

УДК 621.372.822

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

Н. П. Жук

Построены объемные интегродифференциальные уравнения и рассмотрено рэлеевское приближение для задачи о рассеянии электромагнитной волны на магнитодиэлектрическом теле в слоистой среде.

Интегральные уравнения макроскопической электродинамики для задач рассеяния на телах в однородной среде предложены в основополагающей работе [1]. При этом решение таких задач сводится к отысканию внутреннего поля рассеивателя, что в некоторых случаях намного легче, чем решение аналогичной по содержанию задачи в дифференциальной формулировке [2].

В данной работе получены интегральные уравнения для более общей ситуации, когда включение погружено в плоскослойную среду. Такие задачи — ключевые для интегральной оптики, дефектоскопии [3] и др.

1. При решении задачи в отсутствие включения среда характеризуется диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}(z)$ и магнитной проницаемостью $\hat{\mu}(z)$ и заполняет всю рассматриваемую область V с границей Γ трехмерного пространства $R = (x, y, z)$. Граница Γ включает одну или несколько импедансных или проводящих поверхностей; к ней же приписали бесконечно удаленные точки из V .

Пусть теперь в такую среду погружается магнитодиэлектрическое тело с материальными параметрами $\hat{\epsilon}_p(R)$, $\hat{\mu}_p(R)$, которое занимает область V_p с границей Γ_p , $V_p \subset V$. Будем считать $\hat{\epsilon}_p$, $\hat{\mu}_p$ произвольными, а ϵ , μ — одноосными вдоль z днадами, т. е.

$$\hat{\eta} = \eta_x \hat{I}_x + \eta_z \hat{I}_z, \quad \eta = \epsilon, \mu, \quad (1)$$

где $\hat{I}_x = x_0 x_0 + y_0 y_0$, $\hat{I}_z = z_0 z_0$, а x_0 , y_0 , z_0 — орты по осям x , y и z (используется безындексная запись диадных величин).

Монохроматическое ($\sim e^{-i\omega t}$) электромагнитное поле E, H , создаваемое в получившейся нерегулярной среде, возмущенной включением, сторонними источниками J, M , подчиняется уравнениям Максвелла в форме

$$E - ik_0 \hat{\epsilon} \cdot H = - (4\pi/c) (M + M_p), \quad (2)$$

$$\nabla \times H + ik_0 \hat{\epsilon} \cdot E = (4\pi/c) (J + J_p),$$

$k_0 = \omega/c$, условно непрерывности тангенциальных компонент на Γ_p и обычным граничным условиям на Γ , например условию предельного

поглощения и бесконечности. Здесь $j_p(R) = -(ik_0c/4\pi) \tilde{\varepsilon}(R) \cdot E(R)$, $M_p(R) = -(ik_0c/4\pi) \tilde{\mu}(R) \cdot H(R)$ — плотности поляризационных токов, наведенных в материале включения; $\tilde{\eta}(R) \equiv \hat{\eta}_p(R) - \hat{\eta}(z)$ при $R \in V_p$ и $\tilde{\eta} \equiv 0$, если $R \in \bar{V}_p$, $\eta = \varepsilon, \mu$.

Полное поле E, H в нерегулярной среде, следовательно, можно рассматривать как сумму первичного поля E_0, H_0 , порождаемого в невозмущенной среде сторонними источниками, и рассеянного поля E_s, H_s , которое создается в этой же среде поляризационными источниками. Следуя [4], выразим каждое из этих полей через соответствующие источники с помощью операторов Грина уравнений Максвелла для невозмущенной задачи. Эти последние, согласно [4], представим через функции Грина $\hat{f}_{e,m}$ для векторных потенциалов в невозмущенной среде, которые всюду в V удовлетворяют уравнениям

$$[\nabla \times \hat{\mu}^{-1}(z) \cdot \nabla \times \hat{I} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(z) - \hat{\varepsilon}(z) \cdot \hat{L}_\mu] \cdot \hat{f}_e(R, R') = \hat{I} \delta(R - R'), \quad (3)$$

$$[\nabla \times \hat{\varepsilon}^{-1}(z) \cdot \nabla \times \hat{I} - k_0^2 \hat{\mu}(z) - \hat{\mu}(z) \cdot \hat{L}_\varepsilon] \cdot \hat{f}_m(R, R') = \hat{I} \delta(R - R'),$$

а на Γ подчиняются граничным условиям, вытекающим из соответствующих условий для первичного поля. Здесь $\hat{I} = \hat{I}_t + \hat{I}_z$ — единичная диада; $\hat{L}_\mu \equiv \nabla \varepsilon_t^{-1}(z) [\nabla_t \mu_z^{-1}(z) + z_0 \partial_z \mu_t^{-1}(z)]$, $\hat{L}_\mu \rightarrow \hat{L}_\varepsilon$, $\mu \leftrightarrow \varepsilon$ — диадные дифференциальные операторы; $\nabla_t = x_0 \partial_x + y_0 \partial_y$, $\partial_z \equiv \partial/\partial z$ и т. д.

