу о рассеянии волн на слое $0\leqslant x\leqslant L$ с пространственно-временными случайными неоднородностями. Поле u будем описывать скалярным волновым уравнением

$$(-\partial_x^2+\partial_t\varepsilon\partial_t)u\equiv(\partial_t^2-\partial_x^2+\partial_t\tilde{\varepsilon}\partial_t)u=g, \tag{1}$$

где $\partial_t\equiv\partial/\partial t$, g — функция источников, а t — время, измеряемое в единицах длины: $t=ct'$, c — скорость свободного распространения излучения, t' — обычное время. Описывающая неоднородности случайная величина $\varepsilon=1+\tilde{\varepsilon}$ испытывает малые пространственно-временные флуктуации $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}(x,t)$, $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle\ll 1$, вблизи среднего значения $\langle\varepsilon\rangle=1$ (так что $\langle\tilde{\varepsilon}\rangle=0$).

Модельное уравнение (1) является одним из возможных обобщений обычного волнового уравнения на случай среды с зависящими от времени флуктуациями. Для статической среды, когда ε не зависит от t, $\partial_t\varepsilon\partial_t=\partial_t^2\varepsilon$, так что (1) совпадает с обычным волновым уравнением с источником g. Для нестационарной среды, когда $\varepsilon=\varepsilon(x,t)$, использованный в (1) порядок следования символов в произведении $\partial_t\varepsilon\partial_t$ позволяет записать это уравнение в гамильтоновой (или лагранжевой) форме (см. ниже).

Случай статической среды подробно изучен в литературе (см., например, [1,2]). Здесь будет рассматриваться противоположный статическому случай быстрых (квазидельта-коррелированных по времени) пространственно-временных флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x,t)$. Эта задача изучалась ранее в [3], где были получены уравнения для среднего поля, и в работе [4], в которой первые два момента рассматривались с помощью асимптотического метода двухмасштабных разложений. При этом как в [3], так и в [4] исследовался случай конечного импульса в неограниченной среде. В отличие от этого в данной работе мы рассмотрим установившийся режим, создаваемый бесконечно удаленными монохроматическими источниками при наличии ограниченного рассеивающего слоя.

Поскольку флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ считаются отличными от нуля лишь в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, можно записать $\tilde{\varepsilon} = \mu \theta_L(x)$, где $\theta_L(x)$ — ступенчатая функция, равная единице — внутри, и нулю — вне слоя $0 \leqslant x \leqslant L$. Случайную функцию $\mu = \mu(x, t)$ ($\langle \mu \rangle = 0$) мы будем считать статистически однородной и стационарной, а слой — толстым по сравнению с характерным размером неоднородностей $l_к$, которые предполагаются одномасштабными: $L \gg l_к$. При этом мы не будем учитывать краевые эффекты, связанные с пограничными областями слоя толщиной порядка $l_к$ математически это выражается, в частности, в том, что при дифференцировании функции $\tilde{\varepsilon} = \mu \theta_L(x)$ по x мы будем рассматривать $\theta_L(x)$ как постоянную величину, пренебрегая тем самым наличием неоднородностей на границах слоя $x=0$ и $x=L$).

Уравнение (1) является динамически причинным по времени и, дополненное начальными значениями $u_0 = u(x, 0)$ и $\dot{u}_0 = \partial_t u(x, 0)$, однозначно определяет u при $t \geqslant 0$. В обобщенной постановке задача Коши для (1) сводится к неоднородному уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + \partial_t \tilde{\varepsilon} \partial_t) u = u_0 \dot{\delta}(t) + \dot{u}_0 \delta(t) + g \equiv q, \qquad (2)$$

рассматриваемому в классе функций, равных нулю при $t<0$ [5] (для простоты начальные значения u_0 и $\dot{u}_0$ считаются отличными от нуля лишь вне слоя $0 \leqslant x \leqslant L$).

