ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.56

О МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА АНИЗОТРОПНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ И В РЕФРАКЦИОННЫХ ВОЛНОВОДАХ

В. В. Артельный, М. А. Раевский

Исследуется многократное рассеяние волны на крупномасштабных флуктуациях показателя преломления с произвольным характером анизотропии. Рассматривается рассеяние волны в безграничной среде и рефракционных волноводах. Анализируется затухание когерентной компоненты волны, уширение ее углового спектра и изменение поперечной функции корреляции в зависимости от характера анизотропии флуктуаций и параметров волны.

В связи с вопросами распространения электромагнитных волн в ионосферной и космической плазме, звуковых волн в океане и атмосфере и др. представляет интерес рассмотрение влияния существенно анизотропных флуктуаций показателя преломления на статистические характеристики волновых полей. В случае безграничной среды с постоянным в среднем показателем преломления эта задача достаточно подробно исследована в борновском приближении (см., например, [1, 2]). В рамках теории многократного рассеяния конкретные результаты были получены лишь в том частном случае, когда волна распространяется вдоль направления анизотропии неоднородностей [3, 4].

В первой части данной работы рассматривается многократное рассеяние в безграничной среде волны, распространяющейся под произвольным углом к направлению анизотропии неоднородностей. Анализируется затухание когерентной компоненты и уширение углового спектра волны в зависимости от параметров задачи и характера анизотропии флуктуаций показателя преломления. Качественно объясняются основные полученные зависимости. Во второй части работы исследуется влияние анизотропных флуктуаций показателя преломления на статистические характеристики волн, распространяющихся в рефракционных волноводах. Приводится обобщение полученных ранее результатов [5] на случай флуктуаций с произвольной степенью анизотропии. При этом удается аналитически исследовать поведение когерентных компонент и функций когерентности нормальных мод в случае широкого класса волноводов со степенными законами изменения регулярного показателя преломления. Обсуждается связь трансформации энергии нормальных мод с диффузией углового спектра волны, усредненной по циклам лучей в волноводе.

1. РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим влияние анизотропных флуктуаций показателя преломления на статистические характеристики волны, распространяющейся в безграничной, однородной в отсутствие флуктуаций среде. Для краткости ограничимся случаем скалярного волнового поля и будем пренебрегать временными изменениями флуктуаций среды. При этом для потенциала φ монохроматической волны имеем уравнение

$$\Delta\varphi+\omega^2 C_0^{-2}\varphi = 2\omega^2 \Delta C C_0^{-3}\varphi, \tag{1.1}$$

где ω — частота волны, $\Delta C(x, y, z)$ — флуктуации фазовой скорости волны, которые предполагаются малыми в сравнении со средним значением C_0.

Будем считать, что характерные масштабы флуктуаций ΔC превышают длину волны, при этом задачу можно рассматривать в приближении «рассеяния вперед» [6]. Пусть волна распространяется вдоль x и является статистически однородной по y, z. Перейдем к медленно меняющейся спектральной амплитуде $b_\varkappa$, определяемой соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int (h_\varkappa)^{-1/2} b_\varkappa \exp(ih_\varkappa x + i\varkappa\rho)\,d\varkappa, \tag{1.2}$$

где $\rho = \{y, z\}$, $h_\varkappa = (\omega^2 C_0^{-2} - \varkappa^2)^{1/2}$ — x-компонента волнового вектора Пренебрегая в уравнении для $b_\varkappa$ второй производной по x, получим

$$\frac{db_\varkappa}{dx} = -\frac{i\omega^2}{2\pi C_0^3}\int (h_\varkappa h_{\varkappa_2})^{-1/2}\Delta C_{\varkappa_1} b_{\varkappa_2}\exp[i(h_{\varkappa_2}-h_\varkappa)x]\times \\ \times\delta(\varkappa-\varkappa_1-\varkappa_2)\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2. \tag{1.3}$$

Рассмотрим поведение первых двух моментов спектральной амплитуды плоской волны $\langle b_\varkappa(x)\rangle = \langle b(x)\rangle\delta(\varkappa)$ и $\langle b_\varkappa(x)\, b^*_{\varkappa_1}(x)\rangle = N_\varkappa(x)\,\delta(\varkappa - \varkappa_1)$. Предполагая, что неоднородности ΔC являются гауссовыми, а также, что рассеяние волны мало на масштабе корреляции неоднородностей, можно корректно получить [5] замкнутые уравнения для произвольных моментов спектральной амплитуды. При этом уравнение для спектральной интенсивности $N_\varkappa$ имеет вид

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial x} = \int W_{\varkappa\varkappa_2}(N_{\varkappa_2} - N_\varkappa)\,d\varkappa_2, \tag{1.4}$$

где

$$W_{\varkappa\varkappa_2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{\omega^4}{C_0^6 h_\varkappa h_{\varkappa_2}} B_{\varkappa_1 h_1}\,\delta(\varkappa-\varkappa_1-\varkappa_2)\,\delta(h-h_1-h_2)\,d\varkappa_1\,dh_1, \tag{1.5}$$

