ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 537.86.001.57:517.52

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ СЛОИСТООДНОРОДНОЙ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЯДОМ ФУРЬЕ

Ю. И. Худак

Получено представление коэффициента отражения слоистооднородной магнитодиэлектрической системы тригонометрическим рядом. Показано, что задача синтеза физических параметров слоистой системы по заданному коэффициенту отражения решается неоднозначно, а синтеза ее электродинамических параметров — имеет единственное решение.

В [1,2] доказано, что коэффициент отражения $r \equiv r(\omega)$ системы однородных магнитодиэлектрических слоев вещества является почти-периодической (ПП) функцией частоты ω, в [1,2] получено также ее представление в виде отношения тригонометрических квазиполиномов и вытекающее из него известное [3,4] рекуррентное представление $r(\omega)$ (см. (5)).

В настоящей работе представление (5) использовано для разложения $r(\omega)$ в обобщенный тригонометрический ряд. Показано, что множество показателей Фурье ПП функции $r(\omega)$ носит линейный характер с базисом в виде электрических толщин слоев системы

$$\nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}, \quad \nu_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} h_j \ (j = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

где ε_j, μ_j — диэлектрическая и магнитная проницаемости, h_j — толщина j-го слоя системы, а коэффициенты Фурье $r(\omega)$ выражаются через отношение волновых сопротивлений соседних слоев системы

$$\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_{N+1}\}, \quad \theta_j = \rho_{j-1}/\rho_j, \quad \rho_j = \sqrt{\mu_j/\varepsilon_j} \ (j = 1, \ldots, N+1). \tag{2}$$

Разложение $r(\omega)$ использовано в работе для изучения задачи синтеза слоистой системы, когда по заданному коэффициенту отражения системы $r(\omega)$ требуется восстановить значения всех ее физических параметров:

$$z = \{\varepsilon_0, \mu_0; \varepsilon_1, \mu_1, h_1; \ldots; \varepsilon_N, \mu_N, h_N; \varepsilon_{N+1}, \mu_{N+1}\}. \tag{3}$$

Для решения задачи синтеза в близкой постановке (по приближенным данным) в [5] предложен метод регуляризации [6], а обе постановки тесно связаны с рассмотренной ранее Тихоновым задачей восстановления проводящей слоистой системы по ее импедансу [7,8] (см. также [9]). Вопросу единственности решения подобных задач посвящена работа [10].

Далее в работе показано, что если задача синтеза физических параметров слоистой системы имеет решение, то решений—бесконечное множество, так как системы с различными физическими параметрами (3) могут иметь общие электродинамические параметры (1), (2), которые только и определяют коэффициент отражения системы $r(\omega)$. Поэтому в работе рассмотрена задача отыскания по заданному допустимому $r(\omega)$ электродинамических параметров системы

$$u=\{q_1, \nu_1, q_2, \ldots, q_N, \nu_N, q_{N+1}\}, \tag{4}$$

где $q_j=(1-\theta_j)/(1+\theta_j)$ $(j=1, \ldots, N+1)$ — параметры Френеля системы*.

Показано, что такая задача синтеза имеет единственное решение. Для этого построен алгоритм последовательного синтеза, который основан на особенностях структуры множества показателей Фурье $r(\omega)$ и решает задачу при любом количестве N слоев в системе, а также позволяет определять заранее неизвестное число N.

В работе введены и изучены понятия об эквивалентных слоистых системах и об элементарных преобразованиях таких систем. В частности, получено описание классов всех эквивалентных между собой систем. Приведено несколько вариантов дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения исходной задачи синтеза физических параметров слоистой системы.

1. В [1,2] доказано (см. также [3,4]), что $r(\omega)$ рекуррентно выражается через коэффициенты отражения $r_j(\omega)$ $(j=1, \ldots, N+1)$ от системы слоев от $(j+1)$-го до $(N+1)$-го и электродинамические параметры системы (4) по формулам

$$\begin{gathered} r(\omega)\equiv r_0(\omega), \quad r_{j-1}(\omega)=[q_j+r_j(\omega)e^{i2\nu_j\omega}]/[1+q_jr_j(\omega)e^{i2\nu_j\omega}] \\ (j=1, \ldots, N+1), \quad \nu_{N+1}=0, \qquad r_{N+1}(\omega)\equiv 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что $|q_j|<1$ $(j=1, \ldots, N+1)$. Будем считать $\rho_j\neq\rho_{j+1}$ $(j=1, \ldots, N+1)$, так как иначе систему N слоев можно было бы заменить системой из меньшего числа слоев с теми же коэффициентами отражения и пропускания [2]. Условие $r_{N+1}(\omega)\equiv 0$ означает отсутствие отраженной волны в правом полупространстве.

