

УДК 538.574 6

## О РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

*В. П. Чумаченко*

Рассмотрены задачи дифракции  $E$ - и  $H$ -волн в случае, когда длина контура поперечного сечения поверхности сравнима с длиной волны. Разработанные алгоритмы при численной реализации позволяют для достижения достаточной для практики точности ограничиться в среднем одним неизвестным коэффициентом на  $0,2-0,25 \lambda$  длины контура поверхности. Приведены примеры решения конкретных задач.

В работах [1,2] был развит подход, который позволяет алгоритмизировать решение двумерных задач дифракции на проводящих поверхностях, контур поперечного сечения которых состоит из прямолинейных звеньев. Искомое решение  $u$  (продольная компонента электрического или магнитного поля) представляется при этом в виде

$$u = \sum_j u_j + u_0, \quad (1)$$

где  $u_0$  — первичное поле,  $u_j$  ( $1, 2, \dots, N$ ) — некоторые функции, относящиеся к отдельным элементам, на которые разбивается контур поверхности. Такой подход может быть назван методом поверхностных элементов (МПЭ). Для расширения области применения МПЭ необходимо рассматривать наряду с прямолинейными также и криволинейные элементы. В настоящей работе приведены возможные представления функций  $u_j$  для элементов с ненулевой в общем случае кривизной, и при помощи МПЭ построены алгоритмы решения задач дифракции  $E$ - и  $H$ -волн на кусочно-гладких цилиндрических поверхностях, состоящих из одного или нескольких кусков. В качестве конкретных примеров применения алгоритмов рассмотрены задачи определения диаграмм направленности зеркальных параболических антенн с некоторыми особенностями конструкции.

**Представления функций  $u_j$ .** Пусть  $S_j = S_j^+ U S_j^-$  — часть поверхности  $S$ , составляющая  $j$ -й элемент (рис. 1). Для каждого такого элемента введем систему ортогональных поверхностных координат  $(x_j, y_j)$ , так что  $x_j = 0$  соответствует центру элемента. Величину  $u_j$  получим как предельное значение ее интегрального представления с помощью второй формулы Грина для области, находящейся вне некоторой поверхности, охватывающей элемент, когда последняя стягивается к этому элементу. При этом, если предполагается, что при переходе через поверхность  $S$  скачок  $[u_j] = 0$ , то  $u_j$  имеет вид потенциала простого слоя:

$$u_j = - \int_{-j}^{+j} \mu_j G dx'_j, \quad (2)$$

где

$$\nu_j = \left[ \frac{\partial u_j}{\partial y'_j} \right] = \frac{\partial u_j}{\partial y'_j} \Big|_{S_j^+} - \frac{\partial u_j}{\partial y'_j} \Big|_{S_j^-}.$$

Если же  $[\partial u_j / \partial y_j] = 0$ , то  $u_j$  принимает вид потенциала двойного слоя:

$$u_j = \int_{-f_j}^{f_j} \mu_j \frac{\partial G}{\partial y'_j} dx'_j, \quad (3)$$

где  $\mu_j = [u_j]$ . В формулах (2), (3)

$$G = -(i/4) H_0^{(2)}(k|r - r'|) \quad (k = 2\pi/\lambda, i^2 = -1). \quad (4)$$

Для замкнутых поверхностей, в силу произвольности граничных условий на одной из сторон элемента, имеется возможность выбора между представлениями (2), (3), а также возможность их комбинации.

Физически величина  $\mu$  пропорциональна плотности полного поверхностного тока, текущего в продольном или поперечном направлении, откуда следует, что если в месте стыка соседних элементов поверхность гладкая и если представления  $\mu$  на этих элементах выбраны одинаковыми, то  $\mu$  непрерывна при переходе с элемента на элемент.

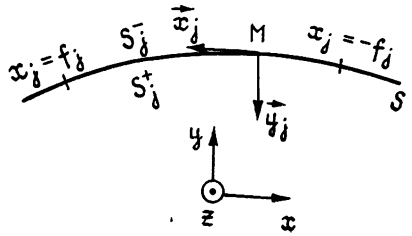


Рис. 1.