а $B_{\varkappa_1 h_1} = \int \langle \Delta C(\rho+\rho_1, x+x_1)\,\Delta C(\rho, x)\rangle \exp[-i\varkappa_1\rho_1 - ih_1 x_1]\,d\rho_1 dx_1$ — спектр статистически однородных флуктуаций ΔC. Соответствующее уравнение для когерентной компоненты $\langle b(x)\rangle$ плоской волны имеет вид

$$d\langle b\rangle/dx = -\Gamma\langle b\rangle, \tag{1.6}$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int W_{0\varkappa_2}\,d\varkappa_2. \tag{1.7}$$

Отметим, что исследование рассеяния волны на сильно анизотропных неоднородностях в приближении марковского случайного процесса (см., например, [6]) может приводить к неверным результатам, тогда как уравнения (1.4)—(1.7) справедливы при произвольном характере анизотропии крупномасштабных неоднородностей показателя преломления. Если неоднородности ΔC сильно вытянуты вдоль направления распространения волны, вероятность перехода $W_{\varkappa\varkappa_2}$ определяется видом продольной (по отношению к волне) функции корреляции неоднородностей. При этом рассеяние имеет ракурсный характер и не описывается уравнениями марковского приближения. В случае неоднородностей, не очень вытянутых вдоль направления распространения волны, рассеяние определяется характером поперечной функции корреляции неоднородностей, при этом для вероятности перехода $W_{\varkappa\varkappa_2}$ можно использовать приближенное выражение

$$W_{\varkappa\varkappa_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\omega^2}{C_0^4} B_{\varkappa_1 0}\, \delta(\varkappa - \varkappa_1 - \varkappa_2)\, d\varkappa_1.$$

Уравнения для спектральной интенсивности (1.4) и когерентной компоненты (1.6) в этом случае совпадают с соответствующими уравнениями, полученными в приближении марковского процесса [6]. Углы рассеяния на крупномасштабных неоднородностях малы, т. е. вероятность перехода $W_{\varkappa\varkappa_2}$ отлична от нуля лишь для переходов на $\Delta\varkappa \equiv \varkappa - \varkappa_2 \ll \varkappa$. При этом естественно перейти от интегрального уравнения для интенсивности (1.4) к диффузионному уравнению

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varkappa_i} \left(D_{ij} \frac{\partial N_\varkappa}{\partial \varkappa_j} \right) \tag{1.8}$$

с тензором диффузии

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \int \Delta\varkappa_i \Delta\varkappa_j W_{\varkappa\varkappa_2}\, d\varkappa_2 \tag{1.9}$$

(индексы i, j принимают значения y, z).

Рассмотрим более подробно рассеяние волны на флуктуациях ΔC с гауссовой функцией корреляции, анизотропной вдоль некоторого выделенного направления. Выберем оси y, z таким образом, чтобы ось анизотропии неоднородностей была параллельна плоскости xz. Нетрудно убедиться, что при этом спектр неоднородностей $B_{\varkappa h}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} B_{\varkappa h} = 8\pi^{3/2} l_\parallel l_\perp^2 \langle \Delta C^2 \rangle \exp[-(h\cos\alpha + \varkappa_z \sin\alpha)^2 l_\parallel^2 - \\ - \varkappa_y^2 l_\perp^2 - (\varkappa_z \cos\alpha - h\sin\alpha)^2 l_\perp^2], \end{aligned} \tag{1.10}$$

где α — угол между направлением анизотропии неоднородностей и осью x, $l_\parallel$ — масштаб корреляции флуктуаций вдоль направления анизотропии, $l_\perp$ — поперечный масштаб корреляции. Коэффициенты диффузии D_{ij} и декремент затухания когерентной компоненты волны удается найти в явном виде при выполнении условий

$$\begin{aligned} \omega C_0^{-1} l_\perp l_\parallel^{-1} (l_\perp^2 \cos^2\alpha + l_\parallel^2 \sin^2\alpha)^{1/2} \gg 1, \\ \omega C_0^{-1} l_\perp^{-1} l_\parallel^{-1} (l_\perp^2 \cos^2\alpha + l_\parallel^2 \sin^2\alpha)^{3/2} \gg 1, \end{aligned} \tag{1.11}$$

смысл которых обсуждается ниже. Соответствующие выражения имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\pi} \langle \Delta C^2 \rangle k_0^2 C_0^{-2} l_\parallel l_\perp (l_\perp^2 \cos^2\alpha + l_\parallel^2 \sin^2\alpha)^{-1/2}, \\ D_{zz} &= \sqrt{\pi} \langle \Delta C^2 \rangle k_0^2 (2C_0^2)^{-1} l_\parallel l_\perp (l_\perp^2 \cos^2\alpha + l_\parallel^2 \sin^2\alpha)^{-3/2}, \\ D_{yy} &= \sqrt{\pi} \langle \Delta C^2 \rangle k_0^2 (2C_0^2)^{-1} l_\parallel l_\perp^{-1} (l_\perp^2 \cos^2\alpha + l_\parallel^2 \sin^2\alpha)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $k_0=\omega/C_0$. Коэффициент диффузии D_{yz} при этом равен нулю в силу симметрии задачи относительно плоскости xz. Введем углы $\gamma=\varkappa_y/k_0$, $\delta=\varkappa_z/k_0$ и угловой спектр волны $N(\gamma, \delta)$. Тогда в малоугловом приближении эволюция $N(\gamma, \delta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial N(\gamma,\delta)}{\partial x}=D_{\gamma\gamma}\frac{\partial^2 N(\gamma,\delta)}{\partial\gamma^2}+D_{\delta\delta}\frac{\partial^2 N(\gamma,\delta)}{\partial\delta^2}, \tag{1.13}$$

