

УДК 550.388

**О МОДАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ АЗИМУТАЛЬНОГО УГЛА,
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВИСТЛЕРОВ
В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ ДАКТАХ**

Р. Н. Кауфман

В свистовом диапазоне частот получены точные решения уравнений Максвелла для однородной магнитоактивной плазмы, зависящие от всех трех цилиндрических координат, а также ВКБ-решения для слабонеоднородной магнитоактивной плазмы, на основе которых проведен анализ волноводного распространения вистлеров в аксиально-симметрических дактах с повышенной плотностью. Для слабых дактов с характерным профилем электронной концентрации получены оценки числа мод и выражение для предельной частоты захвата, зависящие от номера гармоники, связанной с азимутальным углом.

В работах [1, 2] были получены точные решения уравнений Максвелла в цилиндрических координатах в диапазоне свистовых частот для однородной магнитоактивной плазмы и ВБК-решения для плавно неоднородной магнитоактивной плазмы, зависящие только от r и z .

С помощью этих решений были рассмотрены осесимметричные задачи о волноводном распространении вистлеров в плазменных каналах (дактах) как с резкими границами [1], так и с плавно меняющимся профилем электронной концентрации [2].

В настоящей работе для уравнений Максвелла получена соответствующая полная система точных решений и система ВКБ-решений, зависящих также от угла φ , что позволяет решать более общие задачи о волноводном распространении вистлеров. Так, в разд. 3 рассмотрены некоторые особенности волноводного распространения вистлеров в аксиально-симметричных дактах с повышенной плотностью.

1. Основные уравнения. Решения для однородной плазмы. Введем цилиндрические координаты с осью z , параллельной постоянному внешнему магнитному полю, и будем считать, что электронная плотность N есть монотонная функция от r , так что $N(\infty) = N_0$. Обозначим через ω_p и ω_c соответственно плазменную частоту и гирочастоту электронов.

Из уравнений Максвелла для электрического поля монохроматической волны частоты ω следует уравнение

$$\text{grad div } E - \Delta E = \omega^2/c^2 (\epsilon E), \tag{1.1}$$

где ϵ — тензор диэлектрической проницаемости. Для холодной бесстолкновительной плазмы в пренебрежении движением ионов его отличные от нуля компоненты имеют вид

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon = 1 + \frac{\alpha}{1 - u^2}, \quad \epsilon_{33} = \eta = 1 - \frac{\alpha}{u^2}, \tag{1.2}$$

$$i\epsilon_{12} = -i\epsilon_{21} = g = \frac{\alpha}{u(1 - u^2)},$$

где

$$\alpha = \alpha(r) = \omega_p^2(r) / \omega_c^2, \quad u = \omega / \omega_c. \quad (1.3)$$

Введем линейный дифференциальный оператор L и линейные комбинации компонент поля:

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \quad E_1 = E_r - iE_\varphi, \quad E_2 = E_r + iE_\varphi. \quad (1.4)$$

Будем искать функции E_1 и E_2 в виде

$$E_1 = E(r) \exp[i(\omega/c)pz] \exp(im\varphi), \quad (1.5)$$

$$E_2 = G(r) \exp[i(\omega/c)pz] \exp(im\varphi).$$

Опуская множитель $\exp[i(\omega/c)pz] \exp(im\varphi)$, из уравнения $\text{div}(\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = 0$ находим, что

$$E_z = i \frac{c}{2\omega p \eta} \frac{1}{r} \left\{ (\epsilon + g) \left[\frac{d(rE)}{dr} - mE + \frac{d \ln(\epsilon + g)}{dr} (rE) \right] + \right. \\ \left. + (\epsilon - g) \left[\frac{d(rG)}{dr} + mG + \frac{d \ln(\epsilon - g)}{dr} (rG) \right] \right\}. \quad (1.6)$$