В результате приходим к следующим основным соотношениям:

$$E(R) = E_0(R) + (k_0^2 \hat{I} + \hat{L}_p) \cdot \int_{V_p} \hat{f}_e(R, R') \cdot \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E(R') dR' + \\ + ik_0 \hat{\varepsilon}^{-1}(z) \cdot \nabla \times \int_{V_p} \hat{f}_m(R, R') \cdot \tilde{\mu}(R') \cdot H(R') dR', \quad (4)$$

$$H(R) = H_0(R) + (k_0^2 \hat{I} + \hat{L}_\varepsilon) \cdot \int_{V_p} \hat{f}_m(R, R') \cdot \tilde{\mu}(R') \cdot H(R') dR' - \\ - ik_0 \hat{\mu}^{-1}(z) \cdot \nabla \times \int_{V_p} \hat{f}_e(R, R') \cdot \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E(R') dR'.$$

Объемные интегралы справа в (4) дают рассеянное поле. При $R \in V_p$ эти соотношения образуют систему интегродифференциальных уравнений для внутреннего поля включения. Решив эти уравнения, используем затем (4) как прямые квадратурные формулы для отыскания электромагнитного поля вне включения.

В случае, когда среда, окружающая включение, является однородной, соотношения (4) переходят в известные ранее результаты [1].

2. В трехмерных задачах электромагнитное поле и функции Грина для векторных потенциалов являются аналитическими по переменной k_0 в окрестности нуля. Если размеры области V_p малы по сравнению с длиной волны в материале включения и в окружающей среде, а характерные масштабы изменения $\hat{\varepsilon}_p, \hat{\mu}_p, \varepsilon, \mu$ как функций прост-

равственных переменных там, где эти функции непрерывны, значительно превосходят длину волны, полезным оказывается низкочастотное представление для соотношений (4). Оно формально получается разложением всех величин из (4) по малому параметру $ik_0 \rightarrow 0$: $E(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ik_0)^n E^{(n)}(R)$, $E_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (ik_0)^n E_0^{(n)}$, $f_{e,m} = \sum_{n=1}^{+\infty} (ik_0)^n \hat{f}_{e,m}^{(n)}$ и т. п. В результате приходим к бесконечным цепочкам интегродифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} E^{(n)}(R) - \nabla \int_{V_p} [\nabla' \varphi_\varepsilon(R, R')] \cdot \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E^{(n)}(R') dR' = E_0^{(n)}(R) + \\ + \sum_{q=1}^n \hat{L}_\mu \cdot \int_{V_p} \hat{f}_e^{(q)}(R, R') \cdot \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E^{(n-q)}(R') dR' + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} \hat{\varepsilon}^{-1}(z) \nabla \times \int_{V_p} \hat{f}_m^{(q)}(R, R') \cdot \tilde{\mu}(R') \cdot H^{(n-q-1)}(R') dR' - \\ - \sum_{q=0}^{n-2} \int_{V_p} \hat{f}_e^{(q)}(R, R') \cdot \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E^{(n-q-2)}(R') dR' \end{aligned} \quad (5)$$

(вторая цепочка получается отсюда заменой $\mu \leftrightarrow \varepsilon$, $e \leftrightarrow m$, $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$). Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$; слагаемые в суммах из правой части для отрицательных q игнорируются.

Функции Грина $\varphi_{\varepsilon, \mu}$ электро (магнито)-статики для невозмущенной среды подчиняются уравнениям

$$\nabla \cdot \hat{\eta}(z) \cdot \nabla \varphi_\eta(R, R') = \delta(R - R'), \quad \eta = \varepsilon, \mu \quad (6)$$

и надлежащим граничным условиям в «статической бескончности» [5], § 19. К примеру, $\varphi_\varepsilon(R, R') = \partial \varphi_p(R, R') / \partial n = 0$ на проводящем участке границы Γ , $R' \in \Gamma$, n — нормаль к ней.

Видно, что при фиксированном n соотношения для $E^{(n)}, H^{(n)}$ не связаны друг с другом; в их правых частях при $n \geq 1$ фигурируют величины $E^{(m)}, H^{(m)}$, $m < n$, находящиеся из предшествующих в цепочке уравнений.