От уравнения второго порядка (2) удобно перейти к системе двух уравнений первого порядка. Физически наиболее оправданным является переход к уравнениям для взаимодействующих встречных волн, которые можно получить следующим образом.

Воспользовавшись оператором Грина для свободного распространения

$$\hat{G} = \left(\partial_t^2 - \partial_x^2 \right)^{-1} = \frac{1}{2}\, \theta\, (t - |x|) * = \hat{G}_+ + \hat{G}_-,$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, $*$ означает свертку по x и по t (см. [5]), а $\hat{G}_\alpha = G_\alpha *$ ($\alpha = \pm$) — операторы с ядрами $G_\alpha = (1/2)\, \theta\, (t - \alpha x)\, \theta\, (\alpha x)$, запишем (2) в интегральной форме. В результате поле u представится в виде суммы взаимодействующих волн $u = u_+ + u_-$, где $u_\alpha \sim G_\alpha$. Дифференцирование выражений для u_+ и u_- с учетом соотношения $(\partial_t + \alpha \partial_x) G_\alpha = (1/2)\, \theta\, (t) \delta(x)$ непосредственно приводит к системе двух уравнений

$$(\partial_t + \alpha \partial_x) u_\alpha = -(\tilde{\varepsilon}/2) \partial_t (u_+ + u_-) + (1/2)\, \theta\, (t) \delta(x) * q, \qquad (3)$$

где α принимает значения $+$ и $-$. В отсутствие рассеивающих неоднородностей (при $\tilde{\varepsilon} = 0$) u_+ и u_- отвечают независимым волнам, распространяющимся в направлениях $+x$ и $-x$ соответственно. Рассеяние приводит к взаимодействию u_+ и u_- внутри слоя $0 \leqslant x \leqslant L$.

Решив (3) относительно $\partial_t u_\alpha$, получаем систему

$$(\partial_t + \alpha \partial_x) u_\alpha = \xi \partial_x (u_+ - u_-) + q_\alpha. \qquad (4)$$

Здесь $\xi = \tilde{\varepsilon}/2\varepsilon = \theta_L(x) \mu / 2(1+\mu)$, $q_+ = q_- = (1/2)\, \theta\, (t) \delta(x) * q$ — обобщенные функции источников для $+$ и $-$ волн, причем функция q, включающая начальные значения u_0, $\dot{u}_0$ и источники поля g, предполагается отличной от нуля лишь вне рассеивающего слоя.

Если свойства среды меняются со временем, то даже в отсутствие источников q энергия поля не сохраняется, что приводит к возможности параметрического усиления волн. Действительно, исходное уравнение (1) можно записать в виде уравнения Лагранжа

$$\partial_t \partial_{\dot{u}} \mathrm{L} + \partial_x \partial_{u'} \mathrm{L} - \partial_u \mathrm{L} = 0$$

для плотности лагранжиана

$$\mathrm{L} = (\varepsilon \dot{u}^2 - (u')^2)/2 + qu,$$

где $u' \equiv \partial_x u$. Такому виду L отвечают плотности потока S и энергии W, равные

$$S = \dot{u} \partial_{u'} \mathrm{L} = -\dot{u} u', \quad W = \dot{u} \partial_{\dot{u}} \mathrm{L} - \mathrm{L} = (\varepsilon \dot{u}^2 + (u')^2)/2 - qu. \tag{5}$$

При $q=0$ для S и W из (1) получаем

$$\partial_t W + \partial_x S = -\dot{\varepsilon} \dot{u}^2/2.$$

Это соотношение обобщает для данной модели закон сохранения энергии $\partial_t W + \partial_x S = 0$, справедливый при $\dot{\varepsilon} = 0$, на случай зависящих от времени флуктуаций, $\dot{\tilde{\varepsilon}} \neq 0$.