Как известно [11], всякую ПП функцию $f(\omega)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e^{i\lambda_k\omega}, \quad \alpha_k\neq 0, \quad \lambda_{k_1}\neq\lambda_{k_2} \qquad \text{при } k_1\neq k_2. \tag{6}$$

Множество чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, обозначаемое $\operatorname{Sp} f$, образует спектр этой функции, а числа α_k называются ее коэффициентами Фурье. Используя понятие среднего ПП функции

$$M[f(\omega)]=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega}f(\omega)d\omega, \tag{7}$$

при $0<\lambda<+\infty$ получим [11]

$$M[f(\omega)e^{-i\lambda\omega}]=\begin{cases}0, & \lambda\notin\operatorname{Sp} f\\ \alpha_k, & \lambda=\lambda_k\in\operatorname{Sp} f\end{cases}. \tag{8}$$

Если же функция $f(\omega)$ имеет период Ω, то

$$M[f(\omega)]=\frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega}f(\omega)d\omega$$

и предельный переход $\Omega\to\infty$ в (7), (8) не нужен.

---

* q_j $(j=1, \ldots, N+1)$ — коэффициенты отражения на границе полупространств, заполненных $(j-1)$-й и j-й средами.

2. Можно доказать, что всякий коэффициент отражения $r_j(\omega)$ $(j=0,\dots,N-1)$ представим в виде ряда (6). При этом условие $|q_j|<q_0$ $(j=1,\dots,N+1;\ 0<q_0<1)$ позволяет утверждать абсолютную и равномерную сходимость искомого, а также всех вспомогательных степенных рядов, так как всегда выполняется для систем из конечного числа слоев при обычных условиях для обычных материалов.

Искомое разложение $r_{j-1}(\omega)$ имеет вид

$$r_{j-1}(\omega)=\sum_{\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{0}_j}^{\infty} A_{\boldsymbol{k}_j}\exp(i\Lambda_{\boldsymbol{k}_j}\omega)\qquad (j=1,\dots,N),\tag{9}$$

где показатели Фурье* функции $r_{j-1}(\omega)$

$$\Lambda_{\boldsymbol{k}_j}\equiv\Lambda_{\boldsymbol{k}_j}(\boldsymbol{\nu}_j)=2\sum_{s=j}^{N}k_s\nu_s,\quad \boldsymbol{\nu}_j=(\nu_j,\dots,\nu_N),\tag{10}$$

и отвечающие им коэффициенты Фурье

$$A_{\boldsymbol{k}_j}\equiv A_{\boldsymbol{k}_j}(\boldsymbol{q}_j)=\prod_{s=j}^{N+1}b_{k_s}^{(k_{s-1})}(q_s),\quad \boldsymbol{q}_j=(q_j,\dots,q_N),\tag{11}$$

записаны с учетом того ,что $k_{j-1}\equiv1$, $k_{N+1}\equiv0$, где

$$b_k^{(0)}=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k=1,2,\dots\end{cases},$$

$$b_k^{(m)}\equiv b_k^{(m)}(q)=\begin{cases}q^m, & k=0\\ (-1)^k q^{k-m}\sum_{l=1}^{m}(-1)^l C_m^l C_{k+l-1}^k(1-q^2)^l, & k=1,2,\dots\end{cases}\tag{12}$$

Суммирование в (9) ведется по всем возможным значениям мультииндекса

$$\boldsymbol{k}_j=(k_j,k_{j+1},\dots,k_N),\quad k_s=0,1,\dots\quad (s=j,\dots,N),$$

причем если существует p $(j\leqslant p<N)$, такое что $k_p=0$, то $k_{p+t}=0$ $(t=1,\dots,N-p)$.