**Дифракция E-волн.** Выбрав для  $u_j$  представление (2), мы получим единый алгоритм как для замкнутых, так и разомкнутых поверхностей. Из (1) и граничного условия  $u|_S = 0$  вытекает система интегральных уравнений для определения неизвестных  $\mu_j$ :

$$\sum_j \int_{-f_j}^{f_j} \mu_j G dx'_j = u_0, \quad C \in S_k \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

Здесь  $C$  — точка наблюдения,  $N$  — число элементов. Введем обозначения

$$D_j = \mu_{j-1}(f_{j-1} - 0) = \mu_j(-f_j + 0) \quad (6)$$

и приблизим  $\mu_j$  линейными функциями

$$\mu_j = D_{j+1}\varphi^+(x_j) + D_j\varphi^-(x_j), \quad (7)$$

где

$$\varphi^+(x_j) = (f_j + x_j)/2f_j, \quad \varphi^-(x_j) = (f_j - x_j)/2f_j. \quad (8)$$

Ввиду известной связи продольного тока с поперечной тангенциальной составляющей магнитного поля  $Hx_j$  для элементов, прилегающих к ребрам, представление  $\mu_j$  выберем с учетом поведения у ребра этой составляющей. Для этого в (7) введем множитель  $[(f_j - x_j)/2f_j]^{\tau-1}$ , если ребро находится при  $x_j = f_j$ , и  $[(f_j + x_j)/2f_j]^{\tau-1}$ , если ребро находится при  $x_j = -f_j$ . Здесь

$$\tau = \pi/\alpha, \quad (9)$$

а  $\alpha$  — угол при ребре. Анализ формул, приведенных в [3], показывает, что если ребро находится между  $j-1$ -м и  $j$ -м элементами, то

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{H_{x_{j-1}(\rho)}|_{S_{j-1}}}{H_{x_j(\rho)}|_{S_j}} = 1$ , где  $\rho$  — расстояние от ребра. Поэтому в пред-

ставлении  $\mu$  по разные стороны ребра слагаемые с особенностями можно взять с одним и тем же коэффициентом  $D_j$ .

Таким образом, применение МПЭ в данном случае приводит к системе уравнений первого рода (5), близкой к известным уравнениям теории дифракции [4, 5]. Известно [6], что для получения устойчивого решения уравнений такого типа достаточно выбрать точки коллокации в узлах интерполяции, т. е. в нашем случае при  $x_j = \pm f_j$ .

Подставляя (7) в (5) и учитывая сделанные замечания, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных  $D_j$ :

$$\sum_j (a_{kj}^+ D_{j+1} + a_{kj}^- D_j) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

где

$$a_{kj}^\pm = \int_{-f_j}^{f_j} \varphi^\pm(x'_j) G(C, M') dx'_j; \quad (11)$$

$$b_k = u_0(C), \quad C \in S_k, \quad x_k = -f_k. \quad (12)$$

В случае разомкнутой поверхности добавляется еще одна точка коллокации на конце последнего элемента.

**Дифракция  $H$ -волн.** Единый алгоритм для замкнутых и незамкнутых поверхностей получим, воспользовавшись формулой (3). В этом случае  $\mu_j$  имеет смысл плотности полного тока, текущего в поперечном направлении. Как и выше, для приближения  $\mu_j$  используем формулы (7), (8). На прибрежных элементах приближение построим, исходя из особенностей поведения у ребра  $H_z$ . Если ребро находится при  $x_j = f_j$ , то положим

$$\begin{aligned} \mu_j = (D_j - D_{j+1}) \left( \frac{f_j - x_j}{2f_j} \right)^\tau + D_{j+1} = D_{j+1} \left[ 1 - \left( \frac{f_j - x_j}{2f_j} \right)^\tau \right] + \\ + D_j \left( \frac{f_j - x_j}{2f_j} \right)^\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Множители возле  $D_{j+1}$  и  $D_j$  снова обозначим  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$ . В случае, когда  $x_j = f_j$  соответствует кромке разомкнутой поверхности,  $D_{j+1} = 0$ . Аналогично строится приближение, когда ребро находится при  $x_j = -f_j$ .

