ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.56.519.25

О ВЛИЯНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ НА КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Г. Гавриленко, С. С. Петров

Получено и решено уравнение диффузии частотного спектра мощности электромагнитного излучения в столкновительной нестационарной плазме. Показано, что на больших расстояниях поглощение может существенно влиять на параметры спектра. Отмечается отличие полученных результатов от решения задачи о распространении волны с хаотической модуляцией частоты в регулярной поглощающей среде.

Статистические свойства волн в средах с пространственно-временными флуктуациями показателя преломления изучены в ряде работ (см., например, [1–4]), при этом большая часть полученных в них результатов обоснована лишь при малых флуктуациях логарифма амплитуды поля. Так, в статьях [3, 4] методом плавных возмущений [5, 6] установлено, что из-за регулярного поглощения в среде могут увеличиваться флуктуации частоты излучения. Однако этот эффект начинает проявляться только на значительных расстояниях после прохождения волной оптически толстых трасс, поэтому представляет интерес исследовать указанные явления более строгим путем, справедливым и при сильных флуктуациях амплитуды поля. В данной работе для этой цели применяется методика, обобщающая «локальный» метод Чернова [6] на случай нестационарной среды. Аналогичный подход был использован [7] при решении другой задачи.

Пусть в холодной столкновительной плазме без магнитного поля с эффективной частотой соударений $\nu_{эфф}$ и флуктуирующей концентрацией электронов $N(\boldsymbol{r},t)=(1+p(\boldsymbol{r},t))N_0$, $|p|\ll 1$, распространяется квазимонохроматическая электромагнитная волна, поле которой мы представим в виде интеграла Фурье:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega. \tag{1}$$

Пренебрегая поляризационными эффектами и решая для плазмы линеаризованные уравнения квазигидродинамики, можно получить следующее уравнение для фурье-гармоники электрического поля на частоте ω:

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)+\tilde{k}_{\omega}^{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{\omega_p^2}{c^2}i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{r},\omega-\nu)\,\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\nu)}{\nu_{эфф}-i\nu}\,d\nu, \tag{2}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$, c — скорость света, $\omega_p^2=4\pi e^2N_0m^{-1}$, e и m — заряд и масса электрона, $p(\boldsymbol{r},\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{r},t)\,e^{i\omega t}\,dt$,

$$\tilde{k}_\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{эфф})}\right] \tag{3}$$

— квадрат комплексного волнового числа, соответствующего частоте ω.

Пусть в плоскости $z=0$ поле $E(\boldsymbol{r}, t)$ имеет вид плоской монохроматической волны частоты ω_0, бегущей в сторону положительных z. Будем считать, что флуктуации концентрации плазмы являются статистически стационарными и однородными, а также плавными по сравнению с параметрами изменения поля волны:

$$L\,|\nabla E(\boldsymbol{r}, t)|\,E^{-1} \gg 1, \quad T\,|\partial E(\boldsymbol{r}, t)/\partial t|\,E^{-1} \gg 1,$$

где L и T — соответственно пространственный и временной масштабы изменения концентрации.

Приведенные неравенства дают основание рассматривать распространение волны в малоугловом приближении [5]. При этом для функции $U(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$, медленно зависящей от координат в масштабе длины волны $(\mathrm{Re}\,\tilde{k}_\omega)^{-1}$ и связанной с полем $E(\boldsymbol{r}, \omega)$ соотношением

$$E(\boldsymbol{r}, \omega) = U(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)\, e^{i\tilde{k}_\omega z}, \quad \boldsymbol{\rho} = \{x, y\},$$