3. Множество чисел $\{\Lambda_{\boldsymbol{k}_j}\}$ (10) при всех возможных $\boldsymbol{k}_j$ будем называть спектром (показателей Фурье) коэффициента отражения $r_j(\omega)$ $(j=1,\dots,N)$. Его не следует смешивать с $\mathrm{Sp}\,r_{j-1}$ — спектром ПП функции $r_{j-1}(\omega)$. Спектр $r_{j-1}(\omega)$ состоит из неотрицательных чисел. Всегда $0\in\mathrm{Sp}\,r_{j-1}$, так как $\Lambda_{\boldsymbol{0}_j}=0$, $\boldsymbol{0}_j=(0,\dots,0)$ и $A_{\boldsymbol{0}_j}=b_0^{(1)}(q_j)\equiv\equiv q_j\neq0$.

Ближайшей к нулю точкой $\mathrm{Sp}\,r_{j-1}$ $(j=1,\dots,N)$ является $2\nu_j(j==1,\dots,N)$, которая получается по формуле (10) при $\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{1}_j=(1,0,\dots,0)$, так как $A_{\boldsymbol{1}_j}=b_1^{(1)}(q_j)\,b_0^{(1)}(q_{j+1})\equiv(1-q_j^2)q_{j+1}\neq0$, всем мультииндексам $\boldsymbol{k}_j=(0,k_{j+1},\dots,k_N)$ отвечают нулевые коэффициенты $A_{\boldsymbol{k}_j}$, $\boldsymbol{k}_j=\{1,k_{j+1},\dots,k_N\}$, $k_{j+1}\geqslant1$ — точки спектра, бóльшие $2\nu_j$.

4. Разложение $r_{j-1}(\omega)$ $(j=1,\dots,N)$ (9) отличается от разложения ПП функции $r_{j-1}(\omega)$ (6) возможным наличием коэффициентов $A_{\boldsymbol{k}_j}=0$, что в силу (11), (12) эквивалентно уравнению

---

* Числа (10) будут показателями Фурье ПП функции $r_{j-1}(\omega)$ в обычном смысле [11], если отвечающие им коэффициенты (11) $A_{\boldsymbol{k}_j}\neq0$.

$$\prod_{s=j}^{N+1} P_{k_s}^{(k_s-1)}(1-q_s^2)=0, \quad P_{k_s}^{k_s-1}(t)=\prod_{l=1}^{k_s-1}(-1)^l C_{k_{s-1}}^l C_{k_s+l-1}^{k_s} t^l,$$

которое имеет решение, если хотя бы один параметр $1-q_s^2$ является корнем многочлена $P_{k_s}^{(k_s-1)}(t)$. При этом $\mathrm{Sp}\, r_{j-1}'$ беднее спектра $r_{j-1}(\omega)$, так как $A_{\boldsymbol{k}_j}=0$ для всех $\boldsymbol{k}_j$, содержащих числа k_{s-1}, k_s в соответствующих позициях.

Заметим, наконец, что на основании (8)—(11)

$$M\left[r_{j-1}(\omega)e^{-i\lambda\omega}\right]=\begin{cases} q_j, & \lambda=0\in\mathrm{Sp}\, r_{j-1} \\ 0, & 0<\lambda<2\nu_j,\quad \lambda\notin\mathrm{Sp}\, r_{j-1}. \\ (1-q_j^2)\,q_{j+1}, & \lambda=2\nu_j\in\mathrm{Sp}\, r_{j-1} \end{cases} \tag{13}$$

5. Две системы однородных магнитодиэлектрических слоев назовем эквивалентными, если они обладают одинаковыми электродинамическими параметрами (4). При этом множество всех слоистых систем разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой систем.

Элементарным преобразованием первого типа (второго типа относительно j-го слоя системы) с параметром $\tau>0$ ($\tau_j>0$, $j=0,1,\dots,N+1$) системы слоев будем называть преобразование вектора $\boldsymbol{z}$ ее физических параметров (3) в вектор $\boldsymbol{z}'$, при котором в τ раз изменяются диэлектрические ε_j ($j=0,\dots,N+1$) и в $1/\tau$ магнитные μ_j ($j=0,\dots,N+1$) проницаемости, а толщины h_j ($j=1,\dots,N$) слоев системы остаются неизменными (в τ_j раз изменяются диэлектрическая ε_j и магнитная μ_j проницаемости и в $1/\tau_j$ раз толщина h_j j-го слоя системы, если он имеет конечную толщину, т. е. $j\neq 0$, $N+1$). Всего без учета величины параметров τ, τ_j ($j=0,\dots,N+1$) имеется ровно $N+3$ независимых между собой элементарных преобразований.

