

УДК 621.372.85

## СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА СКАЧКЕ ДИАМЕТРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. Б. Маненков

На примере задачи о дифракции поверхностных волн на нерегулярностях круглого диэлектрического волновода проведено сравнение нескольких различных методик расчета: вариационного метода, метода приближенного сшивания мод, а также методов, основанных на гауссовой аппроксимации поля основной моды и на принципе Гюйгенса. Для малых значений безразмерной частоты результаты расчета сравниваются с аналитическими зависимостями, выведенными с помощью уравнения Вишера—Хопфа.

Скачкообразные нерегулярности играют важную роль при практическом применении диэлектрических волноводов (оптических волокон). К настоящему времени имеется целый ряд интересных публикаций [1–6], в которых на основе простых допущений дан анализ таких нерегулярностей (в том числе при большом изменении параметров волноводов). В представленной статье на нескольких примерах проведено сравнение результатов этих работ с результатами, которые получаются с помощью вариационного метода [7] и метода факторизации [8].

### 1. СТАЦИОНАРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Предварительные расчеты показали, что для открытых систем стационарные функционалы, которые получены в работе [7] по аналогии с теорией закрытых волноводов [9, 10], не очень удобны для практических расчетов; в частности, они требуют высокой точности вычисления несобственных интегралов. Поэтому мы выведем здесь соотношения, которые более просты для реализации на ЭВМ.

Мы будем придерживаться обозначений, которые были использованы в статьях [7, 8]. Рассматриваем стык двух круглых диэлектрических волноводов разного диаметра с общей осью и одинаковыми проницаемостями\* (рис. 1). Для общности будем считать, что диэлектрик анизотропен; тензор  $\hat{\epsilon} = [\epsilon_{ij}]$  диагонален в рассматриваемой системе координат. Цифрами 1 и 2 в скобках будем отмечать величины, относящиеся соответственно к левому и правому волноводам. Для определенности будем считать,

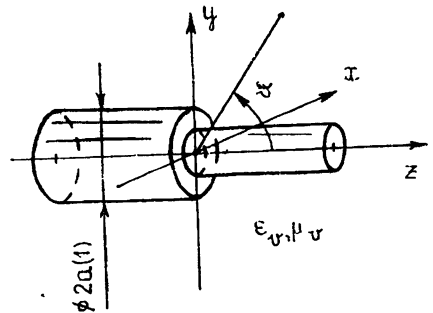


Рис. 1.

\* Полученные в работе результаты нетрудно обобщить на случай стыка волноводов с различными диэлектрическими проницаемостями.

что радиус правого волновода меньше левого:  $a(2) < a(1)$ . Предполагаем, что на стык слева (рис. 1) набегают основная поверхностная мода  $HE_{11}$ , поляризованная вдоль оси  $y$ . Поле в плоскости  $z=0$  имеет следующее спектральное представление [7]:

$$E|_{z=-0} = E_{11}^{(1)}(1) + \rho_l E_{11}^{(2)}(1) + \sum_m \int_0^\infty C_{m\kappa}^{(2)}(1) E_{m\kappa}^{(2)}(1) dx; \quad (1)$$

$$E|_{z=+0} = \tau_l E_{11}^{(1)}(2) + \sum_m \int_0^\infty C_{m\kappa}^{(1)}(2) E_{m\kappa}^{(1)}(2) dx, \quad (2)$$

где  $m$  — дискретный индекс,  $\kappa$  — поперечное волновое число\*. В этой формуле верхними индексами (1) и 2) отмечены прямые и обратные моды. Мы предполагаем, что волноводы одномодовые, поэтому в разложениях (1), (2) учтена только основная волна дискретного спектра, поле которой обозначено через  $E_{11}$ . При отсутствии потерь в диэлектрике поперечное волновое число этой волны чисто мнимое:  $\kappa_{11} = i|\kappa_{11}|$ . Из условия непрерывности поперечных компонент полей  $E$  и  $H$  при  $z=0$  с учетом ортогональности собственных мод можно получить интегральное уравнение [7, 9] для электрического поля

$$e_z \times \hat{Q}_0 [E] = -e_z \times H_{11}(1); \quad (3)$$

$$\hat{Q}_0 [E] = \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{\langle E; H_{11}(i) \rangle}{N_{11}(i)} H_{11}(i) + \sum_m \int_0^\infty \frac{\langle E; H_{m\kappa}(i) \rangle}{D_{m\kappa}(i)} H_{m\kappa}(i) dx \right\}, \quad (4)$$