Рассмотрим подробнее рэлеевское приближение для внутреннего поля. Оборвав цепочку уравнений (5) на первом звене ($n=0$), получаем интегродифференциальные уравнения квазистатики для внутреннего поля. В предположении, что первичное и внутреннее поля, а также материальные параметры включения и невозмущенной среды в области V_p изменяются слабо, их решение получим в виде выражений

$$E(R) = \hat{\chi}_e E_0(R_p), \quad H(R) = \hat{\chi}_m H_0(R_p), \quad R \in V_p \quad (7)$$

(индекс «0» квазистатического приближения опущен), где R_p — некоторая «центральная» точка включения; $\hat{\chi}_e = [\hat{I} + \hat{P}_\varepsilon \tilde{\varepsilon}(R_p) \hat{\varepsilon}^{-1}(z_p)]^{-1}$, $\hat{\chi}_m = [\hat{I} + \hat{P}_\mu \tilde{\mu}(R_p) \hat{\mu}^{-1}(z_p)]^{-1}$, а

$$\hat{P}_\eta = - \nabla \int_{V_p} \nabla' \varphi_\eta(R, R') dR' |_{R=R_p} \cdot \hat{\eta}(z_p) \quad (8)$$

— диады деполяризации, $\eta = \varepsilon, \mu$.

Проследим закономерности формирования внутреннего поля малого включения на простейшем примере кусочно-однородной — трехслойной — невозмущенной среды и малого однородного эллипсоидального включения. Пусть $\hat{\eta}(z) = \hat{\eta}_2 \hat{I}$ при $z > b > 0$, $\hat{\eta}_1 \hat{I}$ при $0 < z < b$ и $\hat{\eta}_0 \hat{I}$ при $z < 0$, $\eta = \epsilon, \mu$ (т. е. среда считается изотропной). Свяжем с включением локальную декартову систему координат x', y', z' с центром в R_p , в которой область V_p описывается каноническим уравнением $x'^2/a_1^2 + y'^2/a_2^2 + z'^2/a_3^2 \leq 1$, $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. Обозначим через $\|A_{ij}\|$ матрицу перехода от x, y, z к x', y', z' и введем диаду \hat{A} с матрицей $\|A_{ij}\|$ в абсолютной системе координат x, y, z .

Удобно полагать, что включение V_p получается из эталонного включения, которое занимает область V_{p0} : $x^2/a_1^2 + y^2/a_2^2 + z^2/a_3^2 \leq 1$, и характеризуется диадными материальными параметрами $\hat{\epsilon}_{p0}, \hat{\mu}_{p0}$, поворотом в пространстве на углы, определяемые матрицей $\|A_{ij}\|$ и смещением центра в точку R_p . Очевидно, что $\hat{\epsilon}_p = \hat{A}^T \hat{\epsilon}_{p0} \hat{A}$, $\hat{\mu}_p = \hat{A}^T \hat{\mu}_{p0} \hat{A}$, «т» означает операцию транспонирования.

Нетрудно показать, что для описанной ситуации диады \hat{P}_η имеют вид

$$\hat{P}_\eta = [\hat{A}^T \hat{R}_\eta(z_p) + \hat{B}^T \hat{S}_\eta(z_p)] \hat{A}. \quad (9)$$

Диада \hat{B} в абсолютной системе координат определяется матрицей $\|B_{ij}\|$ с элементами $B_{ij} = A_{ij}$, $B_{i3} = -A_{i3}$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$. Диады $\hat{R}_\eta(z_p)$, $\hat{S}_\eta(z_p)$ даются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{R}_\eta(z_p) &= \hat{M} \text{ при } z_p > b \text{ или } z_p < 0, \\ \hat{R}_\eta(z_p) &= \hat{M} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (p_{\eta 2} p_{\eta 0})^n D(2nb) \text{ при } 0 < z_p < b, \\ \hat{S}_\eta(z_p) &= \begin{cases} \frac{4m_{\eta 2} p_{\eta 0}}{(1+m_{\eta 2})^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{\eta 2} p_{\eta 0})^n \hat{D}(2nb - 2z_p) - p_{\eta 2} \hat{D}(2b + 2z_p) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (p_{\eta 2} p_{\eta 0})^n [p_{\eta 2} \hat{D}(2(n+1)b + 2z_p) + p_{\eta 0} \hat{D}(2nb - 2z_p)] \\ \frac{4m_{\eta 0} p_{\eta 2}}{(1+m_{\eta 0})^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{\eta 2} p_{\eta 0})^n \hat{D}(2(n+1)b + 2z_p) - p_{\eta 0} \hat{D}(2z_p) \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

при $z_p > b$, $0 < z_p < b$ и $z_p < 0$ соответственно. Здесь $m_{\eta i} = \eta_1 / \eta_i$, $p_{\eta i} = (m_{\eta i} - 1) / (m_{\eta i} + 1)$, $i = 0, 2$.