где $D_{\gamma\gamma}=D_{yy}k_0^{-2}$, $D_{\delta\delta}=D_{zz}k_0^{-2}$ — угловые коэффициенты диффузии. Уравнение (1.13) может быть решено при произвольном начальном условии, но зачастую можно ограничиться рассмотрением дисперсии угловых уширений волны $\langle\gamma^2\rangle$, $\langle\delta^2\rangle$, для которых из (1.13) следует

$$\langle\gamma^2\rangle = 2D_{\gamma\gamma}x, \quad \langle\delta^2\rangle=2D_{\delta\delta}x. \tag{1.14}$$

Покажем теперь, как можно наглядно получить основные зависимости функций Γ, $D_{\gamma\gamma}$, $D_{\delta\delta}$ от параметров волны и неоднородностей. Введем масштабы корреляции неоднородностей в направлении распространения волны l_x и в поперечных направлениях l_y, l_z. Из наглядных геометрических соображений следует, что $l_y=l_\perp$, $l_z=(l_\perp^2\cos^2\alpha+l_\parallel^2\sin^2\alpha)^{1/2}$, $l_x=l_\perp l_\parallel(l_\perp^2\cos^2\alpha+l_\parallel^2\sin^2\alpha)^{-1/2}$. Чтобы получить выражение для Γ, рассмотрим случайный фазовый набег волнового фронта

$$\Delta\varphi=\frac{\omega}{C_0^2}\int_0^x \Delta C(x',y,z)\,dx'.$$

Предположим, что затухание когерентной компоненты волны обусловлено в основном фазовыми флуктуациями, которые при рассеянии на многих неоднородностях распределены по нормальному закону [6]. Тогда

$$\langle b(x)\rangle = b(0)\exp[-(1/2)\langle\Delta\varphi^2\rangle] = b(0)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{\omega^2}{2C_0^4}\int_0^x dx_1\int_0^x dx_2\langle\Delta C(x_1,y,z)\Delta C(x_2,y,z)\rangle\right].$$

При $x\gg l_x$ отсюда следует $\langle b(x)\rangle=b(0)\exp(-\Gamma x)$, где декремент $\Gamma\sim\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2}k_0^2 l_x$, что, как нетрудно видеть, соответствует (1.12). Чтобы получить основные зависимости для коэффициента диффузии $D_{\gamma\gamma}$, заметим, что в малоугловом приближении $\gamma=k_0^{-1}(\partial\Delta\varphi/\partial y)$ и, следовательно,

$$\langle\gamma^2\rangle=C_0^{-2}\int_0^x dx_1\int_0^x dx_2\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\langle\Delta C(x_1,y_1,z)\Delta C(x_2,y_2,z)\rangle.$$

На расстояниях $x\gg l_x$ отсюда следует, что $\langle\gamma^2\rangle\sim\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2}l_x l_y^{-2}x$, т. е. для $D_{\gamma\gamma}$ имеем $D_{\gamma\gamma}\sim\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2}l_x l_y^{-2}$ в полном соответствии с (1.12). Аналогично можно получить основные зависимости $D_{\delta\delta}$ от параметров задачи. Заметим также, что условия (1.11) могут быть записаны соответственно в виде $(k_0l_y)^{-1}\ll l_y l_x^{-1}$, $(k_0l_z)^{-1}\ll l_z l_x^{-1}$ и, таким образом, означают малость углов рассеяния по сравнению с коэффициентами эффективной анизотропии неоднородностей в направлении распространения волны.

Рассмотрим теперь зависимость эффектов затухания когерентной компоненты и уширения углового спектра волны от характера анизотропии флуктуаций показателя преломления. Прежде всего, отметим, что в случае изотропных неоднородностей ($l_\parallel = l_\perp$) коэффициенты диффузии равны $D_{\delta\delta}=D_{\gamma\gamma}=D$, а соответствующие выражения для Γ и D совпадают с известными [7]. При рассеянии на очень вытянутых неоднородностях ($l_\parallel \gg l_\perp$), как нетрудно видеть, основным условием применимости полученных выражений является $(k_0 l_y)^{-1} \ll l_y l_x^{-1}$. В том случае, когда волна распространяется под достаточно большими углами к оси анизотропии флуктуаций ($\alpha \gg l_\perp/l_\parallel$), из (1.12) имеем приближенные выражения