Выполнение любого числа элементарных преобразований слоистой системы не меняет вектора $\boldsymbol{u}$ ее электродинамических параметров (см. (4)) и электродинамических характеристик.

Описание всех эквивалентных между собой слоистых систем, а также связанные с этим уточнения постановки задачи синтеза физических параметров (3) слоистых систем по заданному их коэффициенту отражения будут рассмотрены в разд. 7—9 настоящей работы.

6. Покажем, что вектор $\boldsymbol{u}$ электродинамических параметров (4) однозначно определяется по заданному коэффициенту отражения $r(\omega)\equiv r_0(\omega)$ (5) системы N слоев.

Согласно (13) $M[r_0(\omega)]=q_1$ и $M[r_0(\omega)e^{-i\lambda\omega}]=0$ при $0<\lambda<2\nu_1$. Поэтому, используя (13), по $r_0(\omega)$ можно найти значение q_1, а затем ν_1 как наименьшее значение параметра $\lambda>0$, при котором $M[r_0(\omega)\times \times e^{-i\lambda\omega}]\neq 0$, т. е. значение первой пары q_1, ν_1 электродинамических параметров (4).

Если основную формулу (5) записать в виде

$$r_j(\omega)=\frac{r_{j-1}(\omega)-q_j}{1-q_j\, r_{j-1}(\omega)}\exp(-i2\nu_j\omega) \quad (j=1,\dots,N+1), \tag{14}$$

то, используя $r_0(\omega)$ и найденные значения q_1, ν_1, можно найти $r_1(\omega)$ — коэффициент отражения от системы без ее первого слоя. Дальше $r_1(\omega)$ можно использовать аналогично $r_0(\omega)$. Поэтому, используя для отыскания q_j и ν_j (13) и $r_j(\omega)$—(14) за N шагов приведенного алгоритма последовательного синтеза, можно найти N пар параметров q_j, ν_j ($j=1,\dots,N$) и функцию $r_N(\omega)\equiv q_{N+1}$, т. е. весь набор реальных электродинамических параметров слоистой системы (4).

Заметим, что единственную сложность при практической реализации указанного алгоритма могут представлять собой вычисления на каждом шаге величин ν_j $(j=1,\dots,N)$, если они не заданы априори, а также реализация условия остановки, если априори неизвестно число слоев N.

Алгоритм можно сократить, если при отыскании ν_j найти также значение

$$q_{j+1}=\frac{1}{1-q_j^2}\boldsymbol{M}[r_{j-1}(\omega)\exp(-i2\nu_j\omega)].$$

Если количество слоев N в системе заранее неизвестно, то оно однозначно определяется тем условием, что коэффициент отражения от «правого» полупространства не зависит от частоты. Т. е. в (13) для всех $\lambda>0$ $\boldsymbol{M}[r_N(\omega)e^{-i\lambda\omega}]=0$, что и интерпретируется как отсутствие в системе $N+1$-го слоя конечной толщины.

7. Докажем, что всевозможными композициями $(N+3)$-х элементарных преобразований, указанных в разд. 5, исчерпываются все преобразования, сохраняющие эквивалентность слоистых систем. При этом удобно использовать электродинамические параметры θ слоистой системы (2).

Рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered}\sqrt{(\varepsilon_j/\mu_j)(\varepsilon_{j-1}/\mu_{j-1})^{-1}}=\theta_j \quad (j=1,\dots,N+1),\\ \sqrt{\varepsilon_j/\mu_j}\,h_j=\nu_j \quad (j=1,\dots,N).\end{gathered} \tag{15}$$

При заданном векторе электродинамических параметров

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}'=\{u_1,u_2,\dots,u_{2N+1}\}\equiv\{\theta_1,\nu_1,\theta_2,\dots,\theta_N,\nu_N,\theta_{N+1}\},\\ \theta_j=(1-q_j)/(1+q_j) \quad (j=1,\dots,N+1),\end{gathered}$$

решениями (15) служат всевозможные векторы $\boldsymbol{z}$ физических параметров (3) эквивалентных между собой систем.