Если представить u в виде суммы, $u = u_+ + u_-$, то в отсутствие источников q поток энергии с учетом (4) и (5) выразится как

$$S = S_+ + S_-,$$

где

$$S_\alpha = (i\alpha/\varepsilon)(\partial_x u_\alpha)^2.$$

Интерференционные члены здесь сократились и остались независимые вклады от + и — волн (в отличие от этого, плотность энергии W содержит интерференционные члены).

Систему (4) можно рассматривать при любых, в том числе и случайных начальных условиях. Далее нас будет интересовать установившийся режим, создаваемый удаленными от слоя (локализованными при $x = -\infty$) детерминированными монохроматическими источниками. Этот случай можно описать условиями

$$q_+ = \delta(t) \cos kx\, \theta(-x), \quad q_- = 0, \tag{6}$$

которые отвечают набегающей на слой начальной волне $u_+(x, 0) = \cos kx \theta(-x)$ (напомним, что «включение» всей картины начинается в момент времени $t=0$). В отсутствие рассеяния в соответствии с (4) и (6) мы имеем бегущую без искажений одну волну $u_+ = \cos k(x - t)\theta(t-x)$, причем $u_- = 0$. Наличие рассеяния вызывает появление при $x<L$ обратной волны u_-.

Систему (4) при условии (6) сокращённо можно записать в виде уравнения

$$\partial_t \psi = \Lambda \psi \tag{7}$$

с начальным условием

$$\psi|_{t=0} = \psi^0, \tag{8}$$

где $\psi = (u_\alpha) = (u_+, u_-)$ — двухкомпонентный вектор, $\psi^0 = (\cos kx \times \theta(-x), 0)$, а Λ — матричный оператор с элементами

$$\Lambda_{\alpha\beta} = (-\delta_{\alpha\beta} + \xi)\partial_{\beta x}.$$

Для среднего значения $\bar{\Lambda}$ и флуктуации $\tilde{\Lambda}=\Lambda-\bar{\Lambda}$ отсюда получаем

$$\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}=(-\delta_{\alpha\beta}+\bar{\xi})\partial_{\beta x},\quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}=\tilde{\xi}\partial_{\beta x}. \tag{9}$$

Система (7), (8) имеет стандартный вид задачи Коши для причинного уравнения и позволяет обычным образом записать уравнение Дайсона (УД) для среднего значения $\langle\psi\rangle$. В случае гауссовых и быстрых флуктуаций ξ, время корреляции которых $\tau_к$ меньше всех других характерных времен задачи, $\tau_к\ll\min(l_к,\lambda)$ $(\lambda=2\pi/k)$, а интенсивность $\sigma=\langle\tilde{\xi}^2\rangle^{1/2}$ удовлетворяет неравенству $\sigma\tau_к\ll\min(l_к,\lambda)$ (см. Приложение), при $t\gg\tau_к$ в УД можно перейти к марковскому приближению, имеющему вид

$$\partial_t\langle\psi\rangle=(\bar{\Lambda}+\int\limits_0^\infty dt\langle\tilde{\Lambda}(t)\tilde{\Lambda}(0)\rangle)\langle\psi\rangle. \tag{10}$$

Это приближение известно также под названием «приближения белого шума» [6].

Запишем уравнение (10) более подробно:

$$\partial_t\langle u_\alpha\rangle=\sum_\beta(\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}+M_{\alpha\beta})\langle u_\beta\rangle. \tag{11}$$

Здесь $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}$ определяется согласно (9), а

$$M_{\alpha\beta}=\theta_L(x)\sum_{\gamma=\pm}\int\limits_0^\infty dt\langle\tilde{\xi}(x,t)\partial_{\gamma x}\tilde{\xi}(x,0)\rangle\partial_{\beta x}$$

— матричный оператор, описывающий рассеяние среднего поля на флуктуациях $\tilde{\xi}$, причем мы здесь пренебрегли краевыми эффектами, вынеся $\theta_L(x)$ за знак дифференцирования.