Из (1.1) следует система уравнений относительно функций E и G , где первое уравнение имеет вид

$$(\epsilon + g + \eta) \left(LE - \frac{m^2 - 2m}{r^2} E \right) + (\epsilon - g - \eta) \left[LG + \frac{m^2 - 2m}{r^2} G + \right. \\ \left. + \frac{2m}{r^2} \frac{d(rG)}{dr} \right] + (\epsilon + g) \left[\frac{d^2 \ln(\epsilon + g)}{dr^2} E + \right. \\ \left. + \frac{d \ln(\epsilon + g)}{dr} \left(\frac{dE}{dr} + m \frac{E}{r} \right) \right] + (\epsilon - g) \left[\frac{d^2 \ln(\epsilon - g)}{dr^2} G + \right. \\ \left. + \frac{d \ln(\epsilon - g)}{dr} \left(\frac{dG}{dr} + m \frac{G}{r} \right) \right] = 2\eta \frac{\omega^2}{c^2} [p^2 - (\epsilon + g)] E. \quad (1.7)$$

Второе уравнение системы получается из приведенного заменой

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons G, \quad m \rightarrow -m, \quad g \rightarrow -g. \quad (1.8)$$

Рассмотрим сначала случай однородной плазмы, когда $\alpha = \text{const}$, т. е. третье и четвертое слагаемые в (1.7) обращаются в нуль.

Используем формулу дифференцирования и рекуррентную формулу для цилиндрических функций Z_m [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r} [rZ_{m+1}(\lambda r)] = (\lambda r)Z_m(\lambda r) - mZ_{m+1}(\lambda r); \quad (1.9)$$

$$2mZ_m(\lambda r) = (\lambda r)Z_{m+1}(\lambda r) + (\lambda r)Z_{m-1}(\lambda r), \quad (1.10)$$

а также соотношение, следующее из уравнения Бесселя:

$$LZ_{m\pm 1}(\lambda r) = -\lambda^2 Z_{m\pm 1}(\lambda r) + \frac{m^2 \pm 2m}{r^2} Z_{m\pm 1}(\lambda r). \quad (1.11)$$

Будем искать функции E и G в виде

$$E = AZ_{m-1} \left(\frac{\omega}{c} qr \right), \quad G = BZ_{m+1} \left(\frac{\omega}{c} qr \right). \quad (1.12)$$

Тогда из системы (1.7), (1.8) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{aligned} \{(\varepsilon + g + \eta)q^2 + 2\eta[p^2 - (\varepsilon + g)]\}A - (\varepsilon - g - \eta)q^2B &= 0, \\ (\varepsilon + g - \eta)q^2A - \{(\varepsilon - g + \eta)q^2 + 2\eta[p^2 - (\varepsilon - g)]\}B &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

(Здесь второе уравнение получается из первого заменой $A \rightleftharpoons B$ и $g \rightarrow -g$.) Приравняв нулю определитель системы (1.13), находим биквадратное уравнение относительно q , которое совпадает с «квартиком Букера» [4]:

$$q^4 - \frac{(\varepsilon + \eta)(\varepsilon - p^2) - g^2}{\varepsilon} q^2 + \frac{\eta}{\varepsilon} [(\varepsilon - p^2)^2 - g^2] = 0. \quad (1.14)$$

Будем рассматривать теперь свистовой диапазон частот, когда $\omega < \omega_c \ll \omega_p$, т. е. когда (см. (1.2) и (1.3))

$$u < 1, \quad \alpha \gg 1, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{1 - u^2}, \quad \eta = -\frac{\alpha}{u^2}. \quad (1.15)$$

(Заметим, что при выполнении (1.15) в системе (1.7), (1.8) $d \ln(\varepsilon + g)/dr = d \ln(\varepsilon - g)/dr = d \ln \alpha/dr$.) Тогда из уравнения (1.14) получим для q^2 ту же формулу, что и в осесимметричном случае ($m=0$):

$$q^2 = q_{1,2}^2 = (2u^2)^{-1} [(1 - 2u^2)p^2 - 2\alpha \mp p\sqrt{p^2 - 4\alpha}]. \quad (1.16)$$