Логарифмируя (15) и обозначая

$$x_k=\ln z_k \quad (k=1,\dots,3N+4),\quad b_l=2\ln u_l \quad (l=1,\dots,2N+1), \tag{16}$$

получим линейную систему из $(2N+1)$-го уравнения с $(3N+4)$-мя неизвестными:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{3N+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_{2N+1} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Ранг матрицы системы (17) равен $2N+1$, а полный ортогональный базис ее ядра образуют векторы

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\-1\\0\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\\0\\1\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_{N+1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_{N+2}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\0\\1\\-1\\0\\ \vdots\\1\\-1\\0\\1\\-1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Поэтому всякое решение $\boldsymbol{x}$ системы (17) имеет единственное представление

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0=\alpha_0\boldsymbol{x}_0+\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_N\boldsymbol{x}_N+\alpha_{N+1}\boldsymbol{x}_{N+1}+\alpha_{N+2}\boldsymbol{x}_{N+2}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{x}^0$ — нормальное решение (17), а α_j $(j=0,\ldots,N+2)$ — некоторые числа.

Если вектор z' получен из z элементарным преобразованием с параметром τ или τ_j $(j=0,\ldots,N+1)$, то соответствующие z, z' по формуле (16) векторы x и x' отличаются на векторы

$$\begin{gathered} x'-x=\alpha_{N+2}x_{N+2}\,(\alpha_{N+2}=\ln\tau),\\ x'-x=\alpha_j x_j\ \ (\alpha_j=\ln\tau_j,\ \ j=0,\ldots,N+1), \end{gathered} \tag{20}$$

где использованы векторы (18). Наоборот, если вектор $x'-x$ имеет вид (20), то z' и z связаны элементарным преобразованием первого или второго типов с параметром $\tau=e^{\alpha_{N+2}}$ или $\tau_j=e^{\alpha_j}$ $(j=0,\ldots,N+1)$. Поэтому на основании (19), (20) всякое решение z (15), отвечающее решению x (17), получается из решения z^0 (15), отвечающего нормальному решению $\boldsymbol{x}^0$ (17) при помощи композиции элементарных преобразований, определяемых векторами (18) и числами $\tau=e^{\alpha_{N+2}}$, $\tau_j=e^{\alpha_j}$ $(j=0,\ldots,N+1)$.

8. Канонической системой слоев с вектором электродинамических параметров (4) назовем такую систему слоев, вектор физических параметров (3) которой z^0 связан преобразованием (16) с нормальным решением x^0 системы уравнений (17).

Для всякого вектора (4) каноническая система слоев единственна, а по доказанному в разд. 7 все эквивалентные ей слоистые системы получаются из нее элементарными преобразованиями разд. 5.

Используя (16) и условия ортогональности нормального решения (17) к векторам (18), можно однозначно найти все физические параметры канонической системы слоев:

$$\varepsilon_0^0 = p_0, \quad \mu_0^0 = \rho_0, \quad \varepsilon_j^0 = p_j \nu_j^{1/3}, \quad \mu_j^0 = \rho_j \nu^{1/3}, \quad h_j = \nu_j^{2/3},$$

$$\varepsilon_{N+1}^0 = p_{N+1}, \quad \mu_{N+1}^0 = \rho_{N+1}, \tag{21}$$

где $p_j = 1/\rho_j$ $(j=0, ..., N+1)$.

Решение неопределенных систем уравнений (15) или (17) представляет собой некорректно поставленную задачу [6]. Поэтому отыскание канонической системы физических параметров — нормального решения (17) — вполне оправдано с точки зрения методов решения задач синтеза физических параметров по приближенным исходным данным $\boldsymbol{u}_\delta$ [6].

9. Задачу синтеза физических параметров системы слоев часто приходится решать при дополнительных ограничениях на величины этих параметров. Иногда, например, естественно считать известными некоторые параметры левого и (или) правого полупространства. Так, если кроме $\boldsymbol{u}'$ заданы значения ε_0, μ_0, то общее решение (17) будет все еще зависеть от $(N+1)$-го параметра. Однако, определяя «квазинормальное» решение системы (17) формулой

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^0 + \alpha_0 \boldsymbol{x}_0 + \alpha_{N+2} \boldsymbol{x}_{N+2},$$

$$\alpha_0 = (1/2) \ln(1+\delta_1)(1+\delta_2), \ \alpha_{N+2} = (1/2) \ln[(1+\delta_1)/(1+\delta_2)],$$

где $\boldsymbol{x}^0$ — нормальное решение (17), $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_{N+2}$ — векторы из (18), а $\delta_1 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^0)/\varepsilon_0^0$, $\delta_2 = (\mu_0 - \mu_0^0)/\mu_0^0$ — относительные отклонения ε_0 μ_0 от ε_0^0, μ_0^0 канонической системы (21), мы, тем самым, однозначно определяем (по аналогии с канонической) «квазиканоническую» систему слоев с физическими параметрами $\hat{\boldsymbol{z}}$ по формулам (16).

