ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1985*

УДК 538.56:519.25

ФЛУКТУАЦИИ ОТСЧЕТОВ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ, ОБРАЗОВАННОЙ КОГЕРЕНТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ НА ФОНЕ ШУМА

Н. В. Ласкин, А. С. Мазманишвили

Рассмотрены статистические характеристики процесса на выходе инерционного фотодетектора, на фотокатоде которого локализована интерференционная картина, образованная когерентным излучением на фоне броуновского шума. Получено аналитическое выражение для производящей функции отсчетов фотодетектора.

1. Рассмотрим поле, образованное суперпозицией когерентного одномодового излучения с комплексной амплитудой $\beta(t)$* и броуновского шума с амплитудой $\alpha(t)$,

$$\xi(t) = \beta(t)\, e^{i\omega_c t} + \alpha(t)\, e^{i\omega_n t}, \tag{1}$$

где t — текущее время, а ω_c и ω_n — несущие частоты когерентного и шумового излучений соответственно.

Интенсивность $I(t,\tau)$ интерференционной картины, создаваемой двухлучевым интерферометром при направлении на его вход поля $\xi(t)$, равна

$$I(t,\tau) = |\xi(t) + \xi(t+\tau)|^2,$$

где τ — временной сдвиг в одном из плеч интерферометра относительно другого.

Мы будем предполагать, что интерференционная картина в области ее локализации регистрируется при помощи фотодетектора с конечным временем детектирования T [1]. Таким образом, процесс $\eta(T,\tau)$ на выходе фотодетектора равен

$$\eta(T,\tau) = \varepsilon \int_0^T dt\, |\xi(t) + \xi(t+\tau)|^2, \tag{2}$$

где ε — эффективность регистрации фотодетектора (далее, не ограничивая общности, мы положим $\varepsilon = 1$). Процесс $\xi(t)$ содержит случайную компоненту с комплексной амплитудой $\alpha(t)$, поэтому результирующий процесс $\eta(T,\tau)$ также случаен.

В настоящей работе мы определим функцию распределения величины η в предположении, что случайный процесс $\alpha(t)$ является нормальным марковским процессом, вероятностные характеристики которого можно описать при помощи переходной плотности $w(\alpha, t;\ \alpha', t')$, имеющей вид [2, 3]

$$w(\alpha, t;\ \alpha', t') = \tag{3}$$

$$= [\pi\sigma_\alpha (1 - e^{-2\nu|t-t'|})]^{-1} \exp\left[-|\alpha - \alpha' e^{-\nu|t-t'|}|^2/\sigma_\alpha (1 - e^{2\nu|t-t'|})\right],$$

* Комплексная амплитуда $\beta(t)$ — произвольная детерминированная функция времени.

где σ_α — интенсивность шума, ν — декремент затухания*. Флуктуации случайной величины η удобно описать при помощи производящей функции $(Q_\tau(\lambda) = \langle \exp[-(\lambda/4)\eta(T,\tau)]\rangle$, или в развернутом виде

$$Q_\tau(\lambda;\ \alpha(t);\ \beta(t)) = \left\langle \exp\left[-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\,|\alpha(t)+\alpha(t+\tau)e^{i\omega_n\tau}+\right.\right. \tag{4}$$

$$\left.\left.+\theta(t)\beta(t)+\theta(t)\beta(t+\tau)e^{i\omega_c\tau}|^2\right]\right\rangle,$$

где λ — произвольный параметр, $\theta(t)=\exp(i(\omega_c-\omega_n)t)$, а скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение величины $\exp[-(\lambda/4)\eta(T,\tau)]$ по траекториям случайного процесса $\alpha(t)$ за промежуток $[0, T+\tau]$. Математическое ожидание (4) является континуальным интегралом [4, 5]. Вычисление этого интеграла по траекториям оказывается удобным выполнить в два этапа. На первом из них проведем усреднение по реализациям случайного процесса $\alpha(t)$ в промежутке $[T, T+\tau]$. На втором этапе будет проведено усреднение, отвечающее временному промежутку $[0, T]$.