Эта формула, исследованная ранее в работе [2], определяет две действительные ветви безразмерного поперечного волнового числа q_1 и q_2 для $u < 1/2$ и одну действительную ветвь q_2 для $u > 1/2$. Введем для удобства «осесимметрический показатель преломления» n , для которого справедливы соотношения [2]

$$n_{1,2} = \sqrt{p^2 + q_{1,2}^2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4\alpha}}{2u}, \quad n^2 = \frac{g}{\varepsilon} pn + \eta. \quad (1.17)$$

Легко проверить, что выражения

$$A = -(n+p)/(g+\varepsilon), \quad B = (n-p)/(g-\varepsilon) \quad (1.18)$$

удовлетворяют уравнению (1.13).

Таким образом, решение (1.12) системы (1.7), (1.8) найдено. Из формул (1.4)–(1.6) (с использованием (1.9) и (1.10)) находим компоненты электрического поля, а из уравнения $\mathbf{H} = -(c/\omega) \operatorname{rot} \mathbf{E}$ компоненты магнитного поля. Умножив все компоненты на $2n$ и опуская множитель $\exp[i(\omega/c)pz] \exp(im\varphi)$, имеем

$$\begin{aligned} E_r &= n[(n-p)(g-\varepsilon)^{-1}Z_{m+1}(\lambda r) - (n+p)(g+\varepsilon)^{-1}Z_{m-1}(\lambda r)], \\ E_\varphi &= -in[(n-p)(g-\varepsilon)^{-1}Z_{m+1}(\lambda r) + (n+p)(g+\varepsilon)^{-1}Z_{m-1}(\lambda r)], \\ H_r &= i[(n-p)Z_{m+1}(\lambda r) + (n+p)Z_{m-1}(\lambda r)], \\ H_\varphi &= [(n-p)Z_{m+1}(\lambda r) - (n+p)Z_{m-1}(\lambda r)], \\ E_z &= i(2qn/\eta)Z_m(\lambda r), \quad H_z = 2qZ_m(\lambda r), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $\lambda = (\omega/c)q$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а q определяется формулой (1.16).

Решения (1.19) можно использовать при исследовании задачи о волноводном распространении вистлеров в цилиндрическом плазменном дакте с резкими границами, при этом внутри дакта нужно взять в качестве $Z_m(\lambda r)$ конечные в нуле функции Бесселя $J_m(\lambda r)$, а вне дакта — функции Ханкеля $H_m^{(1,2)}(\lambda r)$.

2. ВКБ-решения для плавно неоднородной плазмы. Пусть $\alpha = \alpha(r)$, где $\alpha(r)$ — медленно меняющаяся функция от r . Найдем ВКБ-решения системы (1.7), (1.8) в свистовом диапазоне. Используем для этого асимптотику цилиндрических функций и закон сохранения энергии, который для монохроматической волны сводится к требованию

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{P} — вектор Пойнтинга, определяемый выражением

$$\mathbf{P} = (c/8\pi) \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и выражений для компонент поля следует, что

$$r\Pi_r = \operatorname{const}. \quad (2.3)$$

Запишем теперь такие асимптотические выражения для цилиндрических функций, для которых с достаточной степенью точности выполняются формулы (1.9) и (1.10). Для функций Ханкеля они имеют вид [4]

$$H_m^{(1,2)}(\omega) \approx \tilde{H}_m^{(1,2)}(\omega) = \sqrt{2/\pi\omega} (A_m \pm iB_m) \exp[\pm i(\omega - m(\pi/2) - (\pi/4))], \quad (2.4)$$

