

УДК 621.396.677.7

ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНЫХ ВОЛН ИЗ ДВУХ И ТРЕХ ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДОВ

C. M. Журав

Рассматривается излучение собственных магнитных волн из двух плоских волноводов разной высоты и трех волноводов равной высоты. Решение основано на методе Винера—Хопфа. Приведены численные результаты.

Излучение из нескольких плоских волноводов представляет практический интерес при исследовании характеристик малонаправленных излучателей и простейших моделей конечных фазированных антенных решеток. В работе рассматривается излучение магнитных волн из двух волноводов разной высоты и из трех волноводов равной высоты. Структуры образованы соответственно тремя и четырьмя бесконечно тонкими идеально проводящими полуплоскостями. Решение задач проводится способом, основанным на методе Винера—Хопфа [1, 2].

ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ ДВУХ ВОЛНОВОДОВ РАЗНОЙ ВЫСОТЫ

1. Вывод системы функциональных уравнений (СФУ). Пусть на раскрытии структуры, образованной полуплоскостями $x = a, 0, -b$, $z < 0$ (рис. 1), из верхнего волновода набегает магнитная волна H_{0l} с компонентой электрического поля

$$E_y(x, z) = e^{ihz} \sin(\pi l x / a), \quad (1)$$

где

$$h = (k^2 - \pi^2 l^2 / a^2)^{1/2}, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Поле (1), возбуждающее структуру, задано при $|z| < \infty$.

Возбужденное поле полностью описывается электрической составляющей $E_y(x, z)$, фурье-преобразование которой

$$\begin{aligned} \varphi(x, \alpha) &= \varphi_+(x, \alpha) + \varphi_-(x, \alpha), \quad \varphi_+(x, \alpha) = \int_0^\infty E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz, \\ \varphi_-(x, \alpha) &= \int_{-\infty}^0 E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 / \partial x^2 - \gamma^2) \varphi(x, \alpha) = 0, \quad (2)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0.$$

Индексы «плюс» и «минус» присваиваются функциям, регулярным соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной α . Такие функции будем называть «плюс»- и «минус»-функциями

цим соответственно. Все пространство разбивается на четыре области: $x>a$, $0< x < a$, $-b < x < 0$, $x < -b$; величинам, относящимся к этим областям, присваиваются соответственно верхние индексы 2, 1, -1 , -2 .

Решения уравнения (2) с учетом условия излучения на бесконечности имеют вид

$$\varphi^{(\pm 2)}(x, \alpha) = C^{(\pm 2)} e^{\mp \gamma x}; \quad (3a)$$

$$\varphi^{(\pm 1)}(x, \alpha) = A^{(\pm 1)} \operatorname{sh} \gamma x + B^{(\pm 1)} \operatorname{ch} \gamma x. \quad (3b)$$

Подставим в эти соотношения $x=a, 0, -b$, и в их производные по x , которые будем обозначать штрихом. Исключим неизвестные функции переменной α $A^{(\pm 1)}$, $B^{(\pm 1)}$, $C^{(\pm 2)}$, а затем $\varphi_+^{(1)'}(a, \alpha)$ и $\varphi_+^{(-1)'}(-b, \alpha)$, и, приняв во внимание граничные условия при $x=a, 0, -b$

$$\varphi_-^{(j)}(a, \alpha) = 0 \quad (j=1, 2), \quad \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) = \varphi_+^{(2)}(a, \alpha),$$

$$\varphi_+^{(1)'}(a, \alpha) + \frac{i\pi l (-1)^l}{a(\alpha+h)} = \varphi_+^{(2)'}(a, \alpha),$$

$$\varphi_-^{(j)}(0, \alpha) = 0 \quad (j=\pm 1), \quad \varphi_+^{(1)}(0, \alpha) = \varphi_+^{(-1)}(0, \alpha),$$

$$\varphi_+^{(1)'}(0, \alpha) + \frac{i\pi l}{a(\alpha+h)} = \varphi_+^{(-1)'}(0, \alpha),$$

$$\varphi_-^{(j)}(-b, \alpha) = 0 \quad (j=-1, -2), \quad \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha) = \varphi_+^{(-2)}(-b, \alpha),$$

$$\varphi_+^{(-1)'}(-b, \alpha) = \varphi_+^{(-2)'}(-b, \alpha),$$

приходим к системе функциональных уравнений

$$\frac{\gamma c}{\operatorname{sh} \gamma a} [e^{\gamma a} \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) - \varphi_+^{(1)}(0, \alpha)] + \frac{i\pi l c (-1)^l}{a(\alpha+h)} = D_-(a, \alpha); \quad (4a)$$

$$K(\alpha) \left[\varphi_+^{(1)}(0, \alpha) - \frac{\operatorname{sh} \gamma b}{\operatorname{sh} \gamma c} \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) - \frac{\operatorname{sh} \gamma a}{\operatorname{sh} \gamma c} \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha) \right] - \frac{i\pi l c}{a(\alpha+h)} = D_-(0, \alpha); \quad (4b)$$

$$\frac{\gamma c}{\operatorname{sh} \gamma b} [e^{\gamma b} \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha) - \varphi_+^{(1)}(0, \alpha)] = D_-(-b, \alpha), \quad (4b)$$

где

$$D_-(a, \alpha) = c(\varphi_-^{(1)'}(a, \alpha) - \varphi_-^{(2)'}(a, \alpha)),$$

$$D_-(0, \alpha) = c(\varphi_-^{(-1)'}(0, \alpha) - \varphi_-^{(1)'}(0, \alpha)),$$

$$D_-(-b, \alpha) = c(\varphi_-^{(-2)'}(-b, \alpha) - \varphi_-^{(-1)'}(-b, \alpha)),$$

$$K(\alpha) = \gamma c \operatorname{sh} \gamma c / \operatorname{sh} \gamma b, \quad c = a+b. \quad (5)$$

2. Решение СФУ. Из уравнения (4b) исключим неизвестную функцию $D_-(0, \alpha)$, выразим функцию $\varphi_+^{(1)}(0, \alpha)$ через $\varphi_+^{(1)}(a, \alpha)$ и $\varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)$ и подставим в уравнения (4a) и (4b). Для этого необходимо представить уравнение (4b) в виде суммы «плюс»- и «минус»-функций и применить теорему Лиувилля [2]. Факторизуем мероморфную функцию $K(\alpha)$ (5), представив ее в виде $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$ ($K_-(a) = K_+(-\alpha)$,