Нетрудно видеть, что после суммирования по γ оператор $M_{\alpha\beta}$ обращается в нуль, так что в рассматриваемом предельном случае среднее поле «не чувствует» флуктуаций $\tilde{\xi}$ и описывается средним значением оператора Λ. Этот результат аналогичен известному выводу марковского приближения для случая параметрически возбужденного осциллятора [1], когда, несмотря на наличие параметрической раскачки в отдельных реализациях, средняя амплитуда «не чувствует» флуктуаций параметров задачи. Заметим, что если отказаться от требования $\tau_к\ll\lambda$, то для $\langle u_\alpha\rangle$ вместо (11) можно записать аналогичное по форме уравнение в «приближении Кубо» [6], которое учитывает временные задержки при распространении среднего поля между актами рассеяния — в этом случае оператор $M_{\alpha\beta}$ будет отличным от нуля, а среднее поле — зависящим от статистики флуктуаций $\tilde{\xi}$. Эта зависимость возникает уже и в марковском приближении (11), если вместо (1) использовать в качестве исходного какое-либо другое (негамильтоново) уравнение, например заменить в (1) $\partial_t\varepsilon\partial_t$ на $\partial_t^2\varepsilon$ (так, рассмотренное в [3] влияние флуктуаций на $\langle u\rangle$ связано именно с отличием исходной модели от нашей).

Поскольку $\langle u_\alpha\rangle$ описывается тем же уравнением, что и u_α, но с заменой ξ на $\bar{\xi}$, среднее поле отвечает рассеянию на однородном слое со средним значением параметра ξ. Если выполнить обратное преобразование от системы уравнений для $\langle u_\alpha\rangle$ к уравнению для $\langle u\rangle$, то мы получим, что среднему полю соответствует постоянная в слое эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1=1/(1-2\bar{\xi})$. Следовательно, в отношении среднего поля рассеяние приводит, во-первых, к изменению характеристик собственных волн в слое и, во-вторых, к появлению отраженной волны. Далее мы не будем учитывать отражения среднего поля, так как для малых флуктуаций $\bar{\xi}\ll 1$ соответствующий коэффициент отражения всегда мал (порядка $\bar{\xi}\ll 1$ для мелкомасштабных флуктуаций, дающих резкую границу слоя, и экспоненциально мал для крупномасштабных флуктуаций с плавной границей слоя). Кроме того, для простоты мы лишь приближенно учтем связанное с рассеянием изменение дисперсионных характеристик для среднего поля в слое, отбросив в выражении для $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}$ (9) недиагональные члены, т. е. полагая

$$\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}\simeq-(1-\bar{\xi})\,\delta_{\alpha\beta}\partial_{\beta x} \tag{12}$$

(это упрощение дает малую по сравнению с $\bar{\xi}$ погрешность в дисперсионном уравнении для среднего поля). После этого учет рассеяния для среднего поля сводится к изменению масштаба по оси x, т. е. к переходу от x к оптическому пути

$$z=z(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-\bar{\xi}}=\begin{cases}x, & x<0\\ x/(1-\bar{\xi}), & 0\leqslant x\leqslant L.\\ L/(1-\bar{\xi})+x-L, & x>L\end{cases} \tag{13}$$

В результате уравнения для $\langle u_\alpha\rangle$ принимают такой же вид, что и в отсутствие рассеивающего слоя

$$(\partial_t+\alpha\partial_z)\,\langle u_\alpha\rangle=0.$$

Решив эту систему при начальном условии (6), получаем

$$\langle u_+\rangle=\cos kx(z-t)\,\theta\,(-x(z-t)),\quad \langle u_-\rangle=0, \tag{14}$$

где функция $x(z)$ обратна функции $z(x)$ (13).