получаем приближенное уравнение

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2i\tilde{k}_\omega \frac{\partial}{\partial z}\right] U(\boldsymbol{r}, \omega) = \frac{\omega_p^2}{c^2}\,\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\boldsymbol{r}, \omega - \nu)\, U(\boldsymbol{r}, \nu)}{\nu + i\nu_{эфф}} \times$$

$$\times \exp[iz(\tilde{k}_\nu - \tilde{k}_\omega)]\, d\nu, \tag{4}$$

которое можно рассматривать как обобщение известного параболического уравнения [5] на случай нестационарной поглощающей среды. Граничное условие для (4) имеет вид

$$U(\boldsymbol{\rho}, 0, \omega) = A_0 \delta(\omega - \omega_0). \tag{5}$$

В дальнейшем удобно выделить действительную и мнимую части комплексного волнового числа $\tilde{k}_\omega = h_\omega + iq_\omega$. Полагая, что $q_\omega \ll h_\omega$, $\nu_{эфф} \ll \omega$, где ω — частота любой гармоники, представленной в спектре волны, имеем

$$h_\omega = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \qquad q_\omega = \frac{\nu_{эфф}\,\omega_p^2}{2\omega^2 c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию когерентности второго порядка

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, z, \tau) \equiv \langle E(\boldsymbol{\rho}_1, z, t)\, E^*(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}, z, t + \tau)\rangle \tag{7}$$

и ее фурье-образ по τ:

$$S(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\boldsymbol{\rho}, z, \tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{8}$$

причем $S(0, z, \omega) \equiv S(z, \omega)$ — искомый временной спектр мощности волны.

Для расчетов полезно ввести еще одну функцию $\tilde{S}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{S}(\rho, z, \omega)\delta(\omega_1-\omega)=\langle U(\rho_1, z, \omega)U^*(\rho_1+\rho, z, \omega_1)\rangle. \qquad (9)$$

Легко убедиться, что она связана с $S(\rho, z, \omega)$ следующим образом:

$$S(\rho, z, \omega)=\tilde{S}(\rho, z, \omega)\, e^{-2q_\omega z}. \qquad (10)$$

Проводя преобразования, подобные описанным в [5, 6], можно получить уравнение для $\tilde{S}(\rho, z, \omega)$, которое оказывается незамкнутым:

$$\left[\left(1+\frac{q_\omega^2}{h_\omega^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}-\frac{q_\omega}{h_\omega^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\tilde{S}(\rho, z, \omega)\,\delta(\omega-\omega)=$$

$$=-\frac{\omega_p^2\,\omega}{2c^2h_\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\left\{\frac{\exp\,[iz(\tilde{k}_\nu-\tilde{k}_\omega)]}{\nu_{\text{эфф}}-i\nu}\,\tilde{k}_\omega^*\,\langle p(\rho_1, z, \omega-\nu)\times\right. \qquad (11)$$

$$\left.\times U(\rho_1, z, \nu)\,U^*(\rho_1+\rho, z, \omega)\rangle+\text{к. с.}\right\}.$$

Для замыкания (11) применим «локальный» метод [6]. Как известно, для этого требуется, чтобы флуктуационные набеги фазы на «элементарном» слое [6] были малы, а трасса содержала бы много неоднородностей.

Дальнейшие вычисления упрощаются, если радиус когерентности поля ρ_c (характерный масштаб спадания функции $\Gamma(\rho, z, \tau)$ по аргументу ρ) удовлетворяет неравенству

$$h_\omega\rho_c\gg 1. \qquad (12)$$

При этом в (11) можно пренебречь вторыми производными по x и y и положить $\rho=0$, а подынтегральную функцию после расщепления корреляций записать в виде

$$\frac{\exp\,[iz(\tilde{k}_\nu-\tilde{k}_\omega)]}{\nu_{\text{эфф}}-i\nu}\,\tilde{k}_\omega^*\langle p(\rho_1, z, \omega-\nu)\,U(\rho_1, z, \nu)\,U^*(\rho_1, z, \omega)\rangle+$$