Далее, $\hat{D}(x) \equiv \hat{M}_e[\xi(x)] - \hat{L}[\xi(x)]$, $\xi(x)$ — положительный корень уравнения $\sum_{i=1}^3 A_{i3}^2 / (a_i^2 + \xi) = 1/x^2$; диада $\hat{L}[\xi]$ в абсолютной системе координат характеризуется матрицей $\|L_{ij}\|$ с элементами

$$L_{ij}[\xi] \equiv A_{i3} A_{j3} p(\xi) / (a_i^2 + \xi)(a_j^2 + \xi), \quad (11)$$

$$p(\xi) = a_1 a_2 a_3 \left[\sum_{i=1}^3 A_{i3}^2 / (a_i^2 + \xi) \right] \left| \prod_{i=1}^3 (a_i^2 + \xi) \right|^{-1/2},$$

$$\hat{M}_e [\xi] = x_0 x_0 M_{1e} [\xi] + y_0 y_0 M_{2e} [\xi] + z_0 z_0 M_{3e} [\xi],$$

$$M_{je}[\xi] = (a_1 a_2 a_3 / 2) \int_{\xi}^{+\infty} [(a_j^2 + t) R(t)]^{-1} dt,$$

$R(t) = [(a_1^2 + t)(a_2^2 + t)(a_3^2 + t)]^{1/2}$ — внешние потенциальные факторы эллипсоида; $\hat{M} \equiv \hat{M}_e[\xi] |_{\xi=0}$ — диада, определяемая внутренними потенциальными факторами, $i, j = 1, 2, 3$.

Бесконечные суммы в формулах для \hat{R}_n, \hat{S}_n учитывают воздействие неоднородности окружающей среды — в данном случае грани раздела $z=0, b$ — на формирование внутреннего поля включения из-за многократных отражений от неоднородностей. Предельные переходы позволяют получить из (9), (10) соответствующие результаты для более простых ситуаций; так, для однородной (а значит, и безграничной) окружающей среды имеем $\hat{P}_n = A^T \hat{M} A$ [1]. Из сравнения этой формулы с (9) видно, что слоистость окружающей среды приводит к изменению характера взаимосвязи первичного поля и внутреннего поля включения, определяемой диадами деполяризации, по сравнению с таким же включением в однородной среде. Иными словами, изменяются рассеивающие свойства включения. Этот эффект проиллюстрирован в п. 4.

3. Функции Грина $\hat{f}_{e,m}$ из (3) в некоторых случаях можно построить в явном виде, что существенно облегчает аналитическое и численное исследование уравнений (4). Это будет, например, в случае, если невозмущенная среда занимает область, неограниченную по горизонтальным координатам $-\infty < x, y < +\infty$ и, быть может, ограниченную по вертикальной координате z одной либо двумя проводящими плоскостями $z = \text{const}$. В этом случае $\hat{f}_{e,m}$ можно выразить через четыре [6] или два [4] скалярных потенциала.

В конечном итоге нас, как правило, интересует рассеянное поле вдали от включения. Ограничиваясь ситуацией, описанной в начале этого пункта, и полагая вдобавок, что тепловые потери в невозмущенной среде отсутствуют, приведем соответствующие окончательные формулы, которые следуют из (4) с учетом результатов [4, 7].

Рассеянное поле представляется в виде суперпозиции неоднородных цилиндрических волн, бегущих по горизонтали от включения в точку наблюдения:

$$\frac{E_s(\mathbf{R})}{H_s(\mathbf{R})} = \frac{k_0^2}{2\sqrt{2\pi D}} \sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \sum_{\lambda} \frac{e^{i(\lambda D + \varepsilon \cdot 4)}}{\sqrt{x}} q_{\eta}(\mathbf{x}) \frac{E_{\eta}(\mathbf{x}, z)}{H_{\eta}(\mathbf{x}, z)}. \quad (12)$$

Здесь и далее $D = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$, \mathbf{r} и \mathbf{r}_p — горизонтальные компоненты радиусов-векторов точки наблюдения \mathbf{R} и некоторой центральной точки \mathbf{R}_p внутри включения, волновой вектор \mathbf{x} направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)/D$,

$$q_{\eta}(\mathbf{x}) = \int_{V_p} [E_{\eta}^*(\mathbf{x}, z') \tilde{\varepsilon}(R') E(R') + H_{\eta}^*(\mathbf{x}, z') \tilde{\mu}(R') H(R')] e^{-i\mathbf{x}(r' - r_p)} dR', \quad (13)$$

* — комплексное сопряжение, $R' = (r', z')$.