$K_+(\alpha) \sim \alpha^{1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$), и разделим соотношение (4б) на функцию $K_-(\alpha)$:

$$K_+(\alpha) \varphi_+^{(1)}(0, \alpha) - \frac{K_+(\alpha)}{\sinh \gamma c} [\sinh \gamma b \varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha) + \sinh \gamma a \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)] - \\ - \frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_-(\alpha)} = \frac{D_-(0, \alpha)}{K_-(\alpha)}. \quad (6)$$

Первое слагаемое в левой части и правая часть этого соотношения являются соответственно «плюс»- и «минус»-функциями. Разложим на аналогичные функции третье слагаемое в левой части:

$$\frac{1}{(\alpha + h) K_-(\alpha)} = \left[\frac{1}{\alpha + h} \left(\frac{1}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{K_+(h)} \right) \right]_- + \left[\frac{1}{(\alpha + h) K_+(h)} \right]_+.$$

Второе слагаемое в левой части (6) имеет в верхней полуплоскости полюса в нулях функции $\sinh \gamma c / \gamma$:

$$\alpha_{cn} = (k^2 - \pi^2 n^2/c^2)^{1/2} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Вычтем из этого слагаемого и добавим главные части в полюсах, представив его в виде суммы «плюс»- и «минус»-функций:

$$\left[\frac{K_+(\alpha)}{\sinh \gamma c} (\sinh \gamma b \varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha) + \sinh \gamma a \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]_+ + \\ + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]_-,$$

где

$$x_n = \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_{cn}} \frac{K_+(\alpha)}{\sinh \gamma c} (\sinh \gamma b \varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha) + \sinh \gamma a \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)) = \\ = \frac{\pi n}{c^2 \alpha_{cn}} \sin \frac{\pi n b}{c} K_+(\alpha_{cn}) (\varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha_{cn}) - (-1)^n \varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha_{cn})). \quad (7)$$

Из поведения поля вблизи ребра полуплоскости следует, что при $|\alpha| \rightarrow \infty$ [2]

$$\varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha), \quad \varphi_+^{(1)}(0, \alpha), \quad \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha) \sim \alpha^{-3/2}; \quad (8a)$$

$$\varphi_+^{(1)'}(\alpha, \alpha), \quad \varphi_+^{(1)'}(0, \alpha), \quad \varphi_+^{(-1)'}(-b, \alpha) \sim \alpha^{-1/2}. \quad (8b)$$

Согласно (8а), (8б) все слагаемые преобразованного уравнения (4б) при $|\alpha| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, а многочлен, фигурирующий в теореме Лиувилля, равен нулю. Равенство нулю суммы всех «плюс»-функций приводит к соотношению

$$\varphi_+^{(1)}(0, \alpha) = \frac{1}{\sinh \gamma c} [\sinh \gamma b \varphi_+^{(1)}(\alpha, \alpha) + \sinh \gamma a \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)] + \\ + \frac{1}{K_+(\alpha)} \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_+(h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]. \quad (9)$$

Подставляя это соотношение в уравнения (4а) и (4в), получим

$$D_-(a, \alpha) = \frac{\gamma c}{\sinh \gamma c} [e^{\gamma c} \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) - \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha)] + \frac{i\pi lc (-1)^l}{a(\alpha + h)} - \\ - \frac{\gamma c}{\sinh \gamma a} \frac{1}{K_+(\alpha)} \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_+(h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]; \quad (10a)$$

$$D_-(-b, \alpha) = \frac{\gamma c}{\sinh \gamma c} [e^{\gamma c} \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha) - \varphi_+^{(1)}(a, \alpha)] - \\ - \frac{\gamma c}{\sinh \gamma b} \frac{1}{K_+(\alpha)} \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_+(h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]. \quad (10b)$$

Складывая и вычитая уравнения (10а), (10б), приходим к соотношениям

$$D_-(a, \alpha) + D_-(-b, \alpha) = \frac{2}{G(\alpha)} S_+(\alpha) + \frac{i\pi lc (-1)^l}{a(\alpha + h)} - \\ - \frac{\operatorname{ch} \gamma [(a-b)/2]}{\operatorname{ch} \gamma [(a+b)/2]} K_-(\alpha) \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_+(h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right]; \quad (11a)$$

$$D_-(a, \alpha) - D_-(-b, \alpha) = \frac{2}{H(\alpha)} D_+(\alpha) + \frac{i\pi lc (-1)^l}{a(\alpha + h)} + \\ + \frac{\operatorname{sh} \gamma [(a-b)/2]}{\operatorname{sh} \gamma [(a+b)/2]} K_{-+}(\alpha) \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha + h) K_+(h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha - \alpha_{cn}} \right], \quad (11b)$$

где

$$S_+(\alpha) = \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) + \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha); \quad (12a)$$

$$D_+(\alpha) = \varphi_+^{(1)}(a, \alpha) - \varphi_+^{(-1)}(-b, \alpha); \quad (12b)$$

$$G(\alpha) = (2/\gamma c) \exp(-\gamma c/2) \operatorname{ch}(\gamma c/2); \quad (13a)$$

$$H(\alpha) = (2/\gamma c) \exp(-\gamma c/2) \operatorname{sh}(\gamma c/2). \quad (13b)$$

Третье слагаемое в правой части соотношений (11а), (11б) умножено и разделено на функцию $K_-(\alpha)$. Решение этих уравнений аналогично рассмотренному решению уравнения (4б). Вначале функции $G(\alpha)$ и $H(\alpha)$ (13а), (13б) представляются в виде $G(\alpha) = G_+(\alpha) G_-(\alpha)$, $H(\alpha) = H_+(\alpha) H_-(\alpha)$ ($G_-(\alpha) = G_+(-\alpha)$, $H_-(\alpha) = H_+(-\alpha)$, $G_+(\alpha)$, $H_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$), затем уравнения (11а), (11б) умножаются соответственно на функции $G_-(\alpha)$ и $H_-(\alpha)$, и, наконец, для представления в виде суммы «плюс»- и «минус»-функций последних двух слагаемых в правых частях из них вычитаются и добавляются главные части в полюсах нижней полуплоскости переменной α . Все слагаемые преобразованных уравнений при $|\alpha| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, поэтому суммы всех «плюс»-слагаемых равны нулю, т. е. приходим к соотношениям

$$S_+(a) = (1/2) G_+(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} [v_n/c(\alpha+\beta_n)]; \quad (14a)$$

$$D_+(a) = -(1/2) H_+(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n/c(\alpha+\alpha_n)], \quad (14b)$$

