

УДК 621.372.8

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ФЛАНЦЕМ

C. L. Просвирнин

Для задачи дифракции ТЕМ-волны на открытом конце плоского волновода с фланцем получено строгое решение в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. При решении задачи использовано обращение части оператора с помощью метода моментов. Приведены численные результаты, показывающие быструю сходимость метода редукции. Метод эффективен для решения задачи дифракции на решетке из прямоугольных металлических брусьев.

1. Рассмотрим дифракцию ТЕМ-волны на открытом конце плоского волновода с фланцем, рис. 1. Представим поле в виде

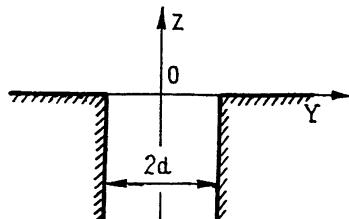


Рис. 1.

$$H_I = \int_0^\infty a(\xi) \cos u\xi e^{iv\gamma(\xi)} d\xi, \quad v > 0,$$

$$H_{II} = e^{i\eta v} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \pi m u e^{-ivh_m},$$

$$|u| \leq 1, \quad v < 0.$$

Здесь $u = y/d$, $v = z/d$, $\eta = kd$, k — волновое число, $\gamma(\xi) = \sqrt{\eta^2 - \xi^2}$,

$h_m = \sqrt{\eta^2 - (\pi m)^2}$, выбрана ветвь корня, обеспечивающая выполнение условия излучения (зависимость от времени принята в виде $e^{-i\omega t}$). Из граничных условий следует система уравнений:

$$\int_0^\infty a\gamma \cos u\xi d\xi = 0, \quad |u| > 1; \quad (1)$$

$$\int_0^\infty a \cos u\xi d\xi = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \pi m u, \quad |u| < 1; \quad (2)$$

$$\int_0^\infty a\gamma \cos u\xi d\xi = \eta - \sum_{m=0}^{\infty} c_m h_m \cos \pi m u, \quad |u| < 1. \quad (3)$$

Функция $w(u) = \int_0^\infty a\gamma \cos u\xi d\xi$ с точностью до постоянного множителя представляет собой E_y -компоненту поля в плоскости $z=0$. Поперечная к ребру прямоугольного металлического клина компонента поля возле ребра имеет величину $0(\rho^{-1/3})$, где ρ — расстояние до ребра [1]. Представим функцию $w(u)$ при $u \in [-1, 1]$ в виде $w(u) = (1-u^2)^\alpha f(u)$, где $\alpha \leq -1/3$, а функция $f(u)$ непрерывна. Из условия Майкснера следует, что вблизи ребра ни одна из компонент поля не может возрастать быстрее, чем $\rho^{-1/2}$. При $-1/2 \leq \alpha \leq -1/3$ и любой

непрерывной функции $f(u)$ условие Майкснера выполнено. Какая-либо другая информация о поведении поля возле ребра для решения задачи не является необходимой [2].

Разложим $f(u)$ в ряд Якоби:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(u). \quad (4)$$

При $\alpha = -1/3$ функция $f(u)$ на интервале $[-1, 1]$ имеет непрерывную производную, и поэтому ряд Якоби поточечно сходится к $f(u)$. Если $-1/2 \leq \alpha < -1/3$, ряд сходится к $f(u)$ в среднем, например, в $L^2_{(1-u^2)^\alpha}$ [3]. Неизвестные $a(\xi)$ и $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ выражаются через коэффициенты ряда (4). Используя (1), получаем

$$a(\xi) = \frac{2}{\pi \gamma(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n a_n^{(\alpha)} \frac{J_{2n+\alpha+1/2}(\xi)}{\xi^{\alpha+1/2}}, \quad (5)$$

где $a_n^{(\alpha)} = (-1)^n \sqrt{\pi} 2^{\alpha-1/2} \Gamma(2n+1+\alpha) [(2n)!]^{-1}$. Из (3) находим

$$c_m = \delta_{0m} - \frac{2}{(1+\delta_{0m}) h_m} \sum_{n=0}^{\infty} g_n a_n^{(\alpha)} \frac{J_{2n+\alpha+1/2}(\pi m)}{(\pi m)^{\alpha+1/2}}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

2. Предположим, что $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ известны. Подставим (5) в (2), разложим функции от u в левой и правой частях уравнения в ряды по полиномам Якоби $P_{2m}^{(\beta, \beta)}(u)$, $\beta > -1$ и коэффициенты разложений приравняем. В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений 1-го рода относительно $\tilde{g}_n = g_n a_n^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n+\alpha+1/2}(\xi) J_{2m+\beta+1/2}(\xi)}{\gamma(\xi) \xi^{\alpha+\beta+1}} d\xi &= \frac{\pi \delta_{0m}}{2^{\beta+3/2} \Gamma(\beta + 3/2)} + \\ &+ \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{\infty} c_p \frac{J_{2m+\beta+1/2}(\pi p)}{(\pi p)^{\beta+1/2}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что в задаче дифракции на плоском волноводе с фланцем система уравнений 1-го рода вида (7), в которую вместо c_p подставлено выражение (6), при $\alpha = \beta = -1/2$ была получена в [4], а при $\alpha = -1/3$, $\beta = -2/3$ в [5] путем использования свойств интеграла Вебера — Шафхейтлина и применена для численного решения задачи.