2. Разобьем промежуток интегрирования $[0, T]$ в (2) на M одинаковых отрезков длительностью $\Delta T=T/M$ каждый и, имея в виду устремить M к бесконечности в окончательном результате, аппроксимируем континуальный интеграл (4) M-кратным интегралом по совокупности переменных α_m $(m=1,\ldots,M)$, где $\alpha_m=\alpha(m\Delta T)$. Пусть $L=\tau/\Delta T$, тогда для учета флуктуаций на промежутке $[T, T+\tau]$ дополним кратность интегрирования до $M+L$ с помощью совокупности переменных α_{M+l} $(l=1,\ldots,L)$, где $\alpha_{M+l}=\alpha((M+l)\Delta T)$. Наконец, для учета начального распределения процесса $\alpha(t)$ в исходный момент $t=0$ доведем кратность интегрирования до $M+L+1$ с помощью переменной α_0 и отвечающей ей весовой функции $w(\alpha_0, 0)$, которую получим из (3) путем предельного перехода $|t-t'|\to\infty$, т. е.

$$w(\alpha_0, 0) = (\pi\sigma_\alpha)^{-1}\exp(-|\alpha_0|^2/\sigma_\alpha). \tag{5}$$

Окончательно аппроксимация континуального интеграла имеет вид

$$Q_\tau(\lambda;\ \alpha(t);\ \beta(t)) = \int d^2\alpha_0 \int d^2\{\alpha\}_{M+L}\, S(\alpha_0, \{\alpha\}_{M+L}) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\lambda T}{4M}\sum_{m=0}^{M}|\alpha_m+\varphi_L\alpha_{m+L}+\theta_m\beta_m+\theta_m\psi_L\beta_{m+L}|^2\right),$$

где

$$\varphi_L=\exp(i\omega_n\tau),\quad \psi_L=\exp(i\omega_c\tau),\quad \theta_m=\exp[i(\omega_c-\omega_n)m\Delta T], \tag{6}$$

$\beta_m=\beta(m\Delta T)$, $\{\alpha\}_{M+L}$ — совокупность $(M+L)$ комплексных переменных интегрирования, $d^2\{\alpha\}_{M+L}=\prod_{m=1}^{M} d^2\alpha_m \prod_{l=1}^{L} d^2\alpha_{M+l}$, $S(\alpha_0, \{\alpha\}_{M+L})$ — статистический вес усреднения, имеющий следующий вид:

$$S(\alpha_0, \{\alpha\}_{M+L}) = w(\alpha_0, 0)\prod_{m=1}^{M+L} w(\alpha_m, t_m; \alpha_{m-1}, t_{m-1}) \tag{7}$$

и $t_m=m\Delta T$.

* Заметим, что спектральная плотность данного случайного процесса имеет лоренцевский вид:

$$\rho(\omega) = \sigma_\alpha\,\nu/\pi((\omega-\omega_n)^2+\nu^2).$$

Проведем усреднение в (6) по переменным, отвечающим промежутку $[T, T+\tau]$. С этой целью заметим, что для двух комплексных переменных z и u справедливо следующее тождество:

$$\exp(-|u|^2) = \pi^{-1}\int d^2z \exp\,[-|z|^2+i(zu^*+z^*u)],$$

поэтому

$$\exp\left(-\frac{\lambda T}{4M}\sum_{m=0}^{M}|\alpha_m+\varphi_L\alpha_{m+L}+\theta_m\beta_m+\theta_m\psi_L\beta_{m+L}|^2\right)=$$

$$= N_0^{-1}\int d^2\{z\}_M \exp\left[i\sqrt{\frac{\lambda}{4}}\frac{T}{M}(A_\tau(z)+A_\tau^*(z))\right]\times \tag{8}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{T}{M}\sum_{m=0}^{M}\left[|z_m|^2 - i\sqrt{\frac{\lambda}{4}}(z_m\theta_m^*(\beta_m^*+\psi_L^*\beta_{m+L}^*)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ z_m^*\theta_m(\beta_m+\psi_L\beta_{m+L}))\right]\right\}.$$

