ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 533.951 7;532 594

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

*Ю. М. Розенраух*

Получены численные решения задачи об эволюции спектра турбулентности капиллярных волн на поверхности жидкости за счет распадного взаимодействия. Показано, что энергия начального распределения волн перекачивается в коротковолновую область. В области больших частот полученное решение соответствует найденной ранее аналитической асимптотике. При наличии источника волн в длинноволновой области и поглощения в коротковолновой в «инерционном» интервале устанавливается стационарный спектр колмогоровского типа.

Во многих практически интересных задачах теории слабой турбулентности главными нелинейными процессами являются распады и слияния волн. Распадное взаимодействие определяет, например, поведение спектров электронных колебаний в магнитоактивной плазме: геликонов, циклотронных волн и косых ленгмюровских колебаний. Важным вопросом динамики спектра турбулентности является вопрос о перераспределении энергии по масштабам турбулентности и, в частности, о направлении спектральной перекачки. Направление спектральной перекачки может быть найдено из общих свойств распадного взаимодействия. Динамика же спектра определяется конкретным видом вероятности взаимодействия и в каждом случае требует решения соответствующего кинетического уравнения. Решение этой задачи для волн в магнитоактивной плазме осложняется тем, что законы дисперсии и вероятности распадов этих волн являются анизотропными. Имеется, однако, простой физический пример, позволяющий подробно проследить за динамикой спектра при распадном взаимодействии: это капиллярные волны на поверхности жидкости. Частота и вероятность распада этих волн задаются следующими выражениями [1]:

$$\omega(k) = \sqrt{\sigma k^3}; \tag{1}$$

$$w(k, k_1, k_2) = \frac{\pi^5}{2}\,\sigma^{1/2}(k\,k_1\,k_2)^{1/2}\left\{\frac{(k-k_1)^2}{k_2^{1/2}} + \frac{(k-k_2)^2}{k_1^{1/2}} - \frac{(k_1-k_2)^2}{k^{1/2}}\right\}^2. \tag{2}$$

Здесь $k$, $k_1$, $k_2$ — модули соответствующих волновых векторов; а $\sigma$ — отношение коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости. Изотропия закона дисперсии и вероятности распада позволяет свести задачу к одномерной. Однако и в этом случае точного аналитического решения задачи с начальными условиями получить не удается.

В настоящей работе численно решается задача об эволюции начального распределения капиллярных волн за счет распадного взаимодействия. Целью работы было выяснить направление спектральной перекачки, проследить, каким образом осуществляется перекачка энергии в область диссипации в коротковолновой части спектра, а также получить стационарное распределение волн при наличии накачки в длинноволновой части спектра*.

1. Поведение спектра турбулентности капиллярных волн описывается кинетическим уравнением для спектральной функции $n_k(t)$. Предполагая спектр изотропным, можно проинтегрировать кинетическое уравнение по углу и перейти от переменной $k$ к переменной $\omega$, после чего это уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial n_\omega}{\partial t} = \int W(\omega, \omega_1, \omega_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,(n_{\omega_1} n_{\omega_2} - n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega_2}) \times$$
$$\times (\omega_1\omega_2)^{1/3} d\omega_1 d\omega_2 + 2\int W(\omega_1, \omega, \omega_2)\,\delta(\omega_1-\omega-\omega_2) \times \tag{3}$$
$$\times (n_{\omega_1} n_{\omega_2} + n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega_2})(\omega_1\omega_2)^{1/3} d\omega_1 d\omega_2.$$

Здесь

$$W(\omega, \omega_1, \omega_2) = \frac{w(\omega, \omega_1, \omega_2)}{\sqrt{4(\omega_1\omega_2)^{4/3} - (\omega^{4/3} - \omega_1^{4/3} - \omega_2^{4/3})^2}},$$

$$w(\omega, \omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{(\omega\,\omega_1\,\omega_2)^{1/3}}{\alpha^{7/6}} \left\{\frac{(\omega-\omega_1)^{4/3}}{\omega_2^{1/3}} + \frac{(\omega-\omega_2)^{4/3}}{\omega_1^{1/3}} - \frac{(\omega_1-\omega_2)^{4/3}}{\omega^{1/3}}\right\}^2.$$