$$\langle E; H \rangle = \int_{z=0} E \times H e_z dx dy.$$

В этих формулах введены следующие обозначения:  $N_{11}(i)$  — нормы волн дискретного спектра ( $i=1, 2$  — номер волновода),  $D_{m\kappa}(i)$  — нормирующие множители волн непрерывного спектра,  $e_z$  — орт вдоль оси  $z$ . Отметим, что произведение (4) — антисимметрично, т. е.  $\langle E; H \rangle = -\langle H; E \rangle$ . Для упрощения записи мы будем опускать верхние индексы у полей, выбирая всегда прямые и обратные моды так, что  $e_z \times E^{(2)} = e_z \times E^{(1)}$ . Аналогичное уравнение можно получить для электрического поля  $E'$  в случае, когда волна падает на стык справа. Из этих уравнений получается стационарный функционал, определяющий амплитуду прошедшей волны [11]:

$$\tau_l = \frac{2}{N_{11}(2)} \frac{\langle E; H_{11}(2) \rangle \langle E'; H_{11}(1) \rangle}{\langle E; \hat{Q}_0 [E'] \rangle}. \quad (5)$$

В силу стационарности ошибка в выборе полей при  $z=0$  приводит к малой ошибке (следующего порядка малости) в величине  $\tau_l$ ; поэтому ниже, как обычно, мы будем во всех стационарных выражениях использовать в качестве «пробных полей» поля падающих волн  $HE_{11}$ . Для рассматриваемой величины  $\tau_l$  имеем с учетом ортогональности мод

$$\tau_l = -\frac{4}{N_{11}(2)} \frac{\langle E_{11}(1); H(2) \rangle \langle E_{11}(2); H_{11}(1) \rangle}{\langle E_{11}(1); H_{11}(2) \rangle + \langle E_{11}(2); H_{11}(1) \rangle}, \quad (6)$$

\* Зависимость от времени  $t$  полагаем в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Для практических приложений удобно ввести пропорциональный  $\tau$  коэффициент прохождения по амплитуде  $\tau = \sqrt{P_{tr}/P_{inc}}$ , где  $P_{tr}$  и  $P_{inc}$  — мощности прошедшей и падающей волн  $HE_{11}$ . Сходным образом [7, 9] получается стационарный функционал, определяющий коэффициент отражения  $\rho_l$ .

Как уже отмечалось, приведенные выше соотношения не очень удобны для практических расчетов. Эти формулы можно преобразовать, если учесть следующие равенства, которые выводятся из леммы Лоренца:

$$\langle E_{11}^{(1)}(1); H_{mz}^{(1)}(2) \rangle \pm \langle E_{mz}^{(1)}(2); H_{11}^{(1)}(1) \rangle = \frac{\omega}{h_{11}(1) \mp h_x} \Phi_{11, mz}^{(\pm)}; \quad (7)$$

$$\Phi_{11, mz}^{(\pm)} = \int_{z=0}^{\wedge} (\varepsilon - \varepsilon_v) E_{11}^{(1)}(1) E_{mz}^{(\alpha)}(2) dx dy, \quad (8)$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_v \mu_v}, \quad h_x = \sqrt{k^2 - \chi^2}, \quad h_{11}(i) = \sqrt{k^2 - \chi_{11}^2(i)},$$

где  $h_x, h_{11}$  — продольные волновые числа,  $\varepsilon_v, \mu_v$  — проницаемости вакуума,  $\omega$  — круговая частота. В формуле (8) надо взять  $\alpha=1$ , когда слева стоит знак минус, и  $\alpha=2$  для знака плюс. С учетом (7) из (6) получаем

$$\tau = \frac{\omega \Phi_{11, 11}^{(+)}}{|h_{11}(1) - h_{11}(2)| |N_{11}(1) N_{11}(2)|^{1/2}} \left[ 1 - \frac{|h_{11}(1) - h_{11}(2)|^2 \Phi_{11, 11}^{(-)}}{|h_{11}(1) + h_{11}(2)|^2 \Phi_{11, 11}^{(+)}} \right]. \quad (9)$$

Для вывода формулы, определяющей  $\rho_l$ , следует учесть также стационарное выражение, которое получается из интегрального уравнения для магнитного поля, и взять сумму двух функционалов. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_l}{1 - \rho_l^2} &= \frac{\omega^2 \Phi_{11, 11}^{(+)} \Phi_{11, 11}^{(-)}}{[h_{11}^2(1) - h_{11}^2(2)] N_{11}(1) N_{11}(2)} + \\ &+ \frac{\omega^2}{N_{11}(1)} \sum_m \int_0^{\infty} \frac{\Phi_{11, mz}^{(+)} \Phi_{11, mz}^{(-)} dx}{[h_{11}^2(1) - h_x^2] D_{mz}(2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В этой формуле несобственным является только интеграл по  $\chi$ . В выражениях для  $\Phi_{11, 11}^{(\pm)}$  и  $\Phi_{11, mz}^{(\pm)}$  интегрирование проводится по кольцу с радиусом  $r < a(1)$  и может быть выполнено достаточно просто.