Вполне аналогично можно записать уравнения вида (10) для вторых моментов $I_{\alpha\beta}=\langle u_\alpha(x_1,t)\,u_\beta\,(x_2,t)\rangle$ (см. Приложение):

$$\partial_t I_{\alpha\beta}=-[(1-\bar{\xi}(x_1))\partial_{\alpha x_1}+(1-\bar{\xi}(x_2))\partial_{\beta x_2}]I_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma,\delta}M_{\alpha\beta,\gamma\delta}I_{\gamma\delta}. \tag{15}$$

Здесь

$$M_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\theta_L(x_1)\,\theta_L(x_2)\,b\,(x_1-x_2)\,\partial_{\gamma x_1}\,\partial_{\delta x_2},$$

а

$$b(x)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\langle\bar{\xi}(x,\tau)\,\bar{\xi}\,(0,0)\rangle,$$

причем мы воспользовались «диагональным» приближением (12) для $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}$.

Если перейти от аргументов $x_{1,2}$ к соответствующим оптическим путям $z_{1,2}=z(x_{1,2})$, и затем — к переменным $R=(z_1+z_2)/2$ и $\rho=z_1-z_2$, то система (15) сведется к уравнениям

$$(\partial_t+\partial_R)I_{++}=(\partial_t-\partial_R)I_{--}=(\partial_t+2\partial_\rho)I_{+-}=(\partial_t-2\partial_\rho)I_{-+}=\hat{M}I, \tag{16}$$

где величина $\hat{M}I$ описывает рассеяние на неоднородностях,

$$\hat{M}=\theta_L(x_1)\,\theta_L(x_2)\,\frac{b\,(x_1-x_2)}{(1-\bar{\xi})^2}\left(\frac{1}{4}\,\partial_R^2-\partial_\rho^2\right),$$

а
$$I = I_{++} + I_{--} - I_{+-} - I_{-+}.$$

Представим, как это делается обычно, вторые моменты $I_{\alpha\beta} = \langle\psi_1\psi_2\rangle = \hat{I}$ в виде суммы когерентной составляющей $\hat{I}^{\text{ког}} = \langle\psi_1\rangle\langle\psi_2\rangle$ и некогерентной составляющей $\hat{I}^{\text{нек}} = \langle\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2\rangle$, $\hat{I} = \hat{I}^{\text{ког}} + \hat{I}^{\text{нек}}$. В случае (14) $\hat{I}^{\text{ког}}$ отвечает распространению одной волны $\langle u_+\rangle$ и имеет вид

$$I_{++}^{\text{ког}} = \theta(-x_{1t})\theta(-x_{2t})(1/2)(\cos k(x_{1t} - x_{2t}) + \\ + \cos k(x_{1t} + x_{2t})) \equiv w^{\text{ког}}, \tag{17}$$

$$I_{--}^{\text{ког}} = I_{+-}^{\text{ког}} = I_{-+}^{\text{ког}} = 0,$$

где $x_{lt} = x(z_l - t)$.

Рассматривая корреляции некогерентных волн, удобно перейти к переменным

$$w = I_{++}^{\text{нек}} + I_{--}^{\text{нек}}, \quad s = I_{++}^{\text{нек}} - I_{--}^{\text{нек}}, \quad K_{\pm} = I_{+-}^{\text{нек}} \pm I_{-+}^{\text{нек}}, \tag{18}$$

для которых (16) с учетом (17) дает

$$\partial_t w + \partial_R s = 2\hat{M}(w^{\text{ког}} + w - K_+), \quad \partial_t s + \partial_R w = 0,$$
$$\partial_t K_+ + 2\partial_\rho K_- = 2\hat{M}(w^{\text{ког}} + w - K_+), \quad \partial_t K_- + 2\partial_\rho K_+ = 0. \tag{19}$$

Эта система дополняется нулевыми начальными условиями, так как в начальный момент времени некогерентные волны по предположению отсутствуют.