Собственное волновое число κ здесь и далее связано со спектральным параметром λ соотношением $\kappa = \sqrt{-\lambda}$, $\text{Im} \sqrt{-\lambda} \geq +0$. Под знаком \sum' проводится (с учетом возможного вырождения) обычное суммирование по точкам λ_k дискретного спектра и интегрирование в положительном направлении по части непрерывного спектра λ , отвечающей распространяющимся волнам излучения (для них $\text{Im} \kappa = 0$ [7]); $\sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \dots$ учитывает вклады собственных волн вертикальной ($\eta = \varepsilon$) и горизонтальной ($\eta = \mu$) поляризации. Комплексные амплитуды $E_\eta(\mathbf{x}, z)$, $H_\eta(\mathbf{x}, z)$ собственной волны в невозмущенной среде приведены в Приложении.

Представление (12) справедливо для фраунгоферовой зоны включения, т. е. при $\kappa D \gg 1$, $D \gg l_t$, $\kappa l_t^2/D \ll 1$. Для малых включений ($\kappa l_{t,z} \ll 1$) (13) преобразуется к виду

$$q_\eta(\mathbf{x}) = p_e \cdot E_\eta^*(\mathbf{x}, z_p) + p_m \cdot H_\eta^*(\mathbf{x}, z_p), \quad (14)$$

$$p_e = \int_{V_p'} \tilde{\varepsilon}(R') \cdot E(R') dR', \quad p_m = \int_{V_p'} \tilde{\mu}(R') \cdot H(R') dR',$$

т. е. в этом случае вдали от включения рассеянное поле совпадает с полем точечных источников $\mathbf{j}_p(R) = -ik_0 c/4\pi \mathbf{p}_e \delta(R - R_p)$, $\mathbf{M}_p(R) = -(ik_0 c/4\pi) \mathbf{p}_m \delta(R - R_p)$. Здесь $l_{t,z}$ — максимальные размеры включения в горизонтальном и вертикальном сечениях.

Полный поток $W(\mathbf{n})$ энергии рассеянного поля через вертикальное сечение слоистой среды в направлении \mathbf{n} на точку наблюдения

$$W(\mathbf{n}) = \int W_s(R) \cdot \mathbf{n} dz, \quad W_s(R) = \text{Re}(c/8\pi) E_s(R) \times H_s^*(R) \quad (15)$$

(предельно интегрирования по z отвечают всей области V , занятой средой), согласно (12) и формулам (П.1) и (П.3) Приложения, оказывается равным «сумме» вкладов $W_{\eta\lambda}(\mathbf{n})$ за счет рассеяния в соответствующую собственную волну

$$W(\mathbf{n}) = \sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \sum_{\lambda}' W_{\eta\lambda}(\mathbf{n}), \quad W_{\eta\lambda} = ck_0^3 |q_\eta(\mathbf{x})|^2 / (8\pi)^2 D. \quad (16)$$

Рассеивающие свойства включения мы будем описывать полным сечением рассеяния $\sigma^t = D \int_0^{2\pi} W(\mathbf{n}) d\varphi / J_0$, где φ — азимутальный угол точки наблюдения; $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$, а J_0 — коэффициент, характеризующий в энергетическом плане первичное поле. Согласно (16), эта величина равна сумме парциальных сечений $\sigma_{\eta k} = D \int_0^{2\pi} W_{\eta\lambda k}(\mathbf{n}) d\varphi / J_0$ за счет рассеяния в k -ю волну дискретного спектра соответствующей поляризации и сечения рассеяния $\sigma^r = D \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \int_{-\kappa_\eta^2}^0 d\lambda W_{\eta\lambda}(\mathbf{n}) / J_0$ во все распространяющиеся волны излучения ($-\kappa_\eta^2$ — левая граница непрерывного спектра λ [7]):

$$\sigma^t = \sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \sum_{\lambda_k} \sigma_{\eta k} + \sigma^r. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь практически важный случай, когда материальные параметры невозмущенной среды зависят от вертикальной координаты только в ограниченном интервале z , отвечающем планарному волноводу, а прилегающая к нему среда однородна и изотропна. Примем для определенности, что волновод толщиной $2b$ занимает область $|z| < b$ и, следовательно,

$$\hat{\varepsilon}(z) = \hat{I} \begin{cases} \varepsilon_2, & z > b \\ \varepsilon_0, & z < -b \end{cases}, \quad \hat{\mu}(z) = \hat{I} \begin{cases} \mu_2, & z > b \\ \mu_0, & z < -b \end{cases} \quad (18)$$