## 2. ПОЛЯ СОБСТВЕННЫХ МОД

Дальнейшее преобразование формул (9), (10) возможно с учетом свойств полей собственных мод. Мы будем в основном рассматривать слабонаправляющие волноводы, у которых диэлектрическая проницаемость невелика:

$$|\chi_{ij}| \ll 1, \quad \chi_{ij} = (\varepsilon_i/\varepsilon_v - \delta_{ij}), \quad i, j = x, y, z, \quad (11)$$

$[\delta_{ij}]$  — единичный тензор. Такие волноводы обычно применяются в оптических системах передачи и обработки информации [3].

Рассмотрим сначала моды непрерывного спектра в круглом регулярном волноводе. При условии (11) их можно рассчитать с помощью приближенного подхода, который был применен в [12] к анализу по-

верхностных волн. В случае анизотропного волновода проще получить все характеристики, если задать приближенные выражения полей и сшить их на границе раздела в среднем [13]. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  поля радиационных мод  $HE_{1\kappa}$  будем искать в виде (при  $\kappa < k$ )

$$E_x = 0, \quad E_y = \begin{cases} AJ_0(g_\kappa r), & r < a; \\ Bf_0(\kappa r), & r > a; \end{cases} \quad (12)$$

$$E_z = \frac{1}{ih_z} \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad H = \frac{1}{i\omega\mu_z} \operatorname{rot} E, \quad (13)$$

$$g_\kappa^2 = k^2 \gamma_{yy} + \kappa^2, \quad f_0(\kappa r) = H_0^{(1)}(\kappa r) + i\Gamma_{1\kappa} H_0^{(2)}(\kappa r),$$

где  $J_n, H_n^{(1,2)}$  — цилиндрические функции,  $a$  — радиус волновода. Поле при  $r > a$  записано с учетом обобщенных условий излучения [14, 15].

Сшивая теперь в среднем [13] компоненты  $(\hat{\epsilon}E)_r, E_\varphi, E_z$  на границе  $r = a$ , получим

$$B = \frac{2A}{2 + \gamma_{yy}}, \quad \Gamma_{1\kappa} = i \frac{\nu_z H_0^{(1)}(\kappa a) - \kappa a H_1^{(1)}(\kappa a)}{\nu_z H_0^{(2)}(\kappa a) - \kappa a H_1^{(2)}(\kappa a)}, \quad (14)$$

$$\nu_z = \frac{2g_\kappa a J_1(g_\kappa a)}{(2 + \gamma_{yy}) J_0(g_\kappa a)}.$$

Аналогичным образом рассчитываются поверхностные моды. В частности, характеристическое уравнение для поперечного волнового числа  $\kappa_{11} = i|\kappa_{11}|$  волны  $HE_{11}$  в этом приближении имеет вид

$$\frac{2g_{11} J_1(g_{11} a)}{(2 + \gamma_{yy}) J_0(g_{11} a)} = \frac{|\kappa_{11}| K_1(|\kappa_{11}| a)}{K_0(|\kappa_{11}| a)}, \quad g_{11}^2 = k^2 \gamma_{yy} - |\kappa_{11}|^2, \quad (15)$$

где  $K_n$  — модифицированные цилиндрические функции. Отметим, что при слабой анизотропии диэлектрика собственные волны можно рассчитывать также методом возмущений (по аналогии с расчетом волн в закрытых системах [16]), исходя из известных выражений для полей в круглом изотропном волноводе. В частности, таким методом нетрудно вычислить константы распространения  $h_{11}(i)$  и величину параметра  $\Gamma_{1\kappa}(i)$ .

### 3. АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

Приведенные выше упрощенные выражения для полей позволяют в ряде случаев получить аналитические формулы для характеристик рассеяния волн. Мы рассмотрим эти случаи подробнее, так как их анализ дает возможность также коснуться вопроса о точности простого варнационного метода [11]. К сожалению, полностью этот вопрос исследовать не удастся, так как в настоящее время отсутствуют строгие решения рассматриваемой задачи (при произвольных значениях параметров). Однако определенные выводы можно сделать на основании изучения предельных случаев, когда задача допускает выделение малого параметра и ее решение может быть получено независимо от варнационного метода методами факторизации, поперечных сечений или с помощью геометрической и физической оптики.