Численное интегрирование уравнения (3) осуществляется в конечном интервале частот $0<\omega\leqslant\omega_f$. Мы будем предполагать, что в области $\omega>\omega_f$ действует бесконечно сильное затухание, так что спектр в этой области равен нулю:

$$n(\omega)\,|_{\omega>\omega_f} = 0. \tag{4}$$

Перейдя в уравнении (3) к безразмерным переменным и проинтегрировав его по $\omega_2$, с учетом граничного условия (4) получим

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial \tau} = \int_0^\omega W(\omega; \omega_1; \omega-\omega_1)(n_{\omega_1} n_{\omega-\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega-\omega_1})(\omega-\omega_1)^{1/3} \times$$
$$\times \omega_1^{1/3} d\omega_1 + 2\int_\omega^{\omega_f} W(\omega_1, \omega, \omega_1-\omega)(n_{\omega_1} n_{\omega_1-\omega} + n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1-\omega}) \times \tag{5}$$
$$\times (\omega_1-\omega)^{1/3}\omega_1^{1/3} d\omega_1 - 2\int_0^\omega W(\omega_1+\omega_f, \omega, \omega_1+\omega_f-\omega)\, n_\omega n_{\omega_1+\omega_f-\omega} \times$$
$$\times (\omega_1+\omega_f)^{1/3}(\omega_1+\omega_f-\omega)^{1/3} d\omega_1.$$

Уравнение (5) решалось на ЭВМ в интервале частот $0<\omega\leqslant 200$, число узлов сетки определялось возможностями машины и равнялось 200. На рис. 1 представлены результаты численного решения уравнения (5) с начальным условием

* Заметим, что направление перекачки энергии по спектру может быть найдено аналитически для любого изотропного стационарного степенного распределения волн (см. работу [5]).

$$n(\omega;0)=\begin{cases}0{,}01, & 0<\omega\leqslant 10\\ 0{,}01\exp[-(\omega-10)^2/6], & 10\leqslant\omega\leqslant 32\\ 0, & \omega>32\end{cases}.$$

Полная энергия в исходном спектре равна

$$E_0=\int\limits_0^{\omega_f}\omega^{4/3}n(\omega)\,d\omega=2{,}63.$$

Определим характерный масштаб спектра, содержащий основную долю его энергии, соотношением

$$\omega_0=E_0/\int\limits_0^{\omega_f}n(\omega)\,\omega^{1/3}d\omega$$

(Выражение, стоящее в знаменателе, есть полное число волн в спектре.) Характерное время изменения энергосодержащей части спектра $\tau_0$ оценочно равно

$$\tau_0\sim(E_0\omega_0)^{-1}\sim 0{,}04.$$

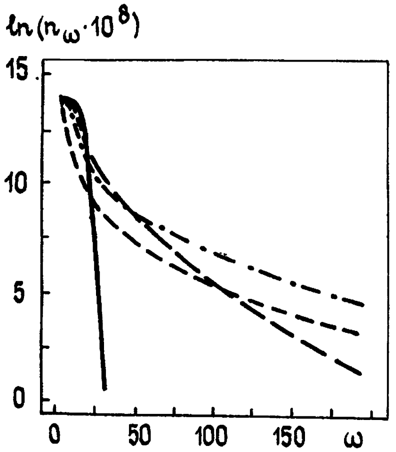


Рис. 1.

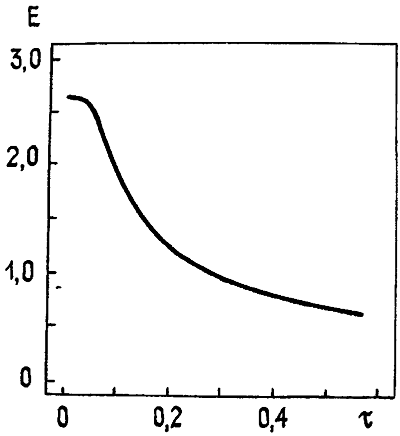


Рис. 2.