Диагональные матричные элементы системы уравнений (7) с ростом n убывают, как $n^{-(\alpha+\beta+2)}$, а внедиагональные при $|n-m| \rightarrow \infty$, как $|n^2 - m^2|^{-(\alpha+\beta+2)}$. Обосновать применимость метода редукции для решения системы уравнений с такой матрицей не удается. Кроме того, при решении системы уравнений 1-го рода возможны неустойчивости алгоритма, вызванные ее некорректностью.

Проведем регуляризацию системы уравнений (7) путем полуобращения ее оператора. Для этого выделим уравнение, соответствующее $m=0$, и будем рассматривать его относительно \tilde{g}_0 . Матричный оператор оставшейся системы уравнений представим в виде суммы двух частей: статической и динамической. Статическая часть оператора — это часть, не равная нулю при $\eta=0$. Выберем $\alpha=\beta=-1/2$. Тогда, как

Можно показать, статическая часть оператора представляет собой диагональную матрицу (фактически обращается), и систему уравнений можно представить в виде

$$x_m = b_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} x_n, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Здесь $x_m = g_m / (2\sqrt{m})$, $A_{m,n} = 4\sqrt{nm} \int_0^{\infty} J_{2n}(\xi) J_{2m}(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi$, $b_m = \pi i \sqrt{m} \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_{2m}(\pi p) + \tilde{g}_0 f_m$, $f_m = 2\sqrt{m} \int_0^{\infty} J_{2m}(\xi) J_0(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi$, $\varepsilon(\xi) = \xi^{-1} - i/\gamma(\xi)$. Уравнение относительно \tilde{g}_0 имеет вид

$$h\tilde{g}_0 = q - i \sum_{m=1}^{\infty} x_m f_m,$$

где

$$h = \int_0^{\pi/2} J_0(\eta \sin \theta) H_0^{(1)}(\eta \sin \theta) d\theta, \quad q = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{p=0}^{\infty} c_p J_0(\pi p) \right].$$

Диагональные элементы матрицы системы уравнений (8) имеют величину $0(m^{-2})$, внедиагональные $-0(\sqrt{mn}(m+n)^{-3})$. Для решения системы можно применить метод редукции.

3. До сих пор $\{c_p\}_{p=0}^{\infty}$ предполагались известными. Однако их следует найти из решения задачи. Из условия на ребре следует, что коэффициенты c_p с ростом p должны убывать, как $p^{-5/3}$. Заменим ряд в выражении для свободных членов системы уравнений (8) конечной суммой, сохранив в ней первые N членов ряда. Свободные члены с такой суммой обозначим b_m^N , а соответствующее решение системы уравнений x_m^N . Система уравнений

$$(x_m - x_m^N) = \pi i \sqrt{m} \sum_{p=N+1}^{\infty} c_p J_{2m}(\pi p) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} (x_n - x_n^N)$$

при $N \rightarrow \infty$ имеет нулевое решение, если c_p убывают по закону, обеспечивающему выполнение условия на ребре, поскольку стремятся к нулю ее свободные члены. Таким образом, x^N образуют сходящуюся последовательность решений.

Будем рассматривать систему уравнений

$$x_m^N = b_m^N + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} x_n^N, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Системе уравнений (9) соответствует система интегральных уравнений вида (1)–(3) с конечными суммами в правых частях. Используем представление вида (6) в выражении для b_m^N . После некоторых преобразований получим систему уравнений

$$x_m^N + \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n}^N x_n^N = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^N x_n^N + \tilde{g}_0 w_m^N, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

где

$$S_{m,n}^N = 4\sqrt{mn} \sum_{p=1}^N J_{2n}(\pi p) J_{2m}(\pi p) / p, \quad B_{m,n}^N = A_{m,n} + 4\sqrt{nm} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2n}(\pi p) J_{2m}(\pi p) \varepsilon_p,$$

$$w_m^N = f_m - 2\pi i \sqrt{m} \sum_{p=1}^{\infty} J_0(\pi p) J_{2m}(\pi p) / h_p, \quad \varepsilon_p = p^{-1} - \pi i / h_p.$$

Элементы матрицы B_{mn}^N с увеличением m и n убывают так же, как элементы матрицы A . Для решения системы уравнений (10) можно использовать метод редукции.