где

$$A_m = A_m(\omega) = 1 - (4m^2 - 1)(4m^2 - 9)/2(8\omega)^2, \quad (2.5)$$

$$B_m = B_m(\omega) = (4m^2 - 1)/8\omega.$$

При этом рекуррентная формула (1.10) для функций $\tilde{H}_m^{(1,2)}(\lambda r)$ выполняется точно, а формула дифференцирования (1.9) — приближенно, с точностью до членов порядка $O((\lambda r)^{-5/2})$ (заметим, что если в точных решениях системы (1.7), (1.8), найденных в предыдущем разделе, заменить функции Z_m на функции $\tilde{H}_m^{(1,2)}$, то полученные выражения будут удовлетворять системе (1.7), (1.8) при $\alpha = \operatorname{const}$ с той же точностью).

Используя асимптотику (2.4) и требуя выполнения равенства (2.3), получим ВКБ-решения системы (1.7), (1.8) в виде следующих двумерных векторов с компонентами E и G :

$$\begin{aligned} \Psi_{km}^\pm(r) &= \{E, G\} = (\lambda r)^{-1/2} (\alpha n_k)^{1/2} (p^2 - 4\alpha)^{-1/4} \chi_{km}^\pm(r) \times \\ &\times \exp \left[\pm i \left(\int_0^r \lambda dr - m \frac{\pi}{2} \right) \right] \left(\lambda = \frac{\omega}{c} q_k, \quad k = 1, 2 \right), \quad (2.6) \\ \chi_{km}^\pm(r) &= \left\{ \frac{n+p}{g+\varepsilon} (A_{m-1} \pm iB_{m-1}), \quad \frac{n-p}{g-\varepsilon} (A_{m+1} \pm iB_{m+1}) \right\}, \end{aligned}$$

где q_k определено в (1.16), n_k — в (1.17), $A_{m\pm 1}$ и $B_{m\pm 1}$ находятся согласно (2.5), где $\omega = \lambda r$.

Заметим, что решения (2.6), как и решения (1.19), не обладают симметрией относительно $m=0$, т. е. решения, соответствующие $\pm|m|$, различны.

Для ВКБ-решений $C\Psi_{km}^{\pm}(r)$ имеем

$$r\Pi r(q_k) = \frac{c^2}{2\pi\omega_c} (-1)^{k-1} \frac{q_k}{|q_k|} |C|^2 + O((\lambda r)^{-2}), \quad (2.7)$$

откуда следует, что знак Π_r совпадает со знаком q_1 и противоположен знаку q_2 . Таким образом, если зависимость от времени определяется фактором $\exp(-i\omega t)$, то $\Psi_{1m}^+(r)$ и $\Psi_{2m}^+(r)$ описывают расходящуюся и сходящуюся волны соответственно, аналогично тому, как это было для осесимметричных ВКБ-решений из работы [2].

Заметим, что эти последние решения (с точностью до множителя $(2/u)^{1/2}$) получаются из решений (2.6) при $m=0$, если в (2.5) опустить члены, зависящие от ω , умножить χ_{km}^+ на n_k и использовать затем соотношения (1.17).

Будем считать, что профиль электронной концентрации меняется достаточно медленно, и учтем условие применимости асимптотики (2.4): $|\omega| \gg \max\{1, |m|\}$. Подставляя решения (2.6) в систему (1.7), (1.8) и отбрасывая члены, содержащие $\alpha''(r)$, α'^2 и $\alpha'/\lambda r$, получим условия применимости ВКБ-решений (2.6) в виде (ср. с [2])

$$\frac{\omega}{c} |q_k| r \gg \max\{1, |m|\}, \quad \frac{d(\ln \alpha)}{dr} \ll 2 \frac{\omega}{c} \left| \frac{q_k(p^2 - 4\alpha)}{p(p + \sqrt{p^2 - 4\alpha})} \right|, \quad (2.8)$$

где $k=1$ для $u < 1/2$ и $k=2$ для $u > 1/2$, откуда следует, что условия применимости ВКБ-решений нарушаются в окрестности начала координат, а также в окрестности особых точек, в которых $q_k=0$ и $\alpha=p^2/4$.