Рис. 1. Временная эволюция начального распределения волн. Сплошной линией показан исходный спектр, пунктирными — спектр в различные моменты времени: прерывистая — $\tau=0{,}026$; штрихпунктирная — $\tau=0{,}09$; штриховая — $\tau=0{,}57$.

На рис. 1 отчетливо прослеживается тенденция к распространению спектра в область больших частот. Энергия волн к моменту $\tau=0{,}03$ остается равной исходному значению (рис. 2), поскольку к этому времени лишь малая доля исходного числа волн достигает области поглощения. В дальнейшем, к моменту $\tau=0{,}06$ в интервале частот $36\leqslant\omega\leqslant$ $\leqslant 96$ формируется распределение вида

$$n(\omega)\backsim\omega^{-\beta},\quad \beta=2{,}83\times(1\pm 0{,}02),$$

а энергия волн начинает уменьшаться. С течением времени область частот, в которой рапределение волн близко к степенному, увеличивается, и к моменту $\tau=0{,}45$ это распределение занимает диапазон частот $20\leqslant\omega\leqslant 120$. Однако значение функции

$$\beta(\omega;\tau)\equiv-d(\ln n(\omega))/d(\ln\omega) \tag{6}$$

в этом диапазоне отличается от 2,83 и, слабо изменяясь с увеличением частоты, нарастает от 2,66 до 2,85 (заметим, что в других областях частотного интервала функция $\beta(\omega;\tau)$ значительно сильнее изменяется с изменением частоты).

Такое поведение спектра соответствует изложенной в работе [2] картине эволюции начального распределения волн. Как отмечалось в этой работе, в процессе эволюции из начального спектра вытягивается «хвост», имеющий двухмасштабную структуру. В области, примыкающей к энергосодержащей части, формируется спектр с постоянным по частоте потоком энергии $P$ [1]:

$$n(\omega)=P^{1/2}\omega^{-17/6}. \tag{7}$$

В области более высоких частот спектр (7) переходит в круто спадающее с ростом частоты распределение, вид которого зависит от начальных условий. При этом закон движения коротковолновой границы распределения (7) $\omega_*(\tau)$ не чувствителен к конкретному виду спектра в области $\omega\gg\omega_*(\tau)$ и определяется потоком энергии из основной $(\omega\sim\omega_0)$ части спектра.

Полученные в численном решении значения функции $\beta(\omega;\tau)$ отличаются от константы $\beta=2{,}83$, соответствующей спектру (7). Это отличие обусловлено тем, что в процессе счета энергия исходного распределения уменьшается более чем в четыре раза, что приводит к уменьшению во времени потока энергии в коротковолновую область. Нетрудно оценить поправку к логарифмической производной $\Delta\beta(\omega;\tau)$, связанную с зависимостью потока от времени. Подставляя в кинетическое уравнение (5) решение в виде

$$n(\omega;\tau)=P^{1/2}(\tau)\,\omega^{-17/6}[1+f(\omega;\tau)],\quad f(\omega;\tau)\ll 1 \tag{8}$$

и удерживая в левой части (5) производную по времени от потока, находим, что поправка к спектру (7) по порядку величины равна

$$f(\omega;\tau)\sim(\omega_0/\omega)^{10/3}d(\ln P)/d\tau. \tag{9}$$

Учитывая, что

$$P(\tau)=-dE/d\tau,$$

для искомой поправки $\Delta\beta(\omega;\tau)$ получаем следующее выражение:

$$\Delta\beta(\omega;\tau)\simeq-\frac{10}{3}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{10/3}\frac{d}{d\tau}\left(\ln\frac{dE}{d\tau}\right). \tag{10}$$

Опрсделив из результатов численного счета $\left.\frac{d}{d\tau}\left(\ln\frac{dE}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0{,}45}\simeq 4$, получаем, что в указанном диапазоне частот $\Delta\beta$ уменьшается с увеличением частоты от 0,2 до $10^{-3}$, а функция $\beta(\omega;\tau)$ нарастает от 2,63 до 2,83. Этот результат согласуется с приведенными выше значениями.