Матрица S^N не зависит от физических параметров. Ее матричные элементы при $m, n < \pi N/2$ медленно убывают с ростом m и n . Поэтому удобно численно обратить оператор $I + S^N$, т. е. построить оператор R^N такой, что $R^N(I + S^N) = I$. Элементы матрицы $R^N = (r_{l,m}^N)$ удовлетворяют системе уравнений

$$r_{l,n}^N + \sum_{m=1}^{\infty} S_{n,m}^N r_{l,m}^N = \delta_{l,n}, \quad l, n = 1, 2, 3, \dots,$$

с вырожденной матрицей. Поэтому ее решение сводится к решению конечной системы уравнений

$$X_q^l + \sum_{p=1}^N Q_{pq} X_p^l = u_l(q), \quad q = 1, 2, 3, \dots, N,$$

где

$$Q_{pq} = \frac{\pi \sqrt{pq}}{q^2 - p^2} [p J_0(\pi p) J_1(\pi q) - q J_1(\pi p) J_0(\pi q)], \quad p \neq q,$$

$$Q_{pp} = \frac{\pi^2 p}{2} [J_0^2(\pi p) + J_1^2(\pi p)] - \pi J_0(\pi p) J_1(\pi p),$$

$$u_l(q) = 2 \sqrt{l} J_{2l}(\pi q) / \sqrt{q}.$$

Элементы матрицы R^N определяются по формуле

$$r_{l,n}^N = \delta_{l,n} - \sum_{p=1}^N X_p^l u_l(p). \quad (11)$$

Систему уравнений (10) после обращения оператора $I + S^N$ представим в виде

$$x^N = R^N B^N x^N + \tilde{g}_0 R^N w^N. \quad (12)$$

Ее решение можно получить методом редукции. Порядок редуцированной системы уравнений (12) зависит от параметров задачи и может быть существенно ниже, чем порядок редуцированной системы уравнений, соответствующей (10), при одинаковой точности решений.

Матрица R^N является «стандартной» для большого класса задач дифракции волн на экранах конечной толщины со щелями, не зависит от параметров этих задач и может быть вычислена с высокой точностью, большого порядка, для большого значения N , а затем использована во всех задачах этого класса.

Заметим, что наряду с матрицей R^N , полученной по приведенному выше алгоритму, оказалось возможным использовать в (12) матрицу R , найденную путем обращения методом редукции $I + S$ при $N = \infty$. Сходимость ряда для вычисления элементов матрицы S улучшалась с помощью преобразования Куммера. Численно установлено, что с увеличением порядка редуцированной матрицы, соответствующей $I + S$, последовательность обратных матриц быстро сходится. Матрица $(I + S)_{13}$ (нижний индекс показывает порядок редуцированной матрицы) была обращена и с результатом R_{13} сравнивались обратные матрицы, полученные обращением $(I + S)_n$ при $n < 13$. Отличие элементов обратной матрицы R_2 от соответствующих элементов R_{13} (отношение

абсолютной величины разности между ними к максимальному по абсолютной величине матричному элементу) составило не более 0,6%, а R_4 от R_{13} — не более 0,2%. Отличие элементов матрицы R_2 и R_4 от соответствующих элементов матрицы R^{75} (полученной по формуле (11) при $N=75$) не превосходило 1%.

Таблица

d/λ	$M=1$		$M=2$		$M=6$	
	$ c_0 $	$\arg c_0, \text{град}$	$ c_0 $	$\arg c_0, \text{град}$	$ c_0 $	$\arg c_0, \text{град}$
0,05	0,584	133,1	0,584	133,1	0,584	133,1
0,15	0,282	99,0	0,281	99,2	0,281	99,3
0,25	0,155	80,8	0,154	81,3	0,154	81,5
0,35	0,087	72,7	0,086	73,7	0,086	74,1
0,45	0,047	80,8	0,047	81,8	0,047	82,7
0,55	0,059	106,0	0,058	107,7	0,058	108,2
0,65	0,056	91,6	0,056	92,3	0,056	93,3
0,75	0,045	83,7	0,045	81,5	0,045	83,4
0,85	0,036	84,0	0,032	75,6	0,033	78,6
0,95	0,033	80,1	0,022	82,4	0,024	85,1

Расчеты показали, что для определения коэффициента отражения от конца волновода и диаграммы направленности излучения с точностью не хуже одного процента достаточно решать редуцированную систему уравнений, соответствующую (12), порядок которой равен целой части kd . В таблице отражена зависимость c_0 от порядка M усеченной системы.