Будем считать, что во внутренних точках элементов поверхности выполняются условия существования нормальной производной потенциала двойного слоя [7]. Выберем на  $S_k$  точку коллокации  $C$  и, не опуская пока точку наблюдения на поверхность, вычислим производную  $u_j$  по направлению вектора  $y_k^C$ . Рассматривая две прямоугольные системы координат с базисами  $(x_k^C, y_k^C)$ ,  $(x_j^M, y_j^M)$  и обозначив  $\beta = (x_j^M, \hat{x}_k^C)$ , после преобразований получим

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_k^C} = \mu_j \frac{\partial G}{\partial x_k^C} \Big|_{x'_j = f_j}^{x'_j = -f_j} + \int_{-f_j}^{f_j} \left[ \mu_j k^2 \cos \beta G - \mu_j' \frac{\partial G}{\partial x_k^C} \right] dx'_j. \quad (14)$$

При  $j=k$  интеграл в правой части (14) преобразуем следующим образом:

$$\int_{-f_k}^{f_k} = \int_{-f_k}^{f_k} \left\{ k^2 \left[ \cos \beta \mu_k(x'_k) G + \mu_k(x^C) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k|x'_k - x^C|}{2} \right] - \right. \\ \left. - \left[ \mu'_k(x'_k) \frac{\partial G}{\partial x'_k} - \mu'(x^C) \frac{\partial G}{\partial x'_k} \right] dx'_k - \int_{-f_k}^{f_k} \left[ k^2 \mu_k(x^C) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k|x'_k - x^C|}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu'(x^C) \frac{\partial G}{\partial x'_k} \right] dx'_k \right. \quad (15)$$

Здесь  $x^C$  — координата точки коллокации. При смещении точки наблюдения на поверхность первый интеграл в правой части (15) особенности в точке  $C$  не имеет, а второй вычисляется в явном виде.

Подставив (3) в (1) и потребовав выполнения граничного условия  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$ , мы получим для определения неизвестных  $\mu_j$  систему уравнений, которая, с учетом (14), будет иметь вид

$$\sum_j \int_{-f_j}^{f_j} \left[ \mu_j k^2 \cos \beta G - \mu'_j \frac{\partial G}{\partial x'_k} \right] dx'_j = - \frac{\partial u_0}{\partial y_k^C}, \quad (16)$$

$$C \in S_k \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Величины, соответствующие первому слагаемому правой части (14), в сумме дают нуль в силу непрерывности  $\mu$  на стыках элементов и в силу обращения в нуль  $\mu$  на кромках разомкнутой поверхности. После подстановки (7) в (16) получим систему алгебраических уравнений вида (10), где

$$a_{kj}^{\pm} = \int_{-f_j}^{f_j} \left[ k^2 \cos \beta \varphi^{\pm}(x'_j) G(C, M') - (\varphi^{\pm}(x'_j))' \frac{\partial G(C, M')}{\partial x'_k} \right] dx'_j; \quad (17)$$

$$b_k = - \partial u_0(C) / \partial y_k^C. \quad (18)$$

При  $j = k$  формула (17) изменяется с учетом (15). Заметим, что точки коллокации не могут уже быть выбраны в местах стыка элементов в силу невозможности обеспечить в этих точках непрерывность производной  $\mu'$  при аппроксимации  $\mu$  сплайнами первого порядка (7). Поэтому возле каждой точки соединения элементов выбирались две точки коллокации  $x_k^C = -0,6f_k$ ,  $x_{k-1}^C = 0,6f_{k-1}$ , и полученные уравнения складывались. Этого достаточно для обеспечения устойчивости решения.

**Численная реализация.** Описанные алгоритмы реализованы в виде двух программ для ЭВМ. Предполагается, что поперечное сечение рассматриваемой цилиндрической структуры состоит из одного или нескольких отдельных кусков, каждый из которых может быть собран из звеньев, которые выбираются из заданного набора кривых. Интегралы (11), (17) вычисляются методом Симпсона, а в случае, когда подынтегральная функция имеет особенность на конце интервала интегри-

рования, — методом Эрмита [8]. Два элемента, предшествующие ребру, выбраны короче других элементов, и в окончательном варианте их длина равна  $0,05\lambda$  и  $0,03\lambda$ . Для оценки погрешностей рассматривались задачи дифракции  $E$ - и  $H$ -волн на замкнутых круговых цилиндрах и на полосе, для которых известны [9, 10] точные решения.