$$+\text{к. с.}=-\frac{\omega_p^2}{2c^2}\,\delta(\omega-\omega)\left\{\frac{\omega\,\tilde{S}(z, \nu)}{\nu^2+\nu_{\text{эфф}}^2}\exp[-2(q_\nu-q_\omega)z]\times\right. \qquad (13)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\Phi_p(0, \xi, \omega-\nu)\exp[i(h_\nu-h_\omega)\xi]+\nu\tilde{S}(z, \omega)\times$$

$$\left.\times\int_0^{\infty}d\xi\Phi_p(0, \xi, \omega-\nu)\left[\frac{\tilde{k}_\omega^*\exp[i(h_\nu-h_\omega)\xi]}{\tilde{k}_\nu(\nu_{\text{эфф}}-i\nu)(\nu_{\text{эфф}}-i\omega)}+\text{к. с.}\right]\right\},$$

где $\tilde{S}(z, \omega)\equiv\tilde{S}(0, z, \omega)$, а

$$\Phi_p(0, \xi, \Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle p(\rho, z, t)\,p(\rho, z+\xi, t+\tau)\rangle e^{i\Omega\tau}d\tau.$$

Тем самым для функции $\widetilde{S}(z, \omega)$ получается замкнутое интегродифференциальное уравнение, от которого удобно перейти к уравнению для искомого спектра $S(z, \omega)$. Пренебрегая квадратичными по поглощению величинами, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial S(z, \omega)}{\partial z} + 2q_\omega S(z, \omega) = \frac{\omega_p^4}{4c^4 h_\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \left\{ \frac{\omega^2 S(z, \nu)}{\nu^2} - \frac{h_\omega S(z, \omega)}{h_\nu} \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Phi_p(0, \xi, \omega - \nu) \exp[i\xi(h_\nu - h_\omega)].$$

В дальнейшем, учитывая плавность и медленность флуктуаций концентрации электронов, мы ограничимся предположением, что поле остается квазимонохроматическим в процессе распространения, а спектр его сосредоточен вблизи ω_0:

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0. \tag{14}$$

После этого уравнение для спектра $S(z, \omega)$ приобретает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + 2(q + q'(\omega - \omega_0)) \right] S(z, \omega) - g \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \{S(z, \omega - \Omega) - S(z, \omega)\} \times$$

$$\times F(\Omega) = -\frac{2g}{uh} (\omega - \omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \{S(z, \omega - \Omega) - S(z, \omega)\} F(\Omega), \tag{15}$$

где

$$q \equiv q_{\omega_0}, \quad h \equiv h_{\omega_0}, \quad q' \equiv \partial q_{\omega_0}/\partial \omega_0, \quad u \equiv (\partial h_{\omega_0}/\partial \omega_0)^{-1},$$

$$g = \pi \omega_p^4 / 2c^4 h^2, \quad F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Phi_p(0, \xi, \omega).$$

Введем также следующие обозначения:

$$\beta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega \exp(-2q'\Omega z) F(\Omega),$$

$$\gamma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \exp(-2q'\Omega z) F(\Omega). \tag{16}$$

Уравнение (15) довольно сложным образом описывает диффузию спектра $S(z, \omega)$ в пространстве частот. Анализ его, однако, упрощается, если рассматривать трассы, на которых

$$q'\Omega_m z > 1, \tag{17}$$

где Ω_m — ширина частотного спектра мощности флуктуаций концентрации $\Phi_p(\Omega)$. Физически (17) соответствует тому случаю, когда приемник находится настолько далеко от излучателя, что эффект различного затухания гармоник доминирует над всеми остальными, влияющими на преобразование спектра. Переходя к уравнению для фурье-образа $S(z, \omega)$, можно показать, что при условии (14), (17) существенными

в уравнении (15) являются только члены в левой части. При этом удается отыскать спектр мощности в явном виде*:

$$S(z, \omega) = \frac{I_0(z)}{\sqrt{2\pi\langle\omega_1^2\rangle}} \exp\left[-\frac{1}{2\langle\omega_1^2\rangle}(\omega-\omega_0-\nu_0)^2\right], \tag{18}$$