Здесь $N_0 = (\pi/\Delta T)^M$ — нормировочный множитель, $d^2\{z\}_M = \prod_{m=0}^{M} d^2z_m$, а величина $A_\tau(z)$ линейно связана со случайными переменными $\{\alpha\}_{M+L}$:

$$A_\tau(z) = \sum z_m^*(\alpha_m+\varphi_L\alpha_{m+L}).$$

Поскольку случайный процесс $\alpha(t)$ гауссов, то $A_\tau(z)$ — также гауссова случайная величина, со средним, в силу (3) и (5), равным нулю, поэтому

$$\left\langle\exp\left[i\sqrt{\frac{\lambda}{4}}\frac{T}{M}(A_\tau(z)+A_\tau^*(z))\right]\right\rangle = \exp\left(-\frac{\lambda T^2}{4M^2}\langle|A_\tau(z)|^2\rangle\right). \tag{9}$$

Для определения второго момента $\langle|A_\tau(z)|^2\rangle$ используем статистический вес, определяемый выражением (7), что дает

$$\langle|A_\tau(z)|^2\rangle = 2\sigma_\alpha\nu(1+\cos\omega_n\tau e^{-\nu\tau})\sum_{m,k=0}^{M}(z_m z_k^* + z_m^* z_k)\,e^{-\nu|m-k|\Delta T}. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (6) и (8), получим

$$Q_\tau(\lambda;\,\alpha(t);\,\beta(t)) = N_0^{-1}\int d^2\{z\}_M \exp\left[-\frac{T}{M}\sum_{m=0}^{M}|z_m|^2 -\right.$$

$$-i\sqrt{\lambda}\,\frac{T}{M}\sum_{m=0}^{M}\left(z_m\theta_m^*\frac{\beta_m^*+\psi_L^*\beta_{m+L}}{2}+z_m^*\theta_m\frac{\beta_m+\psi_L\beta_{m+L}}{2}\right)- \tag{11}$$

$$\left.-\lambda\frac{1+\cos\omega_n\tau e^{-\nu\tau}}{2}\sigma_\alpha\nu\frac{T^2}{M^2}\sum_{m,k=0}^{M}(z_m z_k^*+z_m^* z_k)\,e^{-\nu|m-k|\Delta T}\right].$$

Из (11) легко получить выражение для производящей функции $Q_0(\lambda;\alpha(t);\beta(t))$, отвечающей случаю, когда $\tau=0$ и $L=0$. Сравнение выражений Q_τ и Q_0 в форме (11) позволяет заключить, что

$$\left\langle \exp\left[-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\,|\alpha(t)+\alpha(t+\tau)e^{i\omega_n\tau}+\theta(t)\,(\beta(t)+\beta(t+\tau)e^{i\omega_c\tau})|^2\right]\right\rangle = \tag{12}$$

$$=\left\langle \exp\left[-\lambda\int_0^T dt\left|\left(\frac{1+\cos\omega_n\tau e^{-\nu\tau}}{2}\right)^{1/2}\alpha(t)+\theta(t)\frac{\beta(t)+\beta(t+\tau)e^{i\omega_c\tau}}{2}\right|^2\right]\right\rangle.$$

Поэтому

$$Q_\tau(\lambda;\alpha(t);\beta(t))=Q_0(\lambda R_\tau;\alpha(t);\gamma_\tau(t)), \tag{13}$$

где

$$R_\tau=(1/2)\,(1+\cos\omega_n\tau e^{-\nu\tau}),$$
$$\gamma_\tau(t)=e^{i(\omega_c-\omega_n)\tau}(2\sqrt{R_\tau})^{-1}(\beta(t)+\beta(t+\tau)\,e^{i\omega_c\tau}).$$

Таким образом, мы свели задачу расчета величины Q_τ, определяемой (4), к расчету величины Q_0, представляющей собой интеграл по траекториям случайного процесса $\alpha(t)$ в интервале $[0,T]$.