На рис. 2 приведены зависимости среднеквадратических ошибок при определении диаграммы направленности ( $\delta$ ) и «тока»  $\mu(\sigma)$ , отнесенных к максимальному значению изучаемой величины, от длины

$l = 2f/\lambda$  элементов разбиения в случае дифракции плоских волн на цилиндре диаметром  $0,6\lambda$ . Значения  $\delta$  получены путем сравнения с точным решением, а значения  $\sigma$  определены приближенно сравнением со случаем максимального числа элементов разбиения. В случае дифракции на полосе погрешности меньше, однако имеют такой же порядок. Из графиков видно, что для достижения точности  $\delta < 0,02$  достаточно при решении задач дифракции как  $E$ -волн, так и  $H$ -волн ограни-

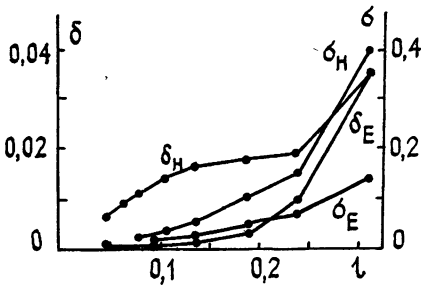


Рис. 2.

читься одним неизвестным коэффициентом на  $0,25\lambda$  длины контура поверхности. При фиксированном разбиении погрешность  $\sigma$  заметно выше, чем  $\delta$ .

В качестве тестовых задач были решены задачи дифракции  $E$ - и  $H$ -волн на некоторых поверхностях и произведено сравнение с имеющимися в литературе данными. Рассматривались: задача определения диаграммы направленности углового рефлектора [5], задачи дифракции плоской  $E$ -волны на многоугольных цилиндрах [1], задачи дифракции плоской  $H$ -волны на цилиндре треугольного сечения [2] и на незамкнутой круговой цилиндрической поверхности [5], задача определения диаграммы направленности линейного магнитного тока, расположенного на поверхности кругового цилиндра [11]. Во всех случаях результаты согласуются с известными.

Ниже в качестве примеров использования описанных алгоритмов приведены результаты численных экспериментов по определению диаграмм направленности зеркальных параболических цилиндрических антенн с различными возможными особенностями конструкции. Счет производился на ЭВМ ЕС-1020. Контур поперечного сечения параболического цилиндра (рис. 3) представляет собой параболу  $y^2 = 2px$ . Источник поля расположен на фокальной линии  $x = p/2$ .

Кривая 1 на рис. 3 является полученной диаграммой направленности антенны с бесконечно тонким зеркалом АОВ ( $2a = 6\lambda$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $p = 11,196\lambda$ ), облучатель которой имеет секторную диаграмму направленности (в пределах угла  $\varphi$  первичное поле совпадает с полем токовой нити, т. е.  $u_0 = H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ист}|)$  и  $u_0 = 0$  вне угла  $\varphi$ ). Угол  $\gamma$  отсчитывается от направления оси  $x$ . Эти результаты, если пересчитать их соответствующим образом, совпадают с данными, приведенными для интервала  $0^\circ \leq \gamma \leq 50^\circ$  в [5]. Кривая 2 представляет собой диаграмму направленности той же антенны, но с фланцем, изображенным на поле рисунка ( $\beta = 45^\circ$ ,  $d = 0,5\lambda$ ). Видно, что при заданных  $\beta$  и  $d$  снижается боковое излучение и возрастает уровень излучения в обратном направлении (назад). Наличие скругления кромки антенны, изображенного на поле рисунка ( $R = 0,2\lambda$ , кривая 3), также приводит к некоторому снижению бокового излучения. Кривая 4 представляет диаграмму направленности антенны с плоским дном (зеркало имеет

вид ADLEB,  $|OL| = 0,042 \lambda$ ). Такая конструкция приводит к увеличению первого и третьего боковых лепестков и незначительному уменьшению второго лепестка. В остальном диаграмма сохраняет прежний вид. К точно такому же эффекту приводит помещение

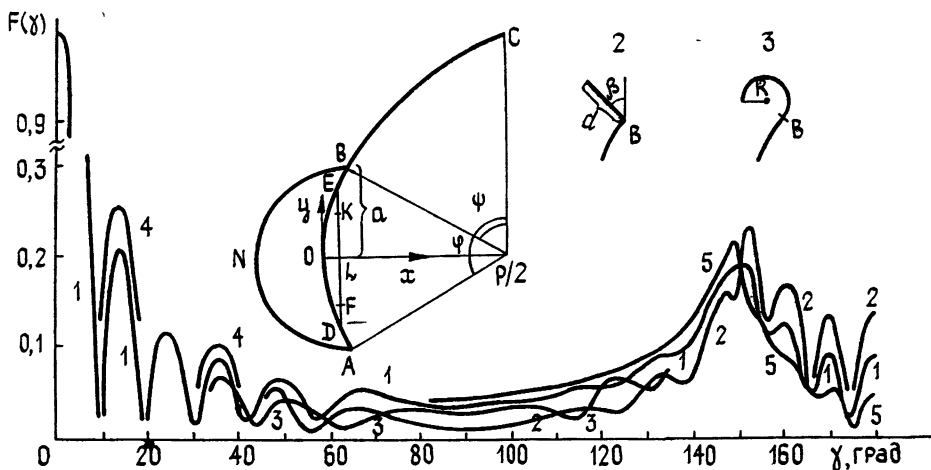


Рис. 3.