Полученное численное решение показывает, что энергия исходного спектра перекачивается в коротковолновую область. При этом в «инерционном» интервале формируется распределение (8) с уменьшающимся во времени потоком энергии.

2. В дополнение к выводу о перекачке энергии в коротковолновую область спектра представляет интерес выяснить, каким образом в «инерционном» интервале устанавливается распределение (8). Для этого следует более детально изучить раннюю стадию эволюции исходного спектра, увеличив интервал между $\omega_0$ и $\omega_f$. Поэтому в последующих вариантах начальное распределение волн выбиралось достаточно узким, сосредоточенным в низкочастотной области:

$$n(\omega;0)=\begin{cases}0{,}1, & 0\leqslant\omega\leqslant 4\\ 0{,}1\exp[-(\omega-4)^2], & 4\leqslant\omega\leqslant 8\\ 0, & \omega>8\end{cases}.$$

Энергия волн в этом спектре $E_0=1{,}75$, а характерное время его изменения $\tau_0\sim 0{,}15$. На рис. 3 представлена зависимость функции $\beta(\omega;\tau)$, определенной равенством (6), от частоты в различные моменты времени. Из рисунка видно, что на ранней стадии $(\tau<\tau_0)$ в широком диапазоне частот эта зависимость является линейной,

$$\beta(\omega;\tau)=2{,}3+A\omega,$$

а к моменту времени $\tau=0{,}36$ в диапазоне $20\leqslant\omega\leqslant 100$ функция $\beta(\omega;\tau)$ принимает значение $\beta=2{,}83\,(1\pm 0{,}01)$, соответствующее спектру (7). Изменение энергии к этому моменту составляет менее 8%. В работе [2] было отмечено существование у уравнения (3) убывающих асимптотических решений «взрывного» типа:

$$n(\omega;\tau)\ \backsim\ \omega^{-10/3}(t_0-\tau)^{-1};\tag{11}$$

$$n(\omega,\tau)\backsim(t_0-\tau)^{\alpha-1}\,\omega^{-7/3}\exp[-c\omega(t_0-\tau)^{\alpha}],$$
$$\alpha>0,\ \ 0<\tau<t_0,\ \ c\omega(t_0-\tau)^{\alpha}\gg 1.\tag{12}$$

Здесь константы $c$, $t_0$ и $\alpha$ определяются конкретным видом начального распределения. Степенная асимптотика (11) допускает сшивку со спектром (7). Решение (12) также может быть сшито со спектром (7), при этом индекс автомодельности $\alpha$ равен двум. Соответствующая асимптотике (12) функция $\beta(\omega;\tau)$ является линейной функцией частоты, а величина

$$B(\omega;\tau)=(\beta(\omega;\tau)-7/3)\,\omega^{-1}=c\,(t_0-\tau)^{\alpha}\tag{13}$$

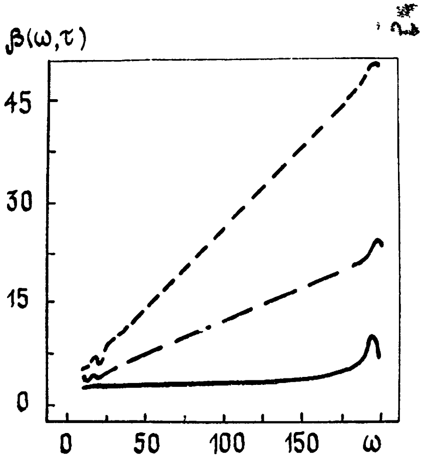


Рис. 3.