Как видно из (19), величина $w^{\text{ког}}$ служит источником для некогерентных корреляций поля, причем в соответствии с (17) при $t \to +\infty$ $w^{\text{ког}}$ можно рассматривать как сумму статического источника

$$w_1 = (1/2)\,\mathrm{Re}\, e^{ik\rho} \tag{20}$$

и быстро осциллирующего монохроматического источника на удвоенной частоте $2\omega = 2k$

$$w_2 = (1/2)\cos k(z_1 + z_2 - 2t).$$

Естественно ожидать, что при $t \to +\infty$ должен устанавливаться некоторый периодически нестационарный режим с частотой 2ω.

Нас далее будет интересовать отклик на статический источник w_1, соответствующий постоянной (усредненной за время π/ω) части корреляции $I_{\alpha\beta}^{\text{нек}}$. Сохраняя для этой части корреляций обозначения w, s и $K_\pm$, из (19) получаем

$$\partial_R s = 2\hat{M}(w_1 + w - K_+), \quad \partial_R w = 0,$$
$$\partial_\rho K_- = \hat{M}(w_1 + w - K_+), \quad \partial_\rho K_+ = 0. \tag{21}$$

Отсюда видно, что величина w не зависит от R, а K_+ — от ρ, т. е. $w = w(\rho)$, $K_+ = K_+(R) = 2I_{+-}|_{\rho=0}$. Поэтому первое из уравнений (21) можно записать как

$$\partial_R s \simeq 2(1-\xi)^{-2}\theta_L(R')b(\rho')\left(k^2 e^{ik\rho} - \partial_\rho^2 w(\rho) - (1/4)\partial_R^2 K_+(R)\right), \tag{22}$$

где $R' = (1-\bar{\xi})R$, $\rho' = (1-\bar{\xi})\rho$, причем мы положили приближенно $\rho=0$ в аргументах функций θ_L, пренебрегая, как и ранее, краевыми эффектами, и, кроме того, при подстановке w_1 (20) опустили символ $(1/2)\,\mathrm{Re}$, который легко можно восстановить в окончательных результатах.

В соответствии с (22), s меняется как функция R' лишь при $0 \leqslant R' \leqslant L$, причем полное изменение s при прохождении слоя

$$\Delta s = \int_{-\infty}^{\infty} dR\,\partial_R s = \frac{2L'\,b(\rho')}{(1-\bar{\xi})^2}\left(k^2 e^{ik\rho} - \partial_\rho^2 w(\rho)\right), \tag{23}$$

где $L' = L/(1-\bar{\xi})$ — оптическая толщина слоя. Величина K_+ обращается в нуль на верхнем и нижнем пределах интегрирования, поскольку вне слоя, где в сответствии с условиями излучения имеется либо только прямая, либо только обратная рассеянная волна, $I_{+-}|_{\rho=0} = 0$. Учитывая это, при $R \to \pm\infty$ имеем

$$s \to \pm I_{\pm\pm}, \quad w \to I_{\pm\pm} \equiv I_\pm^\infty. \tag{24}$$

Здесь $I_\pm^\infty$ — автокорреляции некогерентно рассеянных волн вне слоя. Так как w не зависит от R, отсюда следует, что $I_+^\infty = I_-^\infty = w(\rho)$ и $\Delta s = s|_{R=\infty} - s|_{R=-\infty} = 2I_\mp^\infty = 2w(\rho)$. Поэтому (23) можно записать в виде следующего уравнения для w:

$$w(\rho) = L\varphi(\rho)\left(k^2 e^{ik\rho} - \partial_\rho^2\, w(\rho)\right), \tag{25}$$

где функция

$$\varphi(\rho) = b(\rho')/(1-\bar{\xi})^3$$

быстро спадает при $\rho \gtrsim l_\text{к}$.