3. Перейдем к усреднению, отвечающему отрезку $[0,T]$. Искомая производящая функция теперь равна

$$Q_0(\lambda R_\tau;\alpha(t);\gamma_\tau(t))=\left\langle \exp\left[-\lambda R_\tau\int_0^T dt\,|\alpha(t)+\gamma_\tau(t)|^2\right]\right\rangle, \tag{14}$$

где R_τ и $\gamma_\tau(t)$ определяются из выражения (13). Усреднение в (14), в отличие от выражения (4), необходимо произвести по всем траекториям случайного марковского процесса $\alpha(t)$, реализованным на интервале $[0,T]$. Для вычисления этого интеграла по траекториям воспользуемся методом Каца — Фейнмана [6], распространив его применение на случай комплекснозначных полей. Согласно [6] представим производящую функцию $Q_0(\lambda R_\tau;\alpha(t);\gamma_\tau(t))$ в виде

$$Q_0(\lambda R_\tau;\alpha(t);\gamma_\tau(t))=\int d^2z_0 w(z_0,0)\int d^2z\Phi(z,z_0;T,\tau), \tag{15}$$

где $w(z_0,0)$ — плотность распределения начального состояния (5), а функция $\Phi(z,z_0;T,\tau)$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi=\nu\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)+2\sigma_\alpha\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z^*}\right]\Phi-\lambda R_\tau|z+\gamma_\tau(t)|^2\Phi. \tag{16}$$

Уравнение (16) при $\lambda=0$ является уравнением Фоккера—Планка для переходной плотности $w(z,t;z_0,t_0)$ (3). Можно показать, что решение уравнения (16) с начальным условием $\Phi(z,z_0;0,\tau)=\delta^{(2)}(z-z_0)$ будет иметь двумерный гауссов вид относительно переменных z и z_0. С учетом этого обстоятельства решение уравнения (16) запишем в виде

$$\Phi(z,z_0;t,\tau)=(\pi\sigma_\alpha/r_\tau\,(e^{2r_\tau t}-1))^{-1}\exp\Bigg[-\lambda R_\tau\int_0^t dt'\,|\gamma_\tau(t')|^2-$$

$$-\frac{\nu-r_\tau}{2\sigma_\alpha\nu}(|z|^2-|z_0|^2)+\frac{\nu+r_\tau}{2}t+\sigma_\alpha\frac{z\tilde{\gamma}_\tau^*(t)+z^*\tilde{\gamma}_\tau(t)}{2}+\frac{\sigma_\alpha\nu}{2}\int_0^t dt'\,|\tilde{\gamma}_\tau(t')|^2- \tag{17}$$

$$-r_\tau|z-z_0e^{-r_\tau t}+\sigma_\alpha\nu\int_0^t dt'\,\tilde{\gamma}_\tau(t')\,e^{r_\tau(t'-t)}|^2\,[\sigma_\alpha\nu(1-e^{-2r_\tau t})]^{-1}\Bigg],$$

где

$$r_\tau=\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma_\alpha\nu\tilde{R}_\tau},\quad \tilde{\gamma}_\tau(t)=-2\lambda R_\tau\int\limits_0^t dt'\gamma_\tau(t')\,e^{-r_\tau(t'-t)}. \tag{18}$$

Подставляя решение (17) в (15) и вычисляя гауссовы интегралы по переменным z и z_0 с весовой функцией $w(z_0,0)=(\pi\sigma_\alpha)^{-1}\times$ $\times\exp(-|z_0|^2/\sigma_\alpha)$, получим с учетом (13) при $t=T$

$$Q_\tau(\lambda;\alpha(t);\beta(t))=\left\langle\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T dt\,|(1/2)\,[\alpha(t)+\alpha(t+\tau)\,e^{i\omega_n\tau}]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_\tau(t)|^2\right\}\right\rangle=\frac{4r_\tau\nu e^{\nu T}}{(r_\tau+\nu)^2\,e^{r_\tau T}-(r_\tau-\nu)^2\,e^{-r_\tau T}}\exp\left[-\lambda\int\limits_0^T dt\,|B_\tau(t)|^2\right]\times \tag{19}$$

$$\times\exp\left\{\frac{2\lambda^2\sigma_\alpha\nu R_\tau}{r_\tau\left((r_\tau+\nu)^2\,e^{r_\tau T}-(r_\tau-\nu)^2\,e^{-r_\tau T}\right)}\int\limits_0^T dt_1\int\limits_{t_1}^T dt_2\left((r_\tau+\nu)\,e^{r_\tau t_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(r_\tau-\nu)\,e^{-r_\tau t_1}\right)\left[(r_\tau+\nu)\,e^{r_\tau(T-t_2)}+(r_\tau-\nu)\,e^{-r_\tau(T-t_2)}\right]\mathrm{Re}\,(B_\tau(t_1)\,B_\tau^*(t_2))\right\},$$