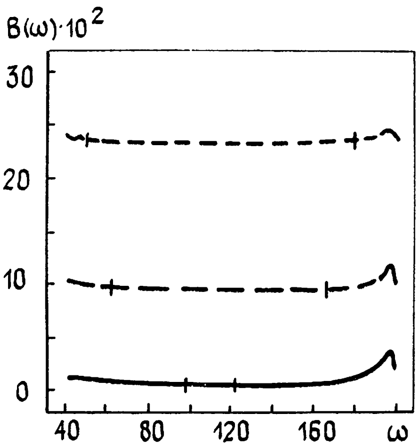


Рис. 4.

Рис. 3 Зависимость функции $\beta\,(\omega,\tau)$ от частоты в разные моменты времени. штриховая — $\tau=0{,}05$, прерывистая — $\tau=0{,}11$, сплошная — $\tau=0{,}36$

Рис 4 Функция $B(\omega,\tau)$, построенная по результатам численного решения уравнения (5), в различные моменты времени: штриховая — $\tau=0{,}05$, прерывистая — $\tau=0{,}11$, сплошная — $\tau=0{,}36$

от частоты не зависит. На рис. 4 представлена зависимость функции $B(\omega;\ \tau)$ в разные моменты времени, построенная по результатам численного счета. Анализ численного решения показывает, что при $\tau\leqslant 0{,}12$ величина $B(\omega;\tau)$ в широком интервале частот не зависит от частоты, что указывает на реализацию в этом интервале решения типа (12). На рис. 4 область частот, в которой изменение функции $B(\omega;\tau)$ не превышает $\pm 1\%$, отмечена вертикальными черточками. С течением времени эта область, как видно, сокращается. Это сокращение происходит по двум причинам. Во-первых, потому, что с течением времени граница применимости асимптотического решения (12) смещается в сторону больших частот, и, во-вторых, вследствие того, что с проникновением спектра в область больших частот начинает сказываться ограниченность счетного интервала. Из изложенного следует, что зависимость численного решения от частоты с хорошей точностью соответствует автомодельной асимптотике (12). Однако вследствие того, что счетный интервал недостаточно широк, проследить за временной зависимостью асимптотики (12) и с определенностью указать индекс автомодельности $\alpha$ не удается. Отметим, впрочем, что подстановка $\alpha=2$ в соотношение (13) не противоречит результатам численного счета. Что же касается спектра (11), то ответить на вопрос о его реализации в коротковолновой области путем численного решения уравнения (5) не удалось. Асимптотика (11) может появляться лишь для достаточно плавно (степенным образом) убывающего с увеличением частоты начального распределения волн. Однако в этом случае даже на ранней стадии эволюции спектра влияние ограниченности счетного интервала оказывается весьма существенным. Чтобы выяснить вопрос о реализации асимптотики (11), следует значительно (в десятки раз) увеличить счетный интервал, что в настоящее время не представляется возможным.

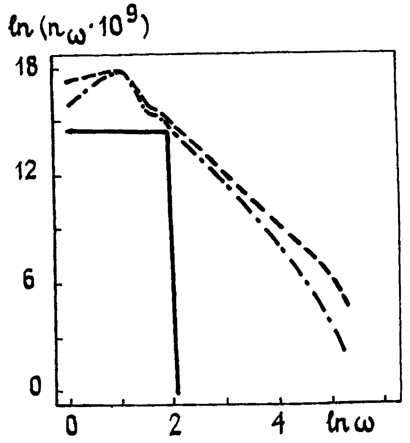


Рис. 5.

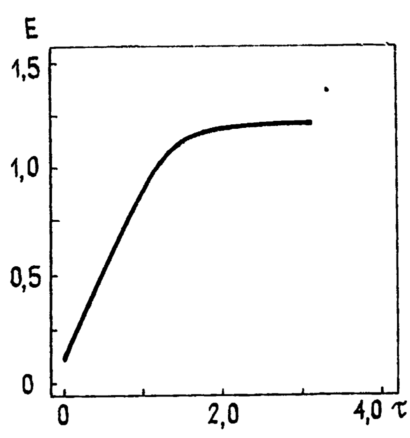


Рис. 6.