где

$$v_n = \frac{4\pi(n-1/2)}{c\beta_n} \sin \frac{2\pi b}{c} \left(n - \frac{1}{2} \right) K_+(\beta_n) G_+(\beta_n) \left[\frac{i\pi lc}{a(\beta_n - h) K_+(h)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{\beta_n + \alpha_{cp}} \right],$$

$$\mu_n = \frac{4\pi n}{c\alpha_n} \sin \frac{2\pi nb}{c} K_+(\alpha_n) H_+(\alpha_n) \left[\frac{i\pi lc}{a(\alpha_n - h) K_+(h)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{\alpha_n + \alpha_{cp}} \right],$$

$$\beta_n = \left[k^2 - \frac{4\pi^2}{c^2} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \alpha_n = \left[k^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{c^2} \right]^{1/2}.$$

Величины β_n и α_n являются нулями функций $\operatorname{ch} \gamma(a+b)/2$ и $(1/\gamma) \times \operatorname{sh} \gamma(a+b)/2$, входящих в знаменатели уравнений (11a), (11b). Соотношения (14a), (14b) и (9)—это решение рассматриваемой задачи, выраженное через неизвестные величины x_n . Бесконечная система линейных уравнений относительно неизвестных x_n получается подстановкой решения в выражение (7):

$$\begin{aligned} \frac{2}{w_m} x_m + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{p+m}) w_p}{c^2 (\alpha_{cp} + \alpha_{cm}) (\alpha_{cp} + \alpha_{cn})} = \\ = \frac{ic\pi l}{a K_+(h)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{p+m}) w_p}{c^2 (\alpha_{cp} + \alpha_{cm}) (\alpha_{cp} - h)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$w_m = - \frac{\pi m}{c \alpha_{cm}} \sin \frac{\pi mb}{c} K_+(\alpha_{cm}) \begin{cases} H_+(\alpha_{cm}) & \text{при } m \text{ четном} \\ G_+(\alpha_{cm}) & \text{при } m \text{ нечетном} \end{cases}$$

3. Определение физических параметров. Для нахождения параметров структуры величины A, B, C , входящие в соотношения (За), (36), выражались через решение (14a), (14b), (9), и вычислялись обратные Fourier-преобразования [2]. Полное поле внутри верхнего и нижнего волноводов представляется в виде сумм полей собственных волн:

$$E_y^{(1)}(x, z) = e^{ihz} \sin \frac{\pi lx}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-ia_{an}z) \sin \frac{\pi nx}{a}; \quad (16a)$$

$$E_y^{(-1)}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-ia_{bn}z) \sin \frac{\pi nx}{b}, \quad (16b)$$

где

$$A_n = \frac{i\pi nc}{a^2 \alpha_{an} K_+(\alpha_{an})} \left[\frac{i\pi l}{a(\alpha_{an} + h) K_+(h)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{c(\alpha_{an} - \alpha_{cp})} \right],$$

$$B_n = \frac{-i\pi nc}{b^2 \alpha_{bn} K_+(\alpha_{bn})} \left[\frac{i\pi l}{a(\alpha_{bn} + h)K_+(h)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{c(\alpha_{bn} - \alpha_{cp})} \right],$$

$$\alpha_{dn} = (k^2 - \pi^2 n^2/d^2)^{1/2} \quad (d = a, b).$$

Диаграмма направленности $(c_0 r / 8\pi) |E_y|^2$ в областях 2 и -2 при расстояниях от начала координат до точки наблюдения $r/\lambda \gg 1$ определяется соотношениями

$$\Sigma^{(2)}(\theta) = \frac{c_0 k}{32 \pi^2} \sin^2 \theta |D_+(-k \cos \theta) + S_+(-k \cos \theta)|^2; \quad (17a)$$

$$\Sigma^{(-2)}(\theta) = \frac{c_0 k}{32 \pi^2} \sin^2 \theta |S_+(-k \cos \theta) - D_+(-k \cos \theta)|^2, \quad (17b)$$

где угол θ отсчитывается от положительной полуоси z , c_0 — скорость света в вакууме.

Согласно [1, 2] при $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$K_+(\alpha) \simeq (-i2c\alpha)^{1/2}, \quad H_+(\alpha), G_+(\alpha) \simeq (i/\alpha c)^{1/2}. \quad (18)$$

Система линейных алгебраических уравнений (15) решалась приближенно методом усечения. При рассмотренных линейных размерах структуры для получения амплитуд низших собственных волн с точностью до десятых долей процента достаточно сохранить в системе

примерно 25 неизвестных. При этом в бесконечной сумме по целой переменной p в (15) достаточно сохранить примерно 50 членов. В этой сумме при $p > 15$ функции $K_+(\alpha)$, $H_+(\alpha)$ и $G_+(\alpha)$ вычислялись по формулам (18). Полученные значения неизвестных x_n (7) хорошо согласуются с асимптотическими значениями, следующими из условия на ребре