где

$$\langle\omega_1^2\rangle = g(\beta(z)-\beta(0))/(-2q'); \tag{19}$$

$$\nu_0 = g(\gamma(z)-\gamma(0))/(-2q'); \tag{20}$$

$$I_0(z) = |A_0|^2 \exp\left[-2qz + g\int_0^z (\gamma(z')-\gamma(0))dz'\right]. \tag{21}$$

Как видно из (18), спектр мощности описывается гауссовой кривой характерной ширины $\sqrt{2\langle\omega_1^2\rangle}$ (отсюда время когерентности волны $\tau_c \sim (2\langle\omega_1^2\rangle)^{-1/2}$), сдвинутой относительно начальной частоты ω_0 на ν_0 в сторону высоких частот.

Сопоставляя (18)—(20), легко убедиться в том, что при условии (17) смещение спектра оказывается большим, чем его ширина. Последняя, как это можно показать, определяется выражениями (19), (16) независимо от справедливости (17) и совпадает с квадратным корнем из дисперсии локальной частоты, вычисленной в [3] методом геометрической оптики. В работе [4] приведены конкретные соотношения для дисперсии частоты в различных случаях, с ней легко связать и параметр ν_0:

$$\langle\omega_1^2\rangle = -\frac{1}{2q'}\left(\frac{\partial\nu_0}{\partial z}(z) - \frac{\partial\nu_0}{\partial z}(0)\right). \tag{22}$$

Сравнивая выражения (16), (19), (20) с соответствующими результатами работ [1, 2], можно убедиться в том, что линейное возрастание ширины и смещения спектра с расстоянием z, характерное для прозрачных сред, из-за поглощения переходит на больших расстояниях в экспоненциальное.

Причиной этого является зависимость от частоты мнимой части комплексного волнового числа, причем, очевидно, смещение спектра в высокочастотную сторону объясняется отрицательным знаком производной $\partial q_\omega/\partial\omega$ для плазмы. Кроме того, средняя интенсивность (21) затухает с расстоянием z несколько медленнее, чем интенсивность монохроматической волны частоты ω_0 в однородной столкновительной плазме $|A_0|^2 e^{-2qz}$ [8].

Представляет интерес сопоставить полученные соотношения с решением близкой задачи о распространении в регулярной поглощающей среде волны, прошедшей через нестационарный хаотический фазовый экран. Будем считать экран, помещенный в плоскости $z=0$, статистически стационарным и однородным, а падающую на него волну — монохроматической, имеющей частоту ω_0. Непосредственно из (11) получаем уравнение для $\tilde{S}(\rho, z, \omega)$ в однородной среде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{q_\omega}{k_\omega^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\tilde{S}(\rho, z, \omega) = 0. \tag{23}$$

* Приводимый анализ строго обоснован в случае $L<uT$; однако есть основания считать, что и при нарушении данного условия результаты работы сохраняют свою справедливость.

Решая его с граничным условием

$$\tilde{S}(\rho, 0, \omega) = \Psi(\rho, \omega) \tag{24}$$

и переходя к истинному спектру $S(z, \omega) \equiv S(0, z, \omega)$ по формуле (10), получаем

$$S(z, \omega) = \frac{h_\omega^2}{q_\omega} \frac{e^{-2q_\omega z}}{4\pi z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \exp\left(-\frac{h_\omega^2 \rho'^2}{4q_\omega z}\right) \Psi(\rho', \omega). \tag{25}$$

Если неоднородности экрана (их характерный размер L) достаточно плавные,

$$h_\omega^2 L^2 \gg 4q_\omega z, \tag{26}$$

то интеграл (25) можно вычислить методом стационарной фазы:

$$S(z, \omega) = e^{-2q_\omega z} \Psi(0, \omega) \equiv e^{-2q_\omega z} \Psi(\omega). \tag{25'}$$

Выражение (25′) показывает, что спектр волны изменяется из-за различного затухания гармоник с расстоянием. Подобная ситуация имеет место при распространении регулярного импульса в поглощающей среде [8].