3. Построение волноводных решений для неоднородной плазмы.

Рассмотрим в качестве примера волноводное распространение в дакте с повышенной плотностью, когда $\alpha(r)$ есть убывающая функция от r , так что $\alpha(0) = \alpha_{\max}$. Это возможно при $u < 1/2$ и условиях [2]

$$\max \left[4\alpha_{\max}, \frac{\alpha(\infty)}{u(1-u)} \right] < p^2 < \frac{\alpha_{\max}}{u(1-u)}. \quad (3.1)$$

(Неравенства (3.1) следуют из выражения (1.16), поэтому не зависят от m и совпадают с полученными в [2].)

При выполнении (3.1) график ветвей $q_k(r)$ имеет вид, изображенный на рис. 1, т. е. захваченной оказывается ветвь q_1 с точкой поворота r_0 , в которой $q_1(r_0) = 0$. При этом имеет место туннельная трансформация $q_1 \rightarrow q_2$, приводящая к утечке энергии из дакта и, следовательно, к затуханию захваченной волны [5].

Построение решения для каждого фиксированного m проводится аналогично тому, как это сделано в [2] при $m=0$. А именно, для каждого m ищем решение в виде

$$\Psi_m(r) = \sum_{j=1}^2 C_{1j} \Psi_{m1}^+(r) + C_{2j} \Psi_{m1}^-(r) \quad (r < r_0); \quad (3.2)$$

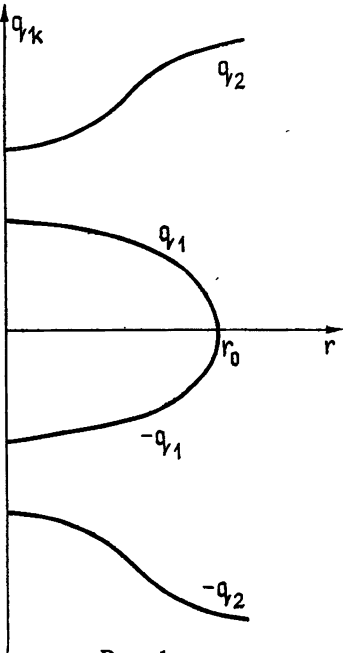


Рис. 1.

$$\Psi_m(r) = B \left| \frac{\omega}{c} q_1 r \right|^{-1/2} (p^2 - 4\alpha)^{-1/4} \chi_1(r) \times \quad (3.3)$$

$$\times \exp \left(-\frac{\omega}{c} \left| \int_0^r q_1 dr \right| \right) + D \Psi_{m2}^-(r) \quad (r > r_0).$$

При этом второе слагаемое в (3.3) характеризует утечку энергии.

Выражение (3.2) теряет силу в достаточно малой окрестности начала координат, где нарушаются условия применимости ВКБ-решений (2.8). Считая, что в этой окрестности функция $\alpha(r)$ достаточно медленно меняется, так что $\alpha(r) \approx \alpha(0) = \text{const}$, будем искать решение здесь в виде

$$\Psi_m(r) = \sum_{j=1}^{2'} C_j \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\alpha \cdot n_j)^{1/2} (p^2 - 4\alpha)^{-1/4} \{E, G\}_j, \quad (3.4)$$

где функции E и G определяются формулами (1.12), (1.18), причем значку j соответствуют q_j и n_j , и в качестве цилиндрических функций $Z_{m\pm 1}$ взяты конечные в нуле функции Бесселя $J_{m\pm 1}$. Учитывая, что $J_m = (H_m^{(1)} + H_m^{(2)})/2$, и используя асимптотику (2.4), сшиваем решения (3.2) и (3.4) в общей области их применимости, откуда находим соотношения $C_{1j} = C_j \exp(i\pi/4)$, $C_{2j} = C_j \exp(-i\pi/4)$ ($j=1, 2$). Связь между остальными коэффициентами из (3.2) и (3.3) можно получить, воспользовавшись результатами работы [2]. Соответствующие выкладки полностью совпадают с выкладками работы [2] и здесь опускаются. Заметим, что поскольку $|C_{12}| = |C_{22}| = |D| \ll |C_{21}|$, то в (3.2) слагаемыми с $j=2$ можно пренебречь, как это и сделано в [2].