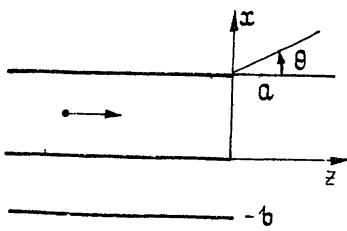


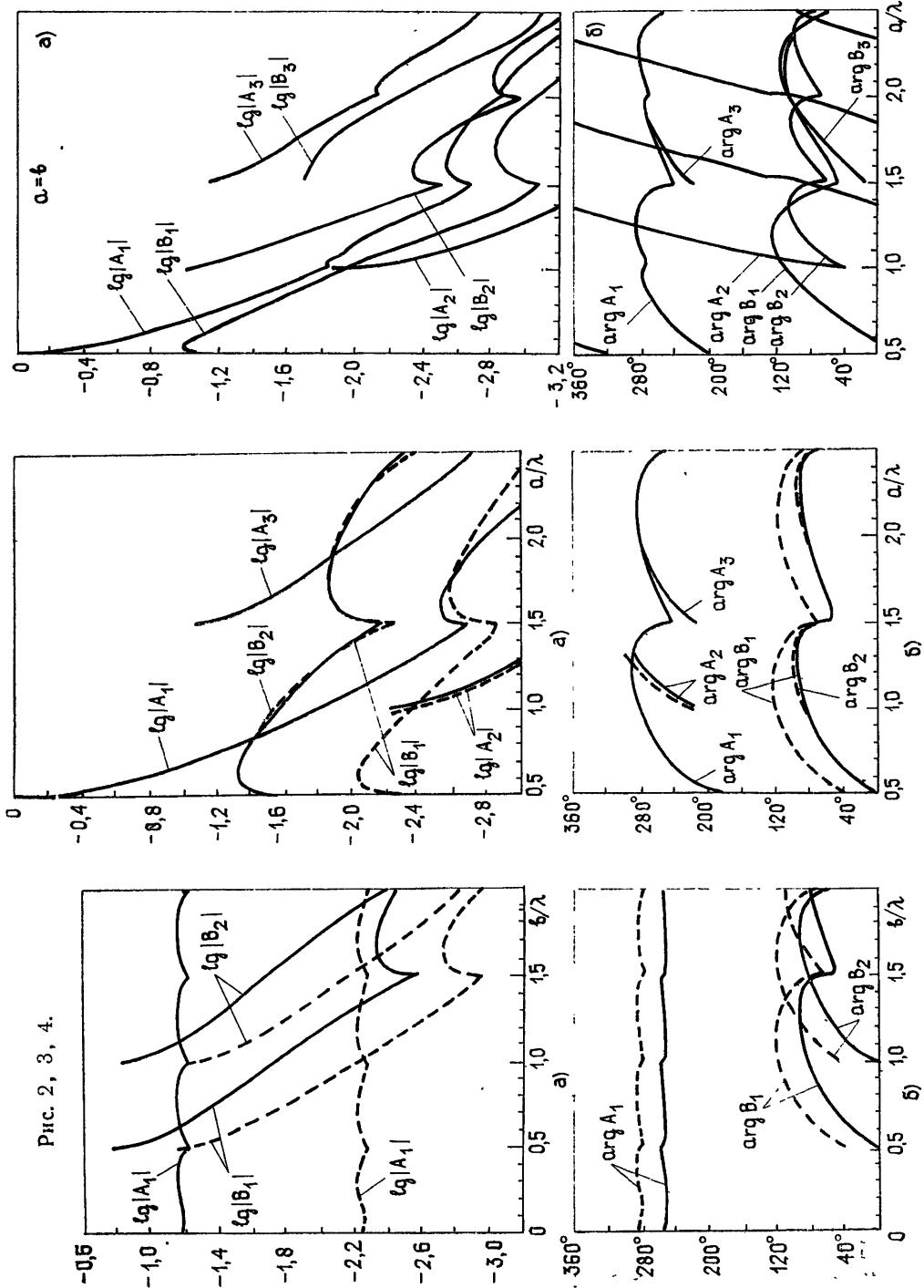
Рис. 1.

$$|x_n / \sin(\pi nb/c)| \sim n^{-1} \text{ при } n \gg 1.$$

4. Численные результаты. Результаты расчетов для случая возбуждения структуры низшей собственной волной представлены графически на рис. 2—5. В этом случае в выражениях для полей внутри волноводов (16a), (16b) коэффициент A_1 является коэффициентом отражения падающей волны, коэффициенты A_n при $n \geq 2$ являются коэффициентами возбуждения, B_n — коэффициентами передачи в пассивный волновод. На рис. 2 представлены результаты вычислений коэффициентов отражения A_1 и передачи B_1 и B_2 при фиксированной высоте активного волновода $a/\lambda = 0,75$ (сплошная кривая), 1,25 (штриховая) в зависимости от высоты пассивного волновода b/λ . На рис. 3 представлены результаты вычислений коэффициентов отражения A_1 , возбуждения A_2 , A_3 и передачи B_1 , B_2 при фиксированной высоте пассивного волновода $b/\lambda = 0,75$ (сплошная кривая), 1,25 (штриховая) в зависимости от высоты активного волновода a/λ . На рис. 4 приведены результаты вычисления коэффициентов отражения A_1 , возбуждения A_2 , A_3 и передачи B_1 , B_2 , B_3 при равной высоте активного и пассивного волноводов $a = b$ в зависимости от параметра a/λ .

Из этих рисунков следует, что коэффициенты отражения A_1 и возбуждения A_3 при всех рассмотренных значениях параметров a и b

Fig. 2, 3, 4.



близки к значениям соответствующих коэффициентов одиночного волновода с высотой a/λ . Волна H_{02} в одиночном волноводе при рассматриваемом излучении волны H_{01} не возбуждается.

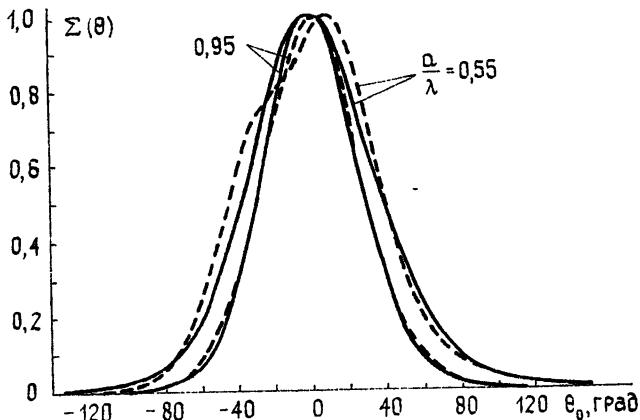


Рис. 5.

На рис. 5 приведена нормированная к единице диаграмма направленности при высоте активного волновода $a/\lambda = 0,55$, $0,95$ и пассивного $b/\lambda = 0,2$ (сплошная кривая), $0,8$ (штриховая). Наличие пассивного волновода заметно сказывается на диаграмме направленности лишь при высоте активного волновода, близкой к $0,5\lambda$, и сравнительно большой высоте пассивного.