$\varepsilon_i, \mu_i = \text{const}$. Если «включение» расположено в волноводе, рассеянное им поле вне волновода, в верхней среде ($z > b$), описывается выражениями

$$\begin{aligned} E_s(\mathbf{R}) &= \frac{e^{k_1 L}}{L} \frac{k_2^3 \sin \theta}{\varepsilon_2 \mu_2} \left[\theta_0 \begin{Bmatrix} t_\varepsilon / \rho_2 \\ \rho_2 t_\mu \end{Bmatrix} + \varphi_0 \begin{Bmatrix} t_\mu \\ -t_\varepsilon \end{Bmatrix} \right], \\ H_s(\mathbf{R}) &= \frac{e^{k_1 L}}{L} \frac{k_2^3 \sin \theta}{\varepsilon_2 \mu_2} \left[\theta_0 \begin{Bmatrix} t_\mu \\ -t_\varepsilon \end{Bmatrix} + \varphi_0 \begin{Bmatrix} t_\varepsilon / \rho_2 \\ \rho_2 t_\mu \end{Bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

которые получаются из (12) методом перевала. Здесь $k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$, $\rho_2 = \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2}$; сферические координаты $L(\mathbf{R})$, $\theta(\mathbf{R}) \in (-\pi/2, \pi/2)$ точки наблюдения \mathbf{R} определены соотношениями $z - b = L \sin \theta$, $D = L \cos \theta$, $l_0(\mathbf{R})$, $\theta_0(\mathbf{R})$ и $\varphi_0(\mathbf{R})$ — орты этой системы координат; $l_0 = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{n}$, $\theta_0 = \mathbf{z}_0 \cos \theta - \mathbf{n} \sin \theta$, $l_0 = \mathbf{z} \sin \theta + \mathbf{n} \cos \theta$. Величины t_η даются равенством

$$t_\eta = \sum \tilde{\frac{q_\eta(\mathbf{x}_0)}{2N_\eta(\lambda_0)} \left[\Psi_\eta(b, \lambda_0) + \frac{\partial \Psi_\eta(b + 0, \lambda_0)}{ik_2 \sin \theta} \right]}, \quad (20)$$

где $\mathbf{x}_0 = k_2 \cos \theta \mathbf{n}$, а $\lambda_0 = -\mathbf{x}_0^2$. При $\cos \theta < \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 / \varepsilon_2 \mu_2}$ под знаком \sum здесь производится суммирование по двум взаимно ортогональным функциям $\Psi_\eta(z, \lambda)$ непрерывного спектра (см. Приложение), отвечающим двукратно вырожденному (для фиксированного индекса η) значению спектрального параметра λ_0 ; если $\cos \theta > \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 / \varepsilon_2 \mu_2}$, вырождение этой точки непрерывного спектра отсутствует и знак \sum игнорируется.

Формула (20) справедлива в дальней зоне включения не слишком близко к верхней границе волновода: $\min \{L/b, D/l_0, kl_{i,z}^2/L, k_2 L \cos^2 \theta\} \gg 1$.

Диаграмму рассеяния для включения в волноводе (18) определим как

$$D(\theta, \varphi) = 2\pi \sigma(\theta, \varphi) / \sigma', \quad (21)$$

где $\sigma(\theta, \varphi) = L^2 W_r(\theta, \varphi) \cdot I_0 / J_0$ — дифференциальное сечение рассеяния в волны излучения, а $W_r(\theta, \varphi) \equiv W_s(\mathbf{R})|_{z=L \cos \theta \rightarrow \infty}$ — плотность потока энергии рассеянного поля в дальней зоне вне волновода в точке со сферическими координатами L, θ, φ . В верхнем полупространстве $-0 < \theta < \pi/2$, согласно (19), эта величина равна

$$W_r(\theta, \varphi) = \frac{I_0}{L^2} \frac{c}{8\pi} \frac{k_2^6 \sin^2 \theta}{(\varepsilon_2 \mu_2)^2} \left[\frac{|t_\varepsilon|^2}{\rho_2} + \rho_2 |t_\mu|^2 \right]. \quad (22)$$

4. Конкретизируем полученные выше общие формулы применительно к задаче о рассеянии основной моды TM_1 на воздушном пузырьке в планарном волноводе интегральной оптики. Однородный изотропный волновод, занимающий область $0 < z < b$, лежит на проводящей подложке $z=0$, а при $z=b$ граничит со свободным пространством. Диэлектрические проницаемости материала волновода и пузырька равны 2,25 и 1,0, магнитная проницаемость всюду равна единице. Ра-