В результате для спектра значений p_{nm} (в пренебрежении их мнимой частью) получим уравнение

$$\frac{\omega}{c} \int_0^{r_0} q_1(p, u, r) dr = \pi \left(n + \frac{m}{2} \right), \quad (3.5)$$

где $n + m/2 > 0$.

Рассмотрим типичный профиль электронной концентрации $N(r)$ в дакте, когда

$$v(r) \equiv \frac{N(r) - N_0}{N_0} = v_0 \operatorname{sech}^2 \frac{r}{a}, \quad 0 < v_0 \ll 1. \quad (3.6)$$

Повторяя выкладки работы [7], получим для области частот, когда $(1 - 2u)^2 \gg v_0$, что

$$q_1^2(r) = \frac{2\alpha(\infty) [v(r) - 2\Delta p/P]}{u(1 - 2u)}, \quad (3.7)$$

где

$$p = P + \Delta p, \quad P^2 = \alpha(\infty)/u(1 - u). \quad (3.8)$$

(Заметим, что P соответствует чисто продольному распространению на бесконечности, ибо, согласно (1.16), $q_1 = 0$ при $p = P$ и $\alpha = \alpha(\infty)$.) Подставляя (3.7) в (3.5), получим для профиля (3.6) после интегрирования

$$\left(\frac{2\Delta p}{P} \right)_{mn}^{1/2} = v_0^{1/2} - 2 \left(n + \frac{m}{2} \right) \left(\frac{c}{\omega_p a} \right) \left(\frac{1 - 2u}{2u} \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Из условия положительности правой части в (3.9) следует, что (ср. с [7])

$$\left(n + \frac{m}{2}\right)_{\max} \equiv Q = \frac{v_0^{1/2}}{2} \left(\frac{\omega_p a}{c}\right) \left(\frac{2u}{1-2u}\right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Из первого условия (2.8), где $q_1 = q_1(0)$, используя (3.7) и (3.9), получим при $r=r_0$, что $2n+m \gg \max\{1, |m|\}$, что выполняется при

$$n \gg m/2 \quad (m > 0), \quad n \gg |m| \quad (m < 0), \quad 2n \gg 1 \quad (m = 0), \quad (3.11)$$

т. е. $n > 0$ для любых m . Тогда из (3.10) следует, что

$$n_{\max} = Q - m/2 \quad (m \geq 0), \quad n_{\max} = Q + |m|/2 \quad (m < 0). \quad (3.12)$$

Число мод l при данном фиксированном m определяется разностью: $l = n_{\max} - n_{\min}$. Тогда из (3.11) и (3.12) находим, что

$$l \ll Q - m \quad (m \geq 0), \quad l \ll Q - |m|/2 \quad (m < 0). \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что для указанной выше области частот число мод уменьшается с увеличением $|m|$. Из выражения (3.10) видно также, что оно уменьшается с уменьшением v_0 , частоты волны и относительной ширины волновода $\omega_p a/c$. (Этот вывод согласуется с результатами численного счета в работе [8], где рассматривался цилиндрический волновод с постоянной плотностью плазмы внутри волновода и вне его, а граница волновода задавалась в виде плавного переходного слоя; при этом для однородной плазмы использовались некоторые приближенные решения уравнения (1.1).)