В настоящей работе основной особенностью решения является последовательное применение основных приемов метода Винера—Хопфа (метода факторизации), т. е. последовательно уравнения представлялись в виде суммы «плюс»- и «минус»-функций и применялась теорема Лиувилля. В результате рассматриваемая

задача свелась к решению одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с хорошей устойчивой сходимостью.

ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ ТРЕХ ВОЛНОВОДОВ РАВНОЙ ВЫСОТЫ

5. Вывод СФУ. Пусть структура образована четырьмя полуплоскостями $x=3a, a, -a, -3a, z<0$ (рис. 6). Пространство разбито на пять областей $x>3a, a < x < 3a, -a < x < a, -3a < x < -a, x < -3a$, и величинам, относящимся к этим областям, присвоены соответственно верхние индексы 2, 1, 0, -1, -2. На раскрытии структуры из каждого волновода набегают волны H_{01} с компонентами электрического поля

$$E_y^{(j)}(x, z) = A^{(j)} e^{ihz} \sin(\pi/2a)(x-a(2j-1)),$$

где $j=1; 0; -1$. Решениями волнового уравнения (2) относительно фурье-преобразования возбужденного поля $E_y(x, z)$ в областях 2, -2 и 1, 0, -1 являются соответственно выражения (3а) и (3б). Подставляя в эти решения и в их производные по x значения $x=\pm a, \pm 3a$, исключая сначала неизвестные функции переменной a $A^{(j)}, B^{(j)}$ ($j=0, \pm 1$), $C^{(\pm 2)}$, а затем $\varphi_+^{(\pm 1)'}(3a, \alpha), \varphi_+^{(\pm 1)'}(\pm a, \alpha)$ и учитывая граничные условия при $x=\pm a, \pm 3a$.

$$\varphi_{\pm}^{(\pm 2)}(\pm 3a, \alpha) = 0, \quad \varphi_{\pm}^{(j)}(a(2j \pm 1), \alpha) = 0 \quad (j=0, \pm 1),$$

$$\varphi_{+}^{(j)}(a(2j-1), \alpha) = \varphi_{+}^{(j-1)}(a(2j-1), \alpha) \quad (j=0, \pm 1, 2),$$

$$\varphi_{+}^{(\pm 2)}(\pm 3a, \alpha) = \varphi_{+}^{(\pm 1)}(\pm 3a, \alpha) \mp i\pi A^{(\pm 1)}/2a(\alpha + h),$$

$$\varphi_{+}^{(0)}(\pm a, \alpha) = \frac{i\pi A^{(0)}}{2a(\alpha + h)} = \varphi_{+}^{(\pm 1)}(\pm a, \alpha) \pm \frac{i\pi A^{(\pm 1)}}{2a(\alpha + h)},$$

приходим к системе функциональных уравнений

$$\frac{1}{\tilde{K}(\alpha)} \left[D_{+}(a, \alpha) - \frac{D_{+}(3a, \alpha)}{2 \operatorname{ch} 2a\gamma - 1} \right] - i\pi \frac{A^{(1)} - A^{(-1)}}{2a(\alpha + h)} = D_{-}(a, \alpha); \quad (19a)$$

$$\frac{\gamma a}{\operatorname{sh} 2a\gamma} [e^{2a\gamma} D_{+}(3a, \alpha) - D_{+}(a, \alpha)] - i\pi \frac{A^{(1)} - A^{(-1)}}{2a(\alpha + h)} = D_{-}(3a, \alpha); \quad (19b)$$

$$\frac{1}{\tilde{L}(\alpha)} \left[S_{+}(a, \alpha) - \frac{S_{+}(3a, \alpha)}{2 \operatorname{ch} 2a\gamma - 1} \right] -$$

$$- i\pi \frac{2A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(-1)}}{2a(\alpha + h)} = S_{-}(a, \alpha); \quad (19b)$$

$$\frac{\gamma a}{\operatorname{sh} 2a\gamma} [e^{2a\gamma} S_{+}(3a, \alpha) - S_{+}(a, \alpha)] - i\pi \frac{A^{(1)} + A^{(-1)}}{2a(\alpha + h)} = S_{-}(3a, \alpha), \quad (19c)$$

где

$$D_{+}(a, \alpha) = (1/a)(\varphi_{+}^{(1)}(a, \alpha) - \varphi_{+}^{(-1)}(-a, \alpha)),$$

$$D_{+}(3a, \alpha) = (1/a)(\varphi_{+}^{(1)}(3a, \alpha) - \varphi_{+}^{(-1)}(-3a, \alpha)),$$

$$S_{+}(a, \alpha) = (1/a)(\varphi_{+}^{(1)}(a, \alpha) + \varphi_{+}^{(-1)}(-a, \alpha)),$$

$$S_{+}(3a, \alpha) = (1/a)(\varphi_{+}^{(1)}(3a, \alpha) + \varphi_{+}^{(-1)}(-3a, \alpha)),$$

$$D_{-}(a, \alpha) = \varphi_{-}^{(0)'}(a, \alpha) - \varphi_{-}^{(1)'}(a, \alpha) - \varphi_{-}^{(-1)'}(-a, \alpha) + \varphi_{-}^{(0)'}(-a, \alpha),$$

$$D_{-}(3a, \alpha) = \varphi_{-}^{(1)'}(3a, \alpha) - \varphi_{-}^{(2)'}(3a, \alpha) - \varphi_{-}^{(-2)'}(-3a, \alpha) + \varphi_{-}^{(-1)'}(-3a, \alpha),$$

$$S_{-}(a, \alpha) = \varphi_{-}^{(0)'}(a, \alpha) - \varphi_{-}^{(1)'}(a, \alpha) + \varphi_{-}^{(-1)'}(-a, \alpha) - \varphi_{-}^{(0)'}(-a, \alpha),$$

$$S_{-}(3a, \alpha) = \varphi_{-}^{(1)'}(3a, \alpha) - \varphi_{-}^{(2)'}(3a, \alpha) + \varphi_{-}^{(-2)'}(-3a, \alpha) - \varphi_{-}^{(-1)'}(-3a, \alpha),$$

$$\tilde{K}(\alpha) = \frac{\operatorname{sh} 2a\gamma \operatorname{sh} a\gamma}{\gamma a \operatorname{sh} 3a\gamma}, \quad \tilde{L}(\alpha) = \frac{\operatorname{sh} 2a\gamma \operatorname{ch} a\gamma}{\gamma a \operatorname{ch} 3a\gamma}.$$