в плоскости DE перед зеркалом пластины FK ( $|FK| = 1,6 \lambda$ ). Кривая 5 представляет случай, когда задняя поверхность антенны выполнена в виде кругового цилиндра ANB радиусом  $a$ , а зеркало, как и ранее, имеет вид AOB. Видно, что это приводит к небольшому увеличению бокового излучения и снижению излучения в область тени.

На рис. 4 приведена диаграмма направленности для случая, когда облучатель с секторной диаграммой освещает кусок параболического цилиндра, совпадающий с участком BC ( $\psi = 60^\circ$ ,  $\rho = 11,196 \lambda$ ). Из рис. 4 следует, что при такой концентрации антенны облучатель находится в области, где уровень вторичного поля близок к минимальному.

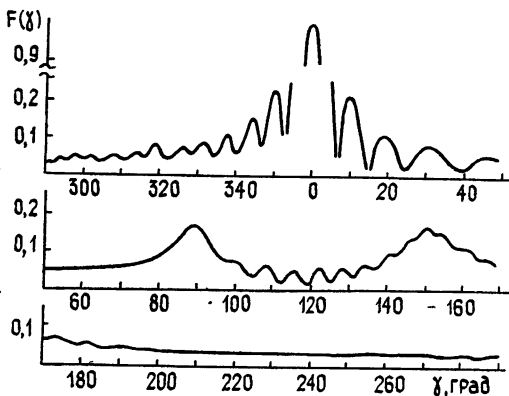


Рис. 4.

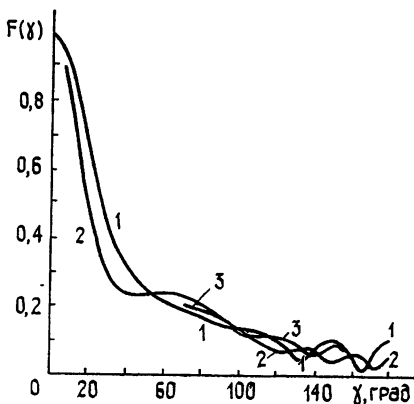


Рис. 5.

Кривая 1 на рис. 5 представляет диаграмму направленности параболической цилиндрической антенны AOB ( $2a = 2 \lambda$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $\rho = \lambda$ ), когда на фокальной линии расположена нить с магнитным током. Кривая 2 соответствует случаю, когда на кромках антен-

ны имеется скругление радиусом  $R = 0,2\lambda$ . Наличие скругления в данном случае приводит к снижению излучения в направлении назад. Если задняя поверхность антенны выполнена в виде цилиндра радиусом  $a$ , то диаграмма направленности (кривая 3) несколько изменяется по сравнению со случаем 1 на интервале  $70^\circ < \gamma < 150^\circ$ . Для других значений угла  $\gamma$  она близка к диаграмме бесконечно тонкого зеркала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чумаченко В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1480.
2. Чумаченко В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 8, с. 925.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.
4. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. — В сб.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1973, вып. 20, с. 106.
5. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. — М.: Радио и связь, 1982.
6. Воронин Е. В., Цехоко В. А. — ДАН СССР, 1974, 216, № 6, с. 1209.
7. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.
9. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1948.
10. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: ИЛ, 1964.
11. Айзенберг Г. З., Ямпольский В. Г., Терешин О. Н. Антенны УКВ. — М.: Связь, 1977. Ч. I.

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редакцию  
1 марта 1984 г.

#### ON TWO DIMENSIONAL DIFFRACTION PROBLEMS FOR PIECEWISE SMOOTH CYLINDRICAL SURFACES

*V. P. Chumachenko*

Some problems are considered of diffraction of  $E$  and  $H$  waves by a surface for which the length of a transverse section contour is comparable with a wavelength. A numerical procedure developed herein provides sufficient accuracy for practical calculations using one unknown coefficient at the average within 0,2–0,25 length of the surface contour. Some numerical results are presented.

---