днус пузырька 0,01, длина волны в свободном пространстве 1 (все величины с размерностью длины берутся в одних и тех же единицах длины). На рис. 1а—в приведена зависимость безразмерных полного сечения рассеяния $\sum_t = \lg(\sigma^t/b)$ (1) и сечения рассеяния в волны излучения $\sum_r = \lg(\sigma^r/b)$ (3), а также удельных вкладов волн излучения $d_r = \sigma^r/\sigma^t$ (2) и моды того же типа, что и падающая $d_i = \sigma_{ei}/\sigma^t$ (3), от координаты z_p центра пузырька. Для сравнения на рис. 1а приведена зависимость величины \sum_t при падении высших мод — $TM_2(1')$ и $TM_3(1'')$. Штриховая линия — вертикальный профиль $\Phi(z) = \Psi_e(z, \lambda_1)/\max \Psi_e(z, \lambda_1)$ z -й компоненты электрического поля падающей моды. Коэффициент J_0 равен полному потоку энергии первичного поля в направлении распространения, вдоль x_0 :

$$J_0 = \text{Re} (c/8\pi) \int_0^\infty E_0(R) \times H_0^*(R) \cdot x_0 dz.$$

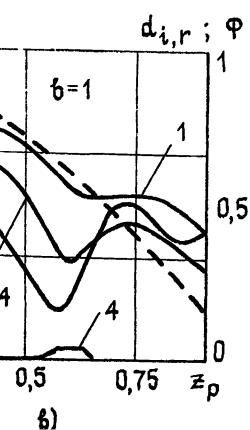
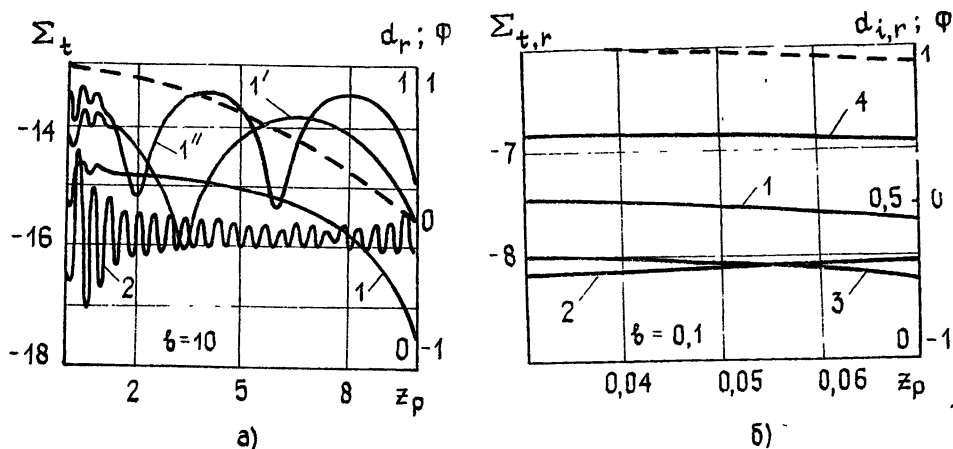


Рис. 1.

ответственно), зависимость $\sum_{t,r}$ повторяет профиль первичного электрического поля. Следовательно, определяющее значение в формировании внутреннего поля включения и его характеристик рассеяния принадлежит первому фактору. Для ситуации, когда толщина волновода сравнима с длиной волны (рис. 1в), свойственно резкое, на несколько порядков, изменение рассеиваемой энергии с глубиной залегания при сравнительно медленном изменении первичного электрического поля.

Внутреннее электрическое поле включения, определяющее амплитуду эквивалентного точечного источника и величину рассеиваемой энергии (формулы (14) и (15)), зависит согласно (7), от двух факторов — величины первичного электрического поля, возбуждающего включение, и характера взаимосвязи первичного и внутреннего полей, что определяется диадой $\hat{\chi}_e$ на данной глубине залегания. Видно, что, когда толщина волновода намного больше или меньше длины волны (рис. 1а и 1б соот-

Это связано с определяющим влиянием второго фактора из-за возрастающего значения многократных отражений от границ волновода на формирование внутреннего поля.

В тонком волноводе большая часть энергии рассеивается в моды того же типа TM_1 , что и падающая волна, но распространяющиеся по всем азимутальным направлениям: $d_i > d_r$. С увеличением толщины волновода величина d_i уменьшается и в широком волноводе становится пренебрежимо малой (на рис. 1а она поэтому отсутствует), а удельный вклад волн излучения превращается в осциллирующую функцию глубины залегания.