6. Решение СФУ и определение физических параметров. Невозвестные функции D_{+} и S_{+} в СФУ частично разделились, что связано с выделением четных и нечетных составляющих возбужденного поля $E_y(x, z)$ относительно переменной x . Решения уравнений (19a), (19b) и (19c) проводятся одинаково. Для решения первой пары уравнений функция $\tilde{K}(\alpha)$ представлялась в виде $\tilde{K}(\alpha) = \tilde{K}_{+}(\alpha)\tilde{K}_{-}(\alpha)$ и уравнение (19a) умножалось на функцию $\tilde{K}_{-}(\alpha)$. Затем все слагаемые этого уравнения представлялись в виде суммы «плюс» и «минус»

функций и из равенства нулю суммы «плюс»-функций выражалась неизвестная функция $D_+(a, \alpha)$ через неизвестную функцию $D_+(3a, \alpha)$. Функция $D_+(a, \alpha)$ подставлялась в уравнение (19б), решение которого привело к соотношениям

$$D_+(a, \alpha) = (2\operatorname{ch} 2a\gamma + 1)^{-1} D_+(3a, \alpha) + \tilde{K}_+(\alpha) \left[\frac{i\pi \tilde{K}_+(h)}{2a(\alpha + h)} \times \right.$$

$$\left. \times (A^{(1)} - A^{(-1)}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{a(\alpha - \bar{\alpha}_n)} \right],$$

$$D_+(3a, \alpha) = -3\tilde{H}_+(\alpha) \sum_{p=0}^{\infty} [\zeta_p/a(\alpha + \bar{\alpha}_p)], \quad (20)$$

где

$$x_n = M_n D_+(3a, \bar{\alpha}_n) / \tilde{K}_+(\bar{\alpha}_n); \quad (21)$$

$$M_n = a \operatorname{res}_{\alpha=\bar{\alpha}_n} \frac{1}{2\operatorname{ch} 2a\gamma + 1} = \frac{(-1)^n \pi}{2\sqrt{3}a\bar{\alpha}_n} \left(\left[\frac{n+1}{2} \right] + (-1)^n - \frac{1}{3} \right),$$

$[x]$ — целая часть числа x ,

$$\bar{\alpha}_n = \left[k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \left(\left[\frac{n+1}{2} \right] + (-1)^n \frac{1}{3} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\zeta_p = \mu_p \left[i\pi \frac{A^{(1)} - A^{(-1)}}{2a(h - \bar{\alpha}_p)} \tilde{K}_+(h) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{a(\bar{\alpha}_p + \bar{\alpha}_n)} \right],$$

$$\mu_p = M_p \tilde{H}_+(\bar{\alpha}_p) / \tilde{K}_+(\bar{\alpha}_p), \quad \tilde{H}(\alpha) = (3a\gamma)^{-1} e^{-3a\gamma} \operatorname{sh} 3a\gamma,$$

$$\tilde{H}(\alpha) = \tilde{H}_+(\alpha) \tilde{H}_-(\alpha), \quad \tilde{K}(\alpha) = \tilde{K}_+(\alpha) \tilde{K}_-(\alpha),$$

$$\tilde{H}_-(\alpha) = \tilde{H}_+(-\alpha), \quad \tilde{H}_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2} \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{K}_-(\alpha) = \tilde{K}_+(-\alpha), \quad \tilde{K}_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2} \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Решение уравнений (19в), (19г) имеет вид

$$S_+(a, \alpha) = (2\operatorname{ch} 2a\gamma - 1)^{-1} S_+(3a, \alpha) +$$

$$+ \tilde{L}_+(\alpha) \left[i\pi \frac{2A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(-1)}}{2a(\alpha + h)} \tilde{L}_+(h) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{a(\alpha - \hat{\alpha}_n)} \right],$$

$$S_+(3a, \alpha) = 3\tilde{G}_+(\alpha) \left[i\pi \frac{A^{(1)} + A^{(-1)} - A^{(0)}}{3a(\alpha + h)} \tilde{G}_+(h) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\xi_p}{a(\alpha + \hat{\alpha}_p)} \right], \quad (22)$$

где

$$y_n = N_n S_+(3a, \hat{\alpha}_n) / \tilde{L}_+(\hat{\alpha}_n), \quad (23)$$

$$N_n = a \operatorname{res}_{\alpha=\hat{\alpha}_n} \frac{1}{2\operatorname{ch} 2a\gamma - 1} = \frac{(-1)^n \pi}{2\sqrt{3}a\hat{\alpha}_n} \left(\left[\frac{n+1}{2} \right] + (-1)^n \frac{1}{6} \right).$$

$$\hat{\alpha}_n = \left[k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \left(\left[\frac{n+1}{3} \right] + (-1)^n \frac{1}{6} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\xi_p = v_p \left[\frac{i\pi \tilde{L}_+(h)}{2a(h - \hat{\alpha}_p)} (2A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(-1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{a(\hat{\alpha}_p + \hat{\alpha}_n)} \right],$$

$$v_p = N_p \tilde{G}_+(\hat{\alpha}_p) / \tilde{L}_+(\hat{\alpha}_p), \quad \tilde{G}(\alpha) = (3a\gamma)^{-1} e^{-3av} \operatorname{ch} 3a\gamma,$$

$$\tilde{G}(\alpha) = \tilde{G}_+(\alpha) \tilde{G}_-(\alpha), \quad \tilde{L}(\alpha) = \tilde{L}_+(\alpha) \tilde{L}_-(\alpha),$$

$$\tilde{G}_-(\alpha) = \tilde{G}_+(-\alpha), \quad \tilde{G}_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2} \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{L}_-(\alpha) = \tilde{L}_+(-\alpha), \quad \tilde{L}_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2} \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Неизвестные константы x_n и y_n удовлетворяют бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, получающимся подстановкой решений (20), (22) соответственно в соотношении (21), (23):

$$\frac{x_m}{3v_m} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{v_p}{a^2(\bar{\alpha}_p + \bar{\alpha}_m)(\bar{\alpha}_p + \bar{\alpha}_n)} = \\ (24a)$$

$$= \frac{i\pi}{2} \tilde{K}_+(h) (A^{(1)} - A^{(-1)}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{v_p}{a^2(\alpha_p + \bar{\alpha}_m)(\alpha_p - h)};$$

$$\frac{y_m}{3v_m} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{v_p}{a^2(\hat{\alpha}_p + \hat{\alpha}_m)(\hat{\alpha}_p + \hat{\alpha}_n)} = - \frac{i\pi \tilde{G}_+(h)}{3a(\hat{\alpha}_m + h)} \times \\ (24b)$$

$$\times (A^{(0)} - A^{(1)} - A^{(-1)}) + \frac{i\pi}{2} \tilde{L}_+(h) (2A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(-1)}) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{v_p}{a^2(\hat{\alpha}_p + \hat{\alpha}_m)(\hat{\alpha}_p - h)},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