Для области частот в окрестности $u = 1/2$, когда $(1-2u)^2 \ll v_0$, можно провести исследование мод аналогично [7], при этом, согласно (3.5), n , из соответствующих формул работы [7], как и выше, заменяется на $n + m/2$. Считая выполненными неравенства (3.11), находим выражение для максимальной частоты существования мод при заданном $m \neq 0$:

$$u_m^* = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{v_0^{1/2}}{2} \left(\frac{3\pi c}{a\omega_p}\right)^{2/3} m^{2/3} \right], \quad m > 0, \quad (3.14)$$

$$u_m^* = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{v_0^{1/2}}{2} \left(\frac{3\pi c}{a\omega_p}\right)^{2/3} \left|\frac{m}{2}\right|^{2/3} \right], \quad m < 0,$$

откуда следует, что с увеличением $|m|$ верхняя граница существования мод уменьшается. Для максимальной частоты, при которой вообще возможен захват волны в дикт, получаем выражение, соответствующее $m=0$ [7]:

$$u^* = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{v_0^{1/2}}{2} \left(\frac{3\pi c}{a\omega_p}\right)^{2/3} \right]. \quad (3.15)$$

Рассмотрим для профиля (3.6) фазовую скорость вдоль оси волновода $v_{\parallel} = c/\rho$, которая, согласно уравнению (3.5), есть функция от частоты и от значений m и n .

Из формул (3.8) и (3.9), справедливых в области частот, когда $(1-2u)^2 \gg v_0$, следует, что v_{\parallel} возрастает с увеличением частоты для заданных m и n , а также возрастает с увеличением m и n при фиксированной частоте в указанной области. (При этом предполагается, что значения m и n удовлетворяют неравенствам (3.11).)

Используя результаты работы [7], можно показать, что таков же характер поведения v_{\parallel} и в окрестности $u = 1/2$, когда $(1-2u)^2 \ll v_0$.

Исследование затухания, обусловленного туннельной трансформацией $q_1 \rightarrow q_2$, можно провести для профиля (3.6) так же, как это сделано в [6]. Эта задача, как и вопрос о вкладе мод с разными m в полное поле, при разложении последнего по решениям вида (1.5), (1.6), выходят за пределы настоящей работы и будут рассмотрены в отдельном сообщении.

Заметим также, что волноводные решения с $m \neq 0$ для дактов с пониженной плотностью строятся аналогично вышеизложенному с учетом результатов работы [9].

В заключение автор благодарит В. И. Карпмана за плодотворную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кауфман Р. Н., Рябова Н. А. — Физика плазмы, 1980, 6, № 5, с. 1027.
2. Карпман В. И., Кауфман Р. Н. — J. Plasma Phys., 1982, 27, № 2, p. 225.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1964, с. 243.
4. Budden K. J. Radio Waves in the Ionosphere. — Cambridge: University Press, 1966, p. 120.
5. Карпман В. И., Кауфман Р. Н. — Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, № 5, с. 266.
6. Карпман В. И., Кауфман Р. Н. — Planet. Space Sci., 1984, 32, № 12, p. 1505.
7. Карпман В. И., Кауфман Р. Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1983, 23, № 3, с. 451.
8. Laird M. J., Nunn D. — Planet. Space Sci., 1975, 23, p. 1649.
9. Карпман В. И., Кауфман Р. Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1983, 23, № 5, с. 791.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
20 марта 1984 г.,
в окончательном варианте
3 сентября 1984 г.

WHISTLER WAVE MODES DEPENDING ON THE AZIMUTHAL ANGLE IN AXIALLY SYMMETRIC DUCTS

R. N. Kaufman

Exact solutions of the Maxwell equations for homogeneous magnetized plasma which depend on the three cylindrical coordinates as well as corresponding WKB solutions for the plasma density slowly depending on radial variable are obtained. The latter are used for the investigation of whistler propagation in axially symmetric ducts with enhanced density. Estimations of the number of modes and an expression of the frequency cut-off for each mode are obtained for weak ducts with a typical density profile.