При малых значениях безразмерной частоты  $V(i) = ka(i) \sqrt{\gamma_{yy}} \ll 1$  обоих волноводов задача может быть решена методом факторизации [8].

Для коэффициентов  $\rho_i$  и  $\tau$  получаются выражения, совпадающие с вариационными. В частности, коэффициент передачи оказывается равен

$$\tau = \xi / \text{sh}(\xi), \quad \xi = \ln | \kappa_{11}(1) / \kappa_{11}(2) |. \quad (16)$$

При этих условиях коэффициент отражения экспоненциально мал; например, при дифракции на открытом конце волновода ( $a(2) = 0$ )

$$\rho_i = \frac{|\kappa_{11}(1)|^2}{2k^2} \ln \left| \frac{2k}{\kappa_{11}(1)} \right|, \quad |\kappa_{11}(1) a(1)| \sim \exp \left[ \frac{-2}{V^2(1)} \right]. \quad (17)$$

Если диаметры волноводов близки, то при всех  $V(i)$  интегральное слагаемое в (10) дает малый вклад в  $\rho_i$ ; пренебрегая им, получим

$$\rho_i = [h_{11}(1) - h_{11}(2)] / [h_{11}(1) + h_{11}(2)]. \quad (18)$$

Точно такое же выражение для  $\rho_i$  получается в первом приближении метода поперечных сечений [15]. Отметим, что последняя формула верна для широкого класса диэлектрических волноводов с совпадающими осями и близкой структурой поперечного сечения; для применимости этой формулы необходимо только, чтобы моды другой симметрии возбуждались на стыке с малой амплитудой.

В случае больших значений безразмерной частоты  $V(i)$  вариационный метод согласуется с формулами геометрической оптики. В частности, в задаче о дифракции поверхностной моды на открытом конце волновода предельное значение коэффициента отражения равно [7]

$$\rho_\infty = (\sqrt{\epsilon_{yy}} - \sqrt{\epsilon_v}) / (\sqrt{\epsilon_{yy}} + \sqrt{\epsilon_v}). \quad (19)$$

При выполнении неравенства (11) поперечный размер поля основной моды при всех  $V(i)$  существенно превышает длину волны  $\lambda$ , поэтому для расчета коэффициента прохождения можно применить также принцип Гюйгенса [18, 19]. Исходя из формулы (9), нетрудно установить связь между вариационным значением  $\tau$  и значением  $\tau_H$ , которое получается в этом приближении:

$$\tau = \tau_H (1 - \sigma^2); \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{[h_{11}(1) - h_{11}(2)] \Phi_{11,11}^{(-)}}{[h_{11}(1) + h_{11}(2)] \Phi_{11,11}^{(\tau)}}. \quad (21)$$

При условии (11) имеем  $\sigma \sim \rho_i \ll 1$ , поэтому величины  $\tau_H$  и  $\tau$  практически совпадают. Следует отметить, что при малых значениях  $ka$  применимость принципа Гюйгенса не совсем очевидна: хотя поперечный размер поля велик и в этом случае (за счет медленного его спада при  $r > a$ ), однако изменение параметров среды происходит в малой области  $a \ll \lambda$ .

Как отмечалось выше, при анализе всех рассмотренных случаев удается выделить малые параметры (например,  $V(i)$  или  $1/V(i)$ ); получающиеся при этом выражения для  $\rho_i$  и  $\tau$  являются, по существу, главными членами соответствующих разложений по этим параметрам. Таким образом, вариационный метод дает правильные значения этих членов. Можно ожидать, что при условии (11) метод будет давать достаточно точные результаты и при произвольных значениях  $V(i)$  (по крайней мере в первом приближении по малому параметру  $|\chi_{ij}|$ ). Такое предположение можно (не строго) обосновать исходя из того, что при небольшой диэлектрической проницаемости поле сравнительно слабо возмущается диэлектриком; это обстоятельство в свою очередь позволяет нам ограничиться для аппроксимации неизвест-

ного поля  $E$  полем падающей волны. Отсюда также следует, что погрешность формул (9), (10) может возрастать лишь вблизи «критических частот» высших поверхностных мод (в нашем случае, начиная с  $V(1) > 3,83$ ). Такие области параметров в дальнейшем рассматриваться не будут.

#### 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ

При расчетах величин  $\rho_l$  и  $\tau$  мы использовали формулы (9), (10). Все вычисления проводились с помощью адаптивных процедур [21, 22]. Интегралы по пространственным переменным  $r, \varphi$  вычислялись аналитически, а по  $x$  — численно. Чтобы избежать переполнения в ЭВМ при малых  $x_{11}$ , в этих интегралах делалась замена:  $x = |x_{11}| \operatorname{sh}(u)$ . Одновременно для сравнения проводились расчеты по формулам, полученным методом «приближенного сшивания мод» [1] и методом, основанным на аппроксимации поля основной моды гауссовой функцией [2]. Мы выбрали эти два метода из большого числа других, поскольку они легко обобщаются на случай анизотропных волноводов, и, кроме того, в основном только они используются для обработки экспериментальных данных [1, 5]. Кривые для всех рисунков (за исключением рис. 6) построены при следующих значениях элементов тензора  $\hat{\epsilon}$  обонх волноводов:  $\epsilon_{yy} = 1,04 \epsilon_0$ ,  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{yy}$ . Отметим, что в используемом приближении при  $\chi_{xx} \leq \chi_{yy}$  результаты расчета не зависят от величины  $\epsilon_{xx}$  (для выбранной выше поляризации поверхностной волны).

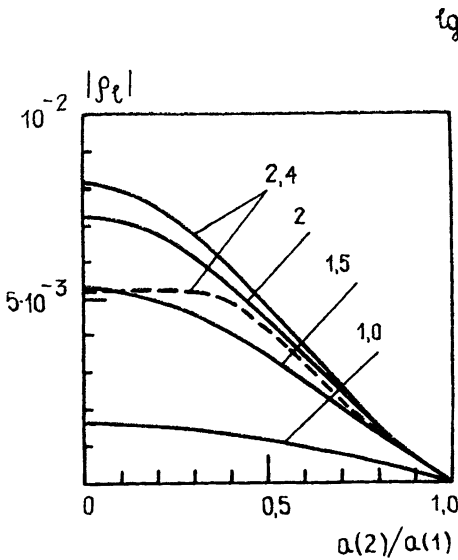


Рис. 2.

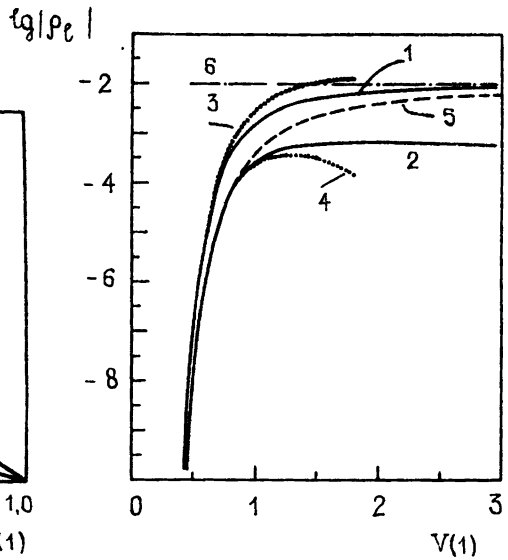


Рис. 3.

На рис. 2 представлены зависимости  $\rho_l$  от отношения радиусов состыкованных волноводов для нескольких значений безразмерной частоты  $V(1) = ka(1)\sqrt{\chi_{yy}}$ ; эти значения приведены около соответствующих кривых. Здесь же для сравнения пунктирной кривой изображена зависимость коэффициента отражения, построенная с помощью метода приближенного сшивания [1] для значения безразмерной частоты  $V(1) = 2,4$ . Рассчитанные этим методом величины коэффициента отражения будем обозначать через  $\rho_x$ . Отметим, что приведен-

ные в работе [1] формулы для  $\rho_N$  неудобны для расчетов: они содержат разность двух близких по величине интегралов. Используя соотношения (7), (8), нетрудно показать, что  $\rho_N = \sigma$ , где величина  $\sigma$  была введена выше формулой (21); для этой величины уже легко построить достаточно точный алгоритм. При условии (11), как следует из (10) и (21), формулы [1] дают заниженное значение коэффициента отражения. Например, при  $V(1) \ll 1$  и  $a(2) \ll a(1)$  из (21) получаем  $\rho_N = |\kappa_{11}(1)|^2 / (4k^2)$ ; это выражение отличается от точной формулы (17) множителем  $2\ln|2k/\kappa_{11}(1)| \gg 1$ . Можно показать, что переход от формулы (10) к формулам работы [1] эквивалентен пренебрежению в исходном уравнении (3) обратными волнами непрерывного спектра. Хотя во всех случаях амплитуды этих волн невелики, только для малого скачка диаметра такое пренебрежение дает незначительную ошибку в величине  $\rho_i$ .

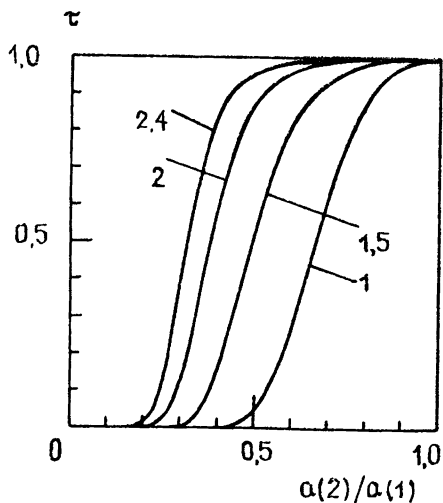


Рис. 4.

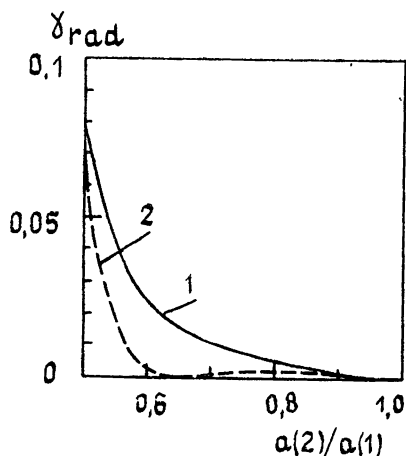


Рис. 5.

На рис. 3 представлены зависимости  $\lg|\rho_i|$  от  $V(1)$  при двух значениях радиуса второго волновода: кривая 1 построена для  $a(2)=0$ , а кривая 2 — для  $a(2)=0,9a(1)$ . Видно, что с ростом безразмерной частоты  $V(1)$  для случая  $a(2)=0$  значения  $|\rho_i|$  монотонно приближаются к предельному (19), которое изображено прямой 6. Вторая кривая имеет пологий максимум при  $V(1) \sim 2$ . Для иллюстрации на этом же рисунке точечными кривыми 3, 4 приведены зависимости  $\lg|\rho_i|$ , рассчитанные методом Винера—Хопфа [8]. Отметим, что формулы, по которым построены эти кривые, верны только при малых значениях  $V(1)$  (в частности, в этих формулах использовано асимптотическое выражение для поперечного волнового числа  $\kappa_{11}$ ); поэтому расхождение кривых 1, 3, и 2, 4 при  $V(1) > 1$  вполне закономерно. Следующая кривая\* 5 представляет значения  $\lg|\rho_N|$ , которые рассчитаны по формулам [1] для  $a(2)=0$ . Соответствующая кривая для малого скачка диаметра, когда  $a(2)=0,9a(1)$ , не построена, так как она в логарифмическом масштабе с графической точностью совпадает с кривой 2.

Рассмотрим теперь кратко результаты расчета коэффициента прохождения основной волны  $\tau$ . На рис. 4 представлены зависимости  $\tau$

\* При малых  $V(1)$  слияние кривых 1 и 5, относящихся к разным значениям  $a(2)$ , является случайным.

от отношения радиусов волноводов, рассчитанные по формуле (9); значения  $V(1)$  приведены около соответствующих кривых. Отметим, что с ростом частоты поверхностная волна становится более «устойчивой»: коэффициент прохождения остается близким к единице для достаточно больших скачков диаметра.

Используя приведенные выше результаты, можно сопоставить разные методы вычисления  $\tau$ . В частности, нетрудно показать, что формулы [1] дают те же значения, что и вариационное выражение (9). При малых  $V(i)$  эта формула, в свою очередь, переходит в соотношение (16), полученное методом Винера—Хопфа. Весьма интересными оказались результаты сравнения с данными, которые получены в работе [2] с помощью аппроксимации поля поверхностной волны  $HE_{11}$  гауссовой функцией. Результаты сравнения приведены на рис. 5 для наиболее важного случая  $V(1)=2,4$ ; по оси ординат отложена величина  $\gamma_{\text{rad}} = 1 - \tau^2 - |\rho_l|^2$ , которая определяет радиационные потери на стыке волноводов. Кривая 1 рассчитана по вариационным формулам, а кривая 2 — по теории [2]. Отметим, что в этой работе коэффициент отражения не вычислялся; однако оценки показывают, что при условии (11) всегда  $|\rho_l|^2 \ll \gamma_{\text{rad}}$ , поэтому пренебрежение величиной  $\rho_l$  не имеет принципиального значения. Как видно из рисунка, теория [2] дает неверное значение  $\gamma_{\text{rad}}$  при  $a(2) \approx 0,65a(1)$ .

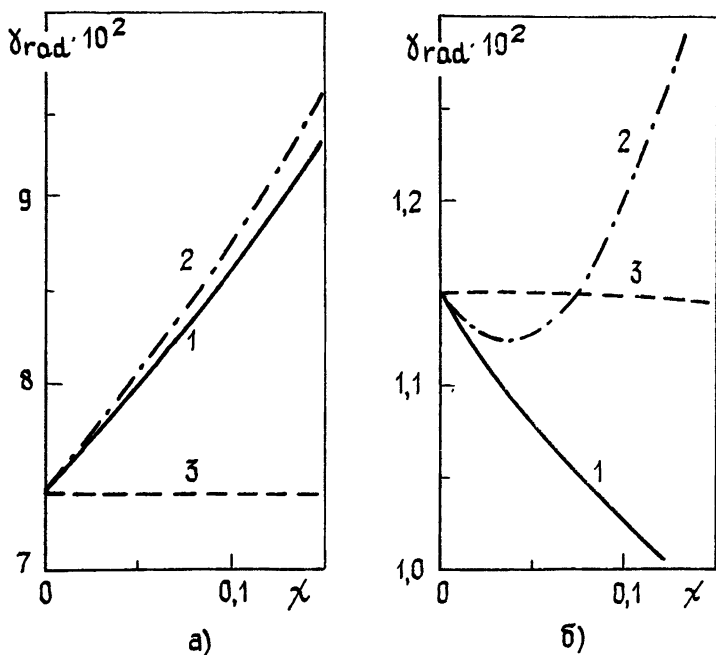


Рис. 6.

Для расчетов волн в регулярных волноводах довольно широко применяется скалярное приближение [3, 19, 20]. С помощью изложенной методики был исследован вопрос о возможности использования этого приближения при расчете нерегулярных систем. Для простоты мы ограничились анализом волноводов с изотропным диэлектриком. На рис. 6 представлены зависимости радиационных потерь  $\gamma_{\text{rad}}$  от величины  $\chi = \epsilon/\epsilon_0 - 1$  при значении параметра  $V(1)=2,4$  для случая  $a(2)=0,5a(1)$  (рис. 6а) и  $a(2)=0,7a(1)$  (рис. 6б). На этих графиках кривые 1 построены по формулам (9), (10)



В которые подставлялись точные выражения для полей поверхностных волн; кривые 2 построены с помощью выражений для полей (12) — (14); и, наконец, кривые 3 построены с использованием скалярного приближения. Отметим, что масштаб по оси ординат на этих рисунках различен. Анализ полученных зависимостей показывает, что расчет полей по формулам (12) — (14) дает существенно лучшие результаты при вычислении  $\gamma_{\text{grad}}$ , чем скалярное приближение; в то же время по сложности эти два метода практически не отличаются. Погрешность при использовании формул (12) — (14) возрастает (рис. 6б) лишь при  $a(2) \sim a(1)$ . Такое возрастание объясняется тем, что в этом случае значение  $\gamma_{\text{grad}}$  определяется полями вблизи границы  $r \sim a(i)$ , где, в частности, неточным является соотношение  $E_x = 0$ .

Кроме интегральных характеристик мы рассчитали также диаграмму направленности  $f(\theta, \varphi)$  сферической волны [14, 15], которая возбуждается на стыке ( $\theta$  — полярный угол). Расчет проводился с помощью стационарного функционала, аналогичного (5). В этом приближении амплитуды радиационных волн  $C_{mz}^{(1)}(2)$  равны

$$C_{mz}^{(1)}(2) = - \frac{4}{D_{mz}(2)} \frac{\langle E_{11}(1); H_{mz}(2) \rangle \langle E_{mz}(2); H_{11}(1) \rangle}{\langle E_{11}(1); H_{mz}(2) \rangle + \langle E_{mz}(2); H_{11}(1) \rangle}. \quad (22)$$

На рис. 7 представлена зависимость  $f(\theta, \pi/2)$  для трех значений диаметра второго волновода при  $V(1) = 2$ ; через  $f_{\text{max}}$  обозначено максимальное значение  $f(\theta, \pi/2)$ . Соответствующие величины  $a(2)/a(1)$  приведены около кривых. Отметим, что при условии (11) для малых углов  $\theta$  приближение Гюйгенса даст практически те же результаты при расчете  $f(\theta, \varphi)$ , что и вариационный метод.

При малых значениях  $V(i)$  можно получить аналитическое выражение для функции  $f(\theta, \varphi)$ , исходя из точных формул для поля на оси [8]; при  $\theta < \pi/2$  имеем

$$f(\theta, \varphi) \propto \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^2 (\text{ch}^2 \theta_1 - \cos^2 \theta)^2 |\ln(i\theta_2/\theta)|^2}, \quad (23)$$

где  $\theta_i = |\kappa_{11}(i)/k|$ . Из (23) следует, что  $f(\theta, \varphi)$  имеет два характерных масштаба:  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . При  $\theta \ll \theta_2$  функция  $f$  логарифмически убывает к нулю, а при  $\theta \gg \theta_1$  спадает по алгебраическому закону:  $f \sim \theta^{-4}$ . Эти закономерности качественно сохраняются и при  $V(1) \sim 1 \div 2$ . В заключение заметим, что, вычислив диаграмму направленности рассеянного поля, нетрудно затем, проинтегрировав ее, определить радиационные потери [15]. Такой способ расчета оказывается предпочтительней при анализе малых скачков, когда  $\tau \approx 1$  и для определения потерь через  $\tau$  необходимо вычислять разность двух близких величин.

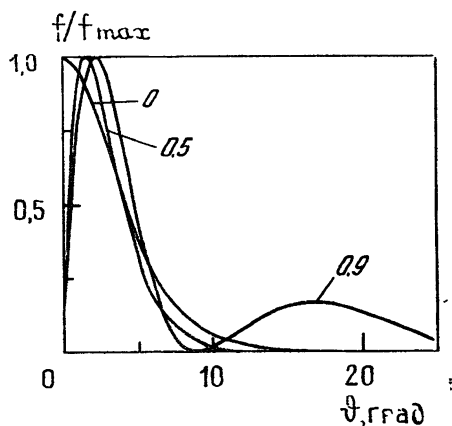


Рис. 7.

Проведенный выше анализ показывает, что расчет нерегулярных систем в большинстве случаев более чувствителен к различным приближениям, чем расчет регулярных линий. Например, при гауссовой аппроксимации полей основной моды достаточно точно определяются не

только постоянные распространения, но и сами поля [23]. Однако в этом приближении характеристики рассеяния (даже интегральные) получаются в ряде случаев неверными. Результаты расчетов указывают также на большое различие между поведением волн в нерегулярных планарных [3] и круглых волноводах.

Автор признателен П. Л. Капице за интерес к работе и А. И. Клееву за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann E.-G., Orpielka D. — Opt. Quant. Electron., 1977, 9, p. 209.
2. Marcuse D. — Bell System Tech. J., 1977, 56, № 5, p. 703.
3. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
4. Snyder A. W. — IEEE Trans., 1970, MTT-18, № 9, p. 608.
5. Hatakeyama I., Tsuchiya H. — IEEE J., 1978, QE-14, № 8, p. 614.
6. Haibara T. et al. — Opt. Lett., 1983, 8, № 4, p. 235.
7. Маненков А. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 12, с. 1484.
8. Маненков А. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 11, с. 1329.
9. Левин Л. Теория волноводов. — М.: Радио и связь, 1981.
10. Angulo C. M., Chang W. S. C. — IRE Trans., 1959, AP-7, № 3, p. 207.
11. Вайнштейн Л. А. — ЖТФ, 1961, 31, № 1, с. 29.
12. Gloge D. — Appl. Opt., 1971, 10, № 11, p. 2252.
13. La Riviere H. J. A., Davies J. B. — IEEE Trans., 1975, MTT-23, № 5, p. 436.
14. Маненков А. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 1, с. 84.
15. Маненков А. В. — IEEE Trans., 1981, MTT-29, № 9, p. 906.
16. Никольский В. В. Варнационные методы для внутренних задач электродинамики. — М.: Наука, 1967.
17. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.
18. Тяжелов В. В. — Изв. вузов. — Радиофизика, 1960, 3, № 1, с. 89.
19. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы — М.: Мир, 1980
20. Morishita K., Kondoh Y., Kumagai N. — IEEE Trans., 1980, MTT-28, № 1, p. 36.
21. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980, с. 180; 202.
22. Kahane D. K. — In: Mathematical Software (edited by Rice J. R.). — N. Y.: Academic Press, 1971, p. 240.
23. Marcuse D. — J. Opt. Soc. Am., 1978, 68, № 1, p. 103.

Институт физических проблем  
АН СССР

Поступила в редакцию  
26 апреля 1984 г.

#### A COMPARISON OF APPROXIMATE METHODS FOR CALCULATION OF WAVE DIFFRACTION AT THE DIAMETER STEP IN THE DIELECTRIC WAVEGUIDE

*A. B. Manenkov*

By example of the problem of surface modes diffraction at the irregularities of a round dielectric waveguide the comparison of the several different computational techniques was made, including the variational method, the mode matching approximate method and the methods, based on the Gaussian approximation of the dominant mode field and the Huygens principle. For small values of the dimensionless frequency the results of the calculations are compared with analytical dependences derived by Wiener — Hopf equation.