Рис. 5. Результаты численного решения уравнения (5) с источником волн (14). Показано распределение волн по частоте в различные моменты времени: сплошная — исходный спектр; штрихпунктирная — $\tau=1{,}0$; штриховая — $\tau=3{,}21$.

3. Численное интегрирование уравнения (5) позволяет решить задачу об установлении стационарного спектра волн при наличии накачки в низкочастотной области и затухания в области высоких частот. Аналогичная задача для системы нелинейных осцилляторов с модельным взаимодействием решалась ранее в работах [3, 4]. В этих работах было численно получено стационарное распределение колмогоровского типа. Для капиллярных волн таким стационарным распределением является спектр (7) с не зависящим от времени потоком энергии [1]. При решении кинетического уравнения (5) в правую часть его был добавлен источник, описывающий возбуждение волн в области низких частот и имеющий следующий вид:

$$Q = \begin{cases} 0{,}1\ \exp[-(\omega-4)^2], & \omega \leqslant 8 \\ 0, & \omega > 8 \end{cases}. \tag{14}$$

Результаты численного интегрирования уравнения (5) с источником (14) приведены на рис. 5 и 6. На начальной стадии счета функция $n(\omega;\tau)$ быстро нарастает, а энергия в спектре увеличивается пропорционально времени. Однако к моменту $\tau \simeq 2{,}0$ рост функции $n(\omega;\tau)$ прекращается и в интервале $20 \leqslant \omega \leqslant 116$ устанавливается стационарное распределение степенного вида:

$$n(\omega) \sim \omega^{-1}, \quad \beta = 2{,}38(1 \pm 0{,}02). \tag{15}$$

Увеличение энергии в спектре к этому времени прекращается, и дальнейшее изменение энергии, связанное с медленным изменением спектра в самой низкочастотной области, составляет менее трех процентов. В области $\omega > 116$ спектр убывает быстрее, чем степенным образом, поскольку в этой области влияние затухания волн на границе счетного интервала оказыватся весьма существенным. Приведенные результаты показывают, что в «инерционном» интервале устанавливается стационарное распределение волн колмогоровского типа.

Таким образом, численное решение кинетического уравнения для капиллярных волн подтверждает сформулированный в работе [2] вывод о том, что значительная доля энергии исходного спектра перекачивается в коротковолновую область за время, по порядку величины равное времени взаимодействия волн в исходном спектре. Установление в «инерционном» интервале спектра (7) при выбранных нами начальных условиях имеет автомодельный характер и соответствует асимптотике (12). При наличии возбуждения волн в длинноволновой области численное решение уравнения (5) выходит на стационар, причем в широком диапазоне частот стационарное решение имеет вид степенного спектра с постоянным потоком энергии.

Автор выражает благодарность Б. Н. Брейзману и М. С. Пеккеру за многочисленные обсуждения в ходе выполнения работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. — ПМТФ, 1967, № 5, с. 62.
2. Брейзман Б. Н., Розенраух Ю. М. — ЖЭТФ, 1984, **86**, № 2, с. 462.
3. Захаров В. Е, Мушер М. С. — ДАН СССР, 1973, **209**, № 5, с. 1063.
4. Musher S. L. — Phys. Letters, 1979, **70A**, № 5—6, p. 361.
5. Кац А. В. — ЖЭТФ, 1976, **71**, № 6, с. 2104.

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

Поступила в редакцию
24 мая 1984 г.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE CAPILLARY WAVE DECAY INTERACTION

*Yu. M. Rozenraukh*

A numerical solution of the problem of capillary wave turbulent spectrum evolution due to decay interaction is presented. The energy of initial spectrum is shown to be transferred to the short-wavelength region. In this region the numerical solution corresponds to the analytically obtained asymptote. A stationary Kolmogorov-like distribution is established over an «inertial» interval in the presence of wave excitation and damping in long- and short-wavelength parts of the spectrum respectively.