Аналогично определяется квазиканоническая система слоев при заданных значениях ε_0, μ_0, ε_{N+1}, μ_{N+1} или любых трех из них. При другой постановке задачи априори задаются значения магнитных проницаемостей всех слоев системы

$$\mu_j = \xi_j \quad (j=0, ..., N+1). \tag{22}$$

Тогда общее решение системы (17), (22) имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \alpha \boldsymbol{x}^1, \quad \alpha = \ln \tau, \quad \tau > 0, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{x}^0$ — нормальное ее решение, а вектор $\boldsymbol{x}^1 = \{2,0; 2,0, -1; ... ; 2, 0, -1; 2,0\}$ порождает ядро матрицы (17), (22).

Решение задачи синтеза физических параметров в рассматриваемой постановке будет единственным, если каким-либо образом выбрать значение α, например $\alpha = 0$ для канонической слоистой системы, или наложить еще одно дополнительное условие на физические параметры задачи. Так, можно потребовать, чтобы $\varepsilon_0 = \text{const} = \gamma_0$ или чтобы $\sum_{j=1}^{N} h_j = H$. Каждое из этих условий позволит найти единственное значение $\alpha = \ln \tau$ для формулы (23): $\tau_1 = \sqrt{1+\delta_1}$, $\tau_2 = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{N} h_j^0$, где δ_1 — относительная величина отклонения ε_0 от ε_0^0, а h_j^0 — толщина слоев системы для нормального решения (17), (22) — $\boldsymbol{x}^0$.

Аналогичные формулы можно получить, если априори заданы значения диэлектрических постоянных всех слоев системы.

Если же задать значения

$$h_j = d_j \quad (j=1, ..., N), \tag{24}$$

то общее решение (17), (24) будет иметь вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \alpha_0 \boldsymbol{x}_0 + \alpha_{N+1} \boldsymbol{x}_{N+1} + \alpha_{N+2} \boldsymbol{x}_{N+2},$$

$$\alpha_j = \ln \tau_j, \quad \tau_j > 0 \quad (j = 0,\ N+1,\ N+2),$$

где $\boldsymbol{x}^0$ — нормальное решение (17), (24), а векторы $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{N+1}, \boldsymbol{x}_{N+2}$ являются очевидными модификациями векторов (18) с теми же номерами. Поэтому для однозначного определения решений системы (17), (24), если $\alpha_j \neq 0$ $(j=0,\ N+1,\ N+2)$, необходимо задать три независимых дополнительных условия. С физической точки зрения условия должны относиться к величинам ε_0, μ_0, ε_{N+1}, μ_{N+1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худак Ю. И. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 307-77. Деп. от 25 января 1977 г.
2. Худак Ю. И. — В сб.: Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. — М.: Ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1980, с. 171.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
№ 1, с. 135.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.—М.: Наука, 1973
5. Гласко В. Б., Тихонов А. Н., Тихонравов А. В.—ЖВММФ, 1974, 14,
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.
7. Тихонов А. Н.—ДАН СССР, 1952, **87**, № 4, с. 547.
8. Тихонов А. Н. — ЖВММФ, 1965, **5**, № 3, с. 545.
9. Дмитриев В. И. — Физика Земли, 1970, № 1, с. 64.
10. Гласко В. Б., Худак Ю. И.—ЖВММФ, 1980, **20**, № 2, с. 480.
11. Левитан Б. М. Почти периодические функции.—М.: Гостехиздат, 1953.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступила в редакцию 15 февраля 1984 г., в окончательном варианте 23 мая 1984 г.

ON THE PRESENTATION OF THE REFLECTION COEFFICIENT OF UNIFORMLY STRATIFIED MAGNETODIELECTRIC SYSTEM BY THE FOURIER SERIES

Yu. I. Hudak

A presentation has been obtained of the reflection coefficient of uniformly stratified magnetodielectric system by the trigonometric series. It is shown that the problem of the physical parameter synthesis of a stratified system over the given reflection coefficient is solved ambiguously, and that of the synthesis of its electrodynamic parameters has the single solution.