Для нахождения явного вида функции $K_+(R)$ одних только уравнений (21), очевидно, не достаточно Ее можно найти, если вернуться к (19) и рассмотреть процесс установления стационарного режима при $t \to +\infty$. В результате для $K_\pm$ получаются выражения

$$K_\pm = \frac{\theta_L(R')}{L'}\int_0^\infty dt\left(w(\rho+t) \pm w(\rho-t)\right).$$

Учитывая это, с помощью (22) можно найти следующие выражения для $I_{\alpha\beta}^\text{нек}$:

$$I_{\pm\pm}^\text{нек} = \frac{w(\rho)}{2}\left(1 \mp 1 \pm \frac{2}{L'}\int_0^R \theta_L(R')\,dR\right),$$

$$I_{\pm\mp}^\text{нек} = \frac{\theta_L(R')}{L'}\int_0^\infty w(\rho \pm t)\,dt.$$

Отсюда видно, что «корреляционные интенсивности» $I_{\alpha\alpha}^\text{нек}$ меняются линейно при изменении R' внутри слоя и постоянны вне слоя, тогда как корреляции встречных волн $I_{\pm\mp}^\text{нек}$ отличны от нуля лишь внутри рассеивающего слоя.

Входящая в выражения для $I_{\alpha\beta}^{\text{иск}}$ функция $w(\rho)$ определяется уравнением (25). Применив преобразование Фурье по ρ, легко показать, что из-за неотрицательности спектра корреляционной функции $b(\rho)$ спектр $w(\rho)$ также неотрицателен, и поэтому $w(0) \geqslant 0$, как и должно быть в соответствии со смыслом величины $w(0)$: $w(0) = \langle \tilde{u}_+^2 + \tilde{u}_-^2 \rangle$. В общем случае (25) есть уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, которое в явном виде не решается. Рассмотрим малые $\rho \ll l_{\text{к}}$ и положим в (25) приближенно $\varphi(\rho) \simeq \varphi(0)$ Тогда решение (25) даст

$$w(\rho) \simeq L/(L_0 - L)\, e^{ik\rho}, \tag{26}$$

где $L_0 = (1-\bar{\xi})^3/k^2 b(0)$. При $L \to 0$ это выражение, как и следовало ожидать, согласуется с результатом борновского приближения для $\rho \ll l_{\text{к}}$.

Если рассмотреть решение (25) с помощью итераций, приняв (26) в качестве нулевого приближения, то можно оценить условия применимости (26). Как показывает несложное исследование, даже при малых ρ применимость (26) налагает следующее ограничение на толщину рассеивающего слоя: $L/L_0 \ll kl_{\text{к}} \min(1, kl_{\text{к}})$. Отсюда видно, что для области $L \sim L_0$ (26) позволяет получить нетривиальные результаты лишь в случае крупномасштабных флуктуаций, для которых $kl_{\text{к}} \gg 1$. Соответствующая (26) величина $w(0)$ положительна при $L < L_0$, при $L \to L_0$ она неограниченно нарастает, а при $L > L_0$ становится отрицательной, т. е. теряет физический смысл. Это означает, что для крупномасштабных флуктуаций установившийся режим с ограниченными средними интенсивностями возможен лишь при достаточно малой толщине слоя $L < L_0$, когда волна выходит из слоя раньше, чем успевает существенно сказаться параметрическая раскачка при многократном рассеянии При $L > L_0$ параметрическая раскачка приводит к неограниченному росту амплитуд рассеянных волн со временем, так что установившегося режима не существует*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя соображения, аналогичные описанным в [6], оценим условия применимости приближения (10). Это приближение основано на разложении УД по степеням оператора $\tilde{A} = e^{-\Lambda t} \tilde{\Lambda} e^{\Lambda t}$. Если «величина» $\tilde{A}$ характеризуется параметром σ_A, а время корреляции A считается по порядку равным $\tau_{\text{к}}$, то в случае гауссовых флуктуаций $\tilde{A}$ применимость (10) помимо требования $t \gg \tau_{\text{к}}$ ограничивает величину флуктуаций условием малости «числа Кубо»

$$K = \sigma_A \tau_{\text{к}} \ll 1 \tag{П. 1}$$

и, кроме того, малости $\tau_{\text{к}}$ по сравнению со всеми другими характерными временами задачи.