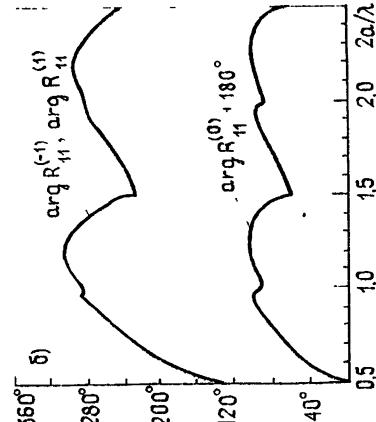
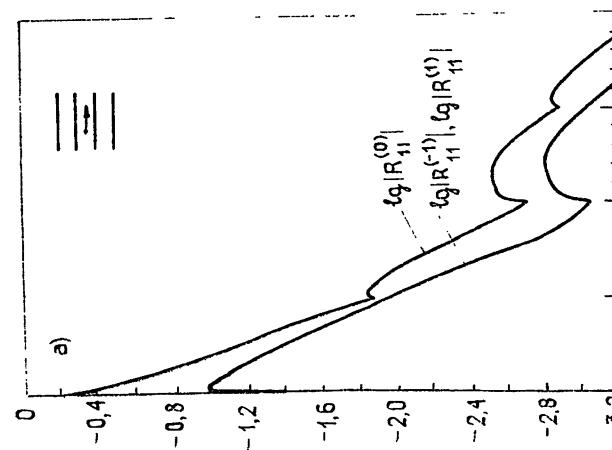
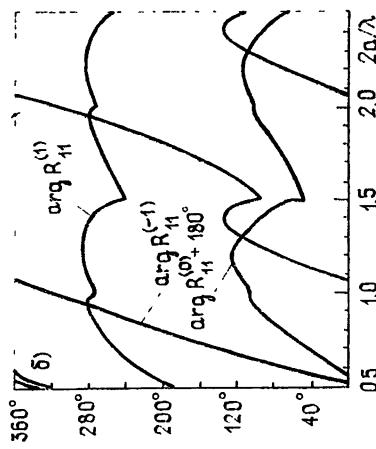
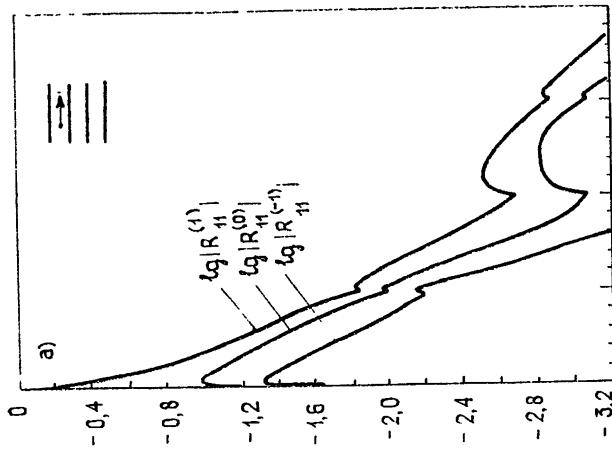
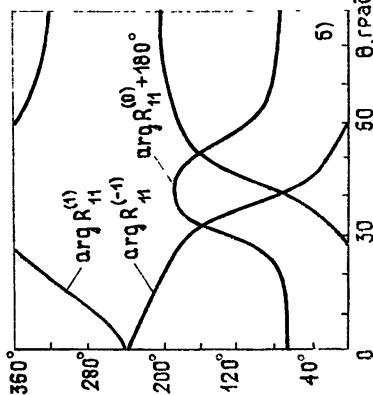
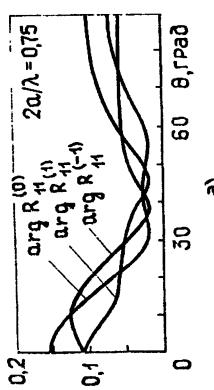
Факторизация функций типа $\tilde{K}(\alpha)$ и $\tilde{L}(\alpha)$ рассмотрена в работах [1, 2]. При $n \gg 1$

$$\mu_n \simeq (i/2)(-1)^n, \quad v_n = (i/2)(-1)^n. \quad (25)$$

Вычисление физических параметров сводится к вычислению обратных фурье-преобразований соотношений (3а), (3б), в которых величины $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ ($j = 0, \pm 1$), $C^{(\pm 2)}$ выражаются через полученные решения. Для возбужденного поля внутри волноводов получаем

$$E_y^{(j)}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{ln}^{(j)} \exp(-i\alpha_{2a,n} z) \sin \frac{\pi n}{2a} (x - a(2j - 1)),$$

PHC. 7, 8, 9.



где

$$R_{11}^{(j)} = \frac{i\pi n}{4a^2 \sigma_{2a,n}} \cdot [z_+^{(j)}(a(2j-1), \alpha_{2a,n}) - (-1)^n \varphi_+^{(j)}(a(2j+1), \alpha_{2a,n})],$$

$$j=0, \pm 1, \quad \alpha_{2a,n} = (k^2 - \pi^2 n^2 / 4a^2)^{1/2}, \quad (26)$$

а диаграмма направленности имеет вид

$$\Sigma^{(2)}(0) = (c_0 k / 16\pi^2) \sin^2 0 |\varphi_+^{(2)}(3a, -k \cos 0)|^2,$$

$$\Sigma^{(-2)}(0) = (c_0 k / 16\pi^2) \sin^2 0 |\varphi_+^{(-2)}(-3a, -k \cos 0)|^2. \quad (27)$$

При вычислении коэффициентов (26) и диаграммы направленности (27) после решения усеченных систем линейных уравнений (24а), (24б) последовательно вычислялись постоянные ζ_n и ξ_n , величины $D_+(3a, \alpha)$, $S_+(3a, \alpha)$, затем $D_+(a, \alpha)$, $S_+(a, \alpha)$, и, наконец, полусуммы и полуразности функций D_+ и S_+ подставлялись в соотношения (26), (27). Усеченные системы линейных уравнений имеют хорошую сходимость.