4. Для того чтобы проанализировать возможности описанного метода, рассмотрено решение задачи дифракции плоской нормально падающей волны на периодической решетке из металлических брусьев прямоугольного поперечного сечения рис. 2. Электромагнитное поле в полупространстве, где распространяется падающая волна, представлено в виде суперпозиции падающей волны, волны отраженной, записанной в предположении, что отражение происходит от сплошной металлической плоскости, и суммы полей волн, рассеянных на каждой из щелей решетки. Прошедшее через решетку поле представлено в виде суммы полей волн, прошедших через каждую щель.

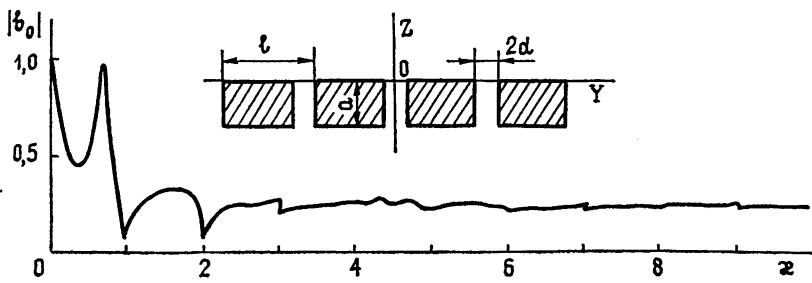


Рис. 2.

Поля, соответствующие излучению каждой из щелей, записаны в виде разложений в интегралы Фурье по плоским волнам. В операторе всей задачи выделена часть, относящаяся к дифракции на одной щели, и затем применен описанный выше метод для ее обращения. Оставшаяся часть оператора учитывает взаимодействие между полями в выделенной щели и во всех остальных. Решение задачи, таким образом, сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Ее численное решение найдено методом редукции.

Результаты, полученные этим строгим методом и приведенные в [6], совпадают. Главная отличительная особенность данного алгоритма по сравнению с алгоритмами на основе методов, изложенных в [6], состоит в том, что он позволяет получить результаты с высокой точностью в широком диапазоне изменения параметров задачи путем решения редуцированной системы уравнений довольно низкого порядка. Так, например, для расчета коэффициента прохождения с точностью не хуже одного процента при нормальном падении плоской волны оказалось достаточно решать редуцированные системы первого порядка, т. е. содержащие одно уравнение, для решетки, у которой $a/l=0,5; 2,0$ при $2d/l=0,25$ в диапазоне $0<\kappa<5$ ($\kappa=l/\lambda$), при $2d/l=0,5$ в диапазоне $0<\kappa<3$, при $2d/l=0,75$ — $0<\kappa<1,75$. На рис. 2 в качестве примера показана частотная зависимость коэффициента прохождения решетки $|b_0|$, у которой $a/l=0,5$, $2d/l=0,25$. Первые три десятичных знака амплитуд распространяющихся дифракционных гармоник не изменяются с увеличением порядка редуцированной системы уравнений в диапазоне $0<\kappa<4,25$, начиная с первого порядка, а в диапазоне $4,25<\kappa<10,0$ — со второго. В основном порядок редуцированной системы уравнений зависит от отношения ширины щели к длине волны. Если эта величина постоянна, то с увеличением периода решетки алгоритм становится более эффективным. Для достижения той же точности с помощью методов, описанных в [6], требуется решать системы уравнений порядка $[\kappa]+1$.

Поскольку порядок редуцированной системы уравнений в задаче дифракции на одной щели (волноводе с фланцем) невысокий, данный метод позволяет изучать дифракционные характеристики ограниченных решеток, содержащих конечное число щелей.

ЛИТЕРАТУРА

- Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов — М.: Мир, 1974, — 328 с.
- Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982. — 272 с.
- Бейтмен Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции — М.: Наука, 1974, т. 2. — 296 с.
- Нонго К. — Radio Scince, 1972, 7, № 10, р. 955.
- Комаров С. А. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1976, 19, № 2, с. 94.
- Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973. — 288 с.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 февраля 1984 г.

MOMENT METHOD IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION BY THE PARALLEL-PLATE FLANGED WAVEGUIDE

S. L. Prosvirnin

A rigorous solution has been obtained for the problem of TEM-wave diffraction by an open end of parallel-plate flanged waveguide in the form of an infinite system of linear algebraic equations. Partial inversion of the operator involved by the moment method is used. The paper present numerical results demonstrating the rapid convergence of the reduction method. The method can be effective for solving the problem of diffraction by a grating of rectangular beams.