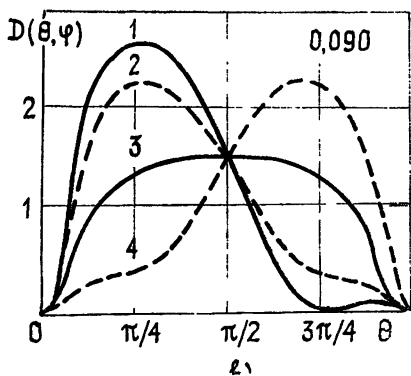
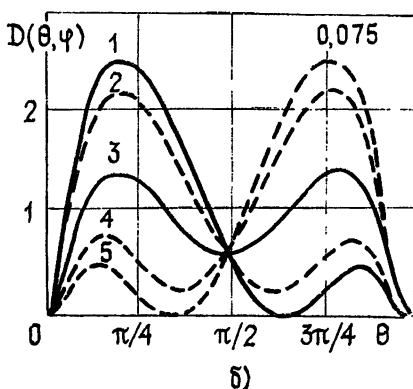
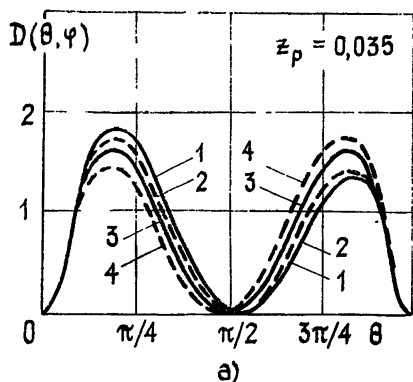


Рис. 2.

Угол $\theta_{\max} \approx \pi/4$, отвечающий максимуму рассеиваемой энергии в направлении распространения первичной волны ($\varphi=0$), при этом слегка увеличивается.

Автор признателен О. А. Третьякову за обсуждение различных аспектов данной работы, Н. М. Богомолу и В. И. Алешину за проведение расчетов на ЭВМ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Собственные волны $E_\gamma(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{x}r}$, $H_\gamma(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{x}r}$ в слоистой среде определяются выражениями

$$E_z(\mathbf{x}, z) = \epsilon_i^{-1}(z) d_\epsilon \Psi_\epsilon(z, \lambda) / k_0 N_\epsilon(\lambda), \quad H_z(\mathbf{x}, z) = -z_0 \times \mathbf{x} \Psi_\epsilon(z, \lambda) / \mathbf{x} N_\epsilon(\lambda), \quad (\text{П.1})$$

$$E_\mu(\mathbf{x}, z) = z_0 \times \mathbf{x} \Psi_\mu(z, \lambda) / \mathbf{x} N_\mu(\lambda), \quad H_\mu(\mathbf{x}, z) = \mu_i^{-1}(z) d_\mu \Psi_\mu(z, \lambda) / k_0 N_\mu(\lambda),$$

где $\mathbf{x} = (x_x, x_y)$ — волновой вектор, $\hat{d}_\eta = \hat{z}_0 \kappa \eta_t(z) / \eta_z(z) + i(\mathbf{x}/x) \hat{\partial}_z$, $\eta = \varepsilon$, μ — дифференциальный оператор, $\Psi_\eta(z, \lambda)$ — собственные функции краевой задачи ($\lambda = -\kappa^2$) (см. [7]):

$$[\eta_z(z) \partial_z \eta_t^{-1}(z) \partial_z + k_\eta^2(z) + \lambda] \Psi_\eta(z, \lambda) = 0, \quad (П.2)$$

$$|\Psi_\eta(z, \lambda)| < \infty,$$

$\Psi_\mu = \partial_z \Psi_\varepsilon = 0$ на проводящей плоскости $z = \text{const}$; $k_\varepsilon^2 = k_0^2 \varepsilon_z \mu_t$, $k_\mu^2 = k_0^2 \mu_z \varepsilon_t$. Они ортогональны в смысле

$$\int \Psi_\eta(z, \lambda) \Psi_\eta(z, \lambda') \eta_z^{-1}(z) dz = N_\eta^2(\lambda) \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (П.3)$$

где $N_\eta(\lambda)$ — нормировочный коэффициент, $\delta_{\lambda\lambda'}$ — дельта-функция Кронекера или Дирака; интегрирование по z проводится в пределах всей рассматриваемой области. Для среды без тепловых потерь Ψ_η , N_η можно выбрать вещественными, что и предполагается при записи формулы (13).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Хижняк П. А. — ЖТФ, 1958, 28, № 7, с 159
- 2 Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — т. 1.
3. Research Techniques in Nondestructive Testing. / Ed. by R. S. Share. — London: Academic Press, 1982.
- 4 Богомолов Н. М., Жук Н. П., Третьяков О. А. — ДАН УССР, 1984, сер. А, с. 57
- 5 Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982
- 6 Дмитриев В. И. В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1977, с. 116.
- 7 Шевченко В. В. — Диф. уравнения, 1979, 15, № 11, с. 2004.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17 октября 1983 г.,
после переработки
1 октября 1984 г.

INTEGRAL EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS FOR THE STRATIFIED MEDIA

N. P. Zhuck

The problem of EM scattering by the magnetodielectric body in the stratified medium is formulated in the form of volume integrodifferential equations. The Raleigh approximation of the problem has been studied.