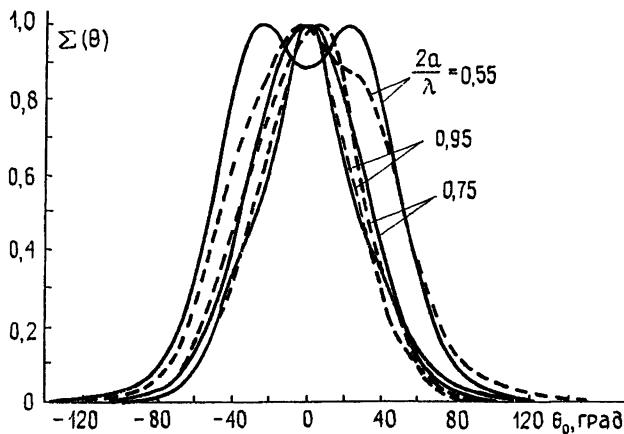


Рис. 10.

При $2a/\lambda \leq 2,5$ для получения $\log |R_{11}^{(j)}|$ и $\arg R_{11}^{(j)}$ с графической точностью достаточно сохранить по 10 неизвестных x_n и y_n . Приведенные ниже результаты получены при сохранении 20 неизвестных, что обеспечило получение четырех верных знаков $\lg |R_{11}^{(j)}|$ и $\arg R_{11}^{(j)}$. При этом в бесконечных суммах, входящих в коэффициенты систем (24а), (24б), сохранялось 50 членов, столько же членов сохранялось в суммах выражений (20) и (22). При $n > 15$ постоянные v_n и μ_n вычислялись по формулам (25). С хорошей точностью выполняются асимптотические оценки $x_n, y_n \sim n^{-1}$ при $n \gg 1$, следующие из условия на ребре полуплоскости.

7. Численные результаты. На рис. 7 представлены результаты вычислений коэффициентов $R_{11}^{(j)}$ ($j=0, \pm 1$) при возбуждении центрального волновода. При таком симметричном возбуждении структуры коэффициенты $R_{11}^{(1)}$ и $R_{11}^{(-1)}$ равны. Коэффициент $R_{11}^{(0)}$ близок к соответствующему коэффициенту одиночного волновода. На рис. 8 приведены результаты расчетов при активном верхнем волноводе $A^{(1)}=1$, $A^{(0)}=A^{(-1)}=0$. Значения коэффициента $R_{11}^{(1)}$ и в этом случае близки к соответствующим значениям коэффициента одиночного волновода.

Три волновода являются простейшей моделью фазированной антенной решетки. На рис. 9 представлены результаты вычисления коэффициентов $R_{11}^{(j)}$ ($j=0, \pm 1$) при возбуждении всех трех волноводов волнами H_{01} с амплитудами $A^{(j)} = \exp(2ikaj \sin \theta_0)$ ($j=0, \pm 1$) при фиксированной высоте волноводов $2a/\lambda = 0,75$. Величина θ_0 определяет сдвиг фаз возбуждающих структуру собственных волн. Из этого рисунка следует, что значения модуля и фазы коэффициента отражения волны в центральном волноводе далеки от значений коэффициента отражения для бесконечной решетки плоских волноводов [1].

На рис. 10, 11 представлены результаты расчетов нормированной к единице диаграммы направленности (27). На рис. 10 представлена диаграмма направленности при излучении волны H_{01} из центрального (сплошные кривые) и верхнего (прерывистые линии) волноводов при высотах волноводов $2a/\lambda = 0,55, 0,75, 0,95$. Эти значения высот указаны возле кривых. Из рисунка видно, что наличие пассивных волноводов заметно сказывается на диаграмме направленности только при высотах волноводов, близких к $0,5\lambda$. При $2a/\lambda > 1$ наличие пассивных волноводов практически не сказывается на диаграмме. На рис. 11 приведена диаграмма направленности при возбуждении структуры волнами H_{01} с амплитудами

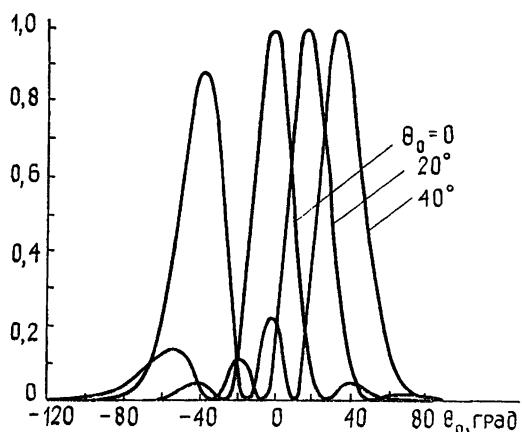


Рис. 11.

$A^{(j)} = \exp(2ikaj \sin \theta_0)$ ($j=0, \pm 1$) при $\theta_0 = 0, 20^\circ, 40^\circ$ и $2a/\lambda = 0,75$. Несовпадение направлений максимального излучения с направлениями, определяемыми углами θ_0 , объясняется уменьшением излучения каждого волновода с увеличением отклонения от оси z .

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М: Сов. радио, 1966.
2. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М: ИЛ, 1962.

Московский институт
управления

Поступила в редакцию
28 февраля 1984 г.,
после объединения
30 мая 1984 г.

RADIATION OF MAGNETIC WAVES FROM TWO AND THREE PLANE WAVEGUIDES

S. M. Zhurav

A problem is considered of magnetic waves radiation from two plane waveguides of different height and three waveguides of equal height formed accordingly by three and four ideally conducting half-plane. The method of solution is based on Wiener—Hopf method.