Условие (П. 1) было получено в [6] качественно для случая матричного уравнения (7) и позже подтверждено более строго в [7, 8]. В нашем случае $\tilde{A}$ не матрица, а неограниченный оператор. Несмотря на это, выводы [6] относительно условий применимости приближения (10) в основном остаются в силе. Из (9) видно, что если величину $\tilde{\xi}$ оцени-

* Возможность параметрической раскачки для трехмерных неограниченных случайных сред с зависящими от времени флуктуациями обсуждалась в [9, 10]

вать дисперсией $\sigma=\langle\tilde{\xi}^2\rangle^{1/2}$, то «величина» $\tilde{A}$ будет оцениваться параметром $\sigma_A\sim\sigma/l$, где l — наименьший из характерных пространственных масштабов задачи. Не считая большого параметра L, таких масштабов два — это радиус корреляции $l_к$ флуктуаций $\tilde{\xi}$ и характерный масштаб l_ψ изменения $\langle\psi\rangle$, который в случае (6) имеет порядок длины волны ($l_\psi\sim\lambda=2\pi/k$). Таким образом, $l\sim\min(l_к,\lambda)$ и условие (П. 1) принимает вид

$$\sigma\tau_к \ll \min(l_к,\lambda).$$

Это неравенство дополняется требованием малости времени корреляции флуктуаций: $\tau_к\ll\min(l_к,\lambda)$.

Используя (7) и (8), нетрудно записать аналогичные уравнения для высших неусредненных моментов $\psi_1\psi_2\ldots\psi_n=\psi_1(x_1,t)\psi_2(x_2,t)\ldots\psi_n(x_n,t)$ при любом n. Так, вторые моменты $\psi_1\psi_2=u_\alpha(x_1,t)u_\beta(x_2,t)$ удовлетворяют уравнению вида

$$\partial_t\psi_1\psi_2=(\Lambda_1+\Lambda_2)\psi_1\psi_2$$

с начальным условием

$$\psi_1\psi_2|_{t=0}=\psi_1^0\psi_2^0$$

(здесь оператор Λ_1 действует только на ψ_1, а Λ_2 — только на ψ_2). Отсюда нетрудно получить УД для вторых моментов $\langle\psi_1\psi_2\rangle$, для чего достаточно заменить в (10) ψ на $\psi_1\psi_2$ и Λ на $\Lambda_1+\Lambda_2$. Обобщение на высшие моменты очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кляцкин В И Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М · Наука, 1980
2. Кляцкин В. И, Ярощук И О — Изв вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 10, с 1241.
3 Fox R F., Barakat R. — J Phys, 1979, **A12**, p. 353.
4 Kohler W. E — J. Math Phys., 1977, **18**, p 1978.
5 Владимиров В С Уравнения математической физики — М Наука, 1967.
6 Brissaud A., Frisch U — J Math Phys, 1974, **15**, p. 524
7 Барабаненков Ю Н — Изв вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 7, с. 981.
8 Барабаненков Ю Н, Калинин М И — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 3, с 373
9 Гавриленко В Г, Дорфман Я М — Изв вузов — Радиофизика, 1972, **15**, № 2, с. 249
10 Бегиашвили Г А, Гавриленко В Г, Джандиери Г В — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 6, с 948.

Поступила в редакцию
26 марта 1984

RADIATION TRANSFER IN ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY FLUCTUATING MEDIUM

L. Apresyan

One-dimensional problem of wave scattering by the slab with fast (quasidelta-correlated) fluctuations is considered The eguations for two point space correlation functions are derived Under certain conditions the existance of threshold slab's thickness is followed from this eguations bellow which stationary regime is possible, and above—the slab acts as parametrical amplifier, giving infinite increase of the amplitudes of scattered waves.