где

$$r_\tau=(\nu^2+\lambda\sigma_\alpha\nu(1+\cos\omega_n\tau e^{-\nu\tau}))^{1/2},$$
$$B_\tau(t)=(1/2)\,(\beta(t)+\beta(t+\tau)e^{i\omega_c\tau})\,e^{i(\omega_c-\omega_n)t}. \tag{20}$$

Результат (19) получен для произвольной детерминированной зависимости от текущего времени комплексной амплитуды когерентного излучения $\beta(t)$. В формуле (19) предэкспоненциальный множитель описывает вклад флуктуаций при фотодетектировании интерференционной интенсивности от шумовой компоненты излучения с лоренцевским спектральным контуром. Первый экспоненциальный множитель в выражении (19) описывает такой же вклад от когерентного излучения $\beta(t)$. Наконец, последний экспоненциальный множитель отвечает вкладу флуктуаций, связанному с аддитивным взаимодействием обоих видов излучения. Отметим, что результат (19) можно распространить на случай, когда когерентная компонента излучения является суперпозицией набора монохроматических линий, тогда

$$B_\tau(t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}[\beta_j(t)+\beta_j(t+\tau)\exp(i\omega_{cj}\tau)]\,e^{i(\omega_{cj}-\omega_n)t},$$

где J — количество линий, $\beta_j(t)$ и ω_{cj} — комплексная амплитуда и частота каждой из линий соответственно.

Из (19) видно, что при $\nu T\ll 1$ влияние флуктуаций шума $\alpha(t)$ на видность интерференционной картины незначительно. С другой стороны, при $\nu T\gg 1$ случайный процесс $\eta_\alpha=\int\limits_0^T dt\,|\alpha(t)|^2$ нормализуется, а плотность распределения случайной величины η_α стремится к устойчивой гауссовой форме, при этом вклад перекрестного множителя в (19) также незначителен. В промежуточном случае, когда $\nu T\simeq 1$, для описания совокупной статистики флуктуаций при фотодетектировании необходимо пользоваться всем выражением (19). Отметим, что вели-

чина отношения сигнал/шум осциллирует при изменении τ и не может поэтому служить параметром разложения, даже если $|\beta(t)|^2 \gg |\alpha(t)|^2$ для всех t.

Совокупную статистику флуктуаций при инерционном фотодетектировании интерференционной интенсивности можно описать при помощи вероятности $P_\tau(m, T)$ того, что в течение интервала времени $[0, T]$ будет зарегистрировано m фотоотсчетов [7],

$$P_\tau(m,t) = \left\langle \frac{(\eta(T,\tau))^m}{m!} e^{-\eta(T,\tau)} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{m+1}} Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)),$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости λ охватывает точку $\lambda = 1$. Таким образом, для определения вероятностных характеристик фотоотсчетов достаточно вычислить однократный интеграл, что вполне реализуемо с помощью ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: ИЛ, 1947. — 168 с.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 485 с.
4. Фейнман П., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968. — 382 с.
5. Гельфанд И. М., Яглом А. М. — УМН, 1956, 11, с. 77.
6. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965. — 406 с.
7. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1974. — 299 с.

Поступила в редакцию
21 мая 1984 г.

COUNTING FLUCTUATIONS AT INTERFERENCE PICTURE REGISTRATION FORMED BY COHERENT RADIATION ON NOISE BACKGROUND

N. V. Laskin, A. S. Mazmanishvili

Statistical process characteristics at the inertial photodetector release are considered. An interference picture formed by coherent radiation on the brownian noise is localized on the photocathode. Analytical solution for generating function of photodetector counting is obtained.