Для случая сильных флуктуаций фазы волны за экраном имеем [5]

$$\Psi(\omega) = C \exp\left[-(\omega - \omega_0)^2/2\omega_m^2\right], \tag{27}$$

причем ω_m^2 выражается через спектр флуктуаций фазы $\Phi(\Omega)$ следующим образом:

$$\omega_m^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega^2 \Phi(\Omega).$$

Полагая, что волна остается квазимонохроматической (ширина ее спектра $\omega_m \ll \omega_0$), разложим q_ω в ряд вблизи ω_0, ограничиваясь первыми двумя членами:

$$q_\omega = q + q'(\omega - \omega_0) + \ldots, \tag{28}$$

здесь q и q' берутся при $\omega = \omega_0$. Комбинируя (25′), (27) и (28), получаем

$$S(z, \omega) = C e^{-2qz} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\omega_m^2} - 2q'z(\omega - \omega_0)\right\}. \tag{29}$$

Как показывает выражение (29), спектр поля по мере удаления от экрана смещается в сторону высоких частот, но, в отличие от случая протяженной нестационарной среды, ширина его, а следовательно, и временной масштаб когерентности волны, в рассматриваемом приближении остается постоянной (она слабо уменьшается лишь при учете поправок, связанных с высшими производными q_ω).

Что же касается дисперсии частоты волны в поглощающей среде после фазового экрана, то, как показано в [4], эта величина изменяется следующим образом:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega^2 \Phi(\Omega) e^{-2q'\Omega z}, \tag{30}$$

т. е., как и при распространении в протяженной среде, дисперсия частоты экспоненциально возрастает с расстоянием. Последнее озна-

чает, что для излучения с хаотической статистически стационарной модуляцией фазы в поглощающей среде дисперсия мгновенной частоты $\langle\omega_1^2\rangle$ уже не характеризует когерентность волны и не выражается квадратом ширины временного спектра мощности. В то же время фазовая характеристика волны $\sqrt{\langle\omega_1^2\rangle}$ также является измеримой на опыте величиной, несущей информацию о поглощении в среде.

Поскольку эффекты, описанные в данной работе, становятся существенными на значительных расстояниях, удовлетворяющих неравенству (17), для их наблюдения необходимы слои нестационарной турбулентной плазмы, оптическая толщина которых

$$\tau=2\int_0^z q(z')\,dz'>1.$$

Эти условия, вероятнее всего, могут реализоваться при распространении радиоволн от квазимонохроматического источника в космической плазме, а также при наличии искусственных нестационарных плазменных образований.

Авторы благодарны Н. С. Степанову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1 Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 1, с. 70.
2. Гурбатов С. Н., Санчев А. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 5, с. 724; 1976, **19**, № 9, с. 1359.
3. Гавриленко В. Г., Конков В. Н., Чурилина Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 10, с. 1537.
4. Гавриленко В. Г., Петров С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 3, с. 299.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику — М: Наука, 1978, ч. II.
6. Чернов Л. А. Волны в случайно неоднородных средах — М. Наука, 1975.
7. Ерухимов Л. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 1, с. 75.
8. Вайнштейн Л. А. — УФН, 1976, **118**, № 2, с. 339

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 19 марта 1984 г.

THE INFLUENCE OF THE DISSIPATION ON COHERENT PROPERTIES OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONHOMOGENIOUS AND NONSTATIONARY RANDOM PLASMA

V. G. Gavrilenko, S. S. Petrov

The diffusion equation for the frequency spectrum of electromagnetic radiation in collisional nonstationary plasma is derived and solved. It is shown that the absorption may have an important influence on the spectrum parameters far from the source. The results is noted to differ from a solution of the problem of random frequency-modulated wave propagating in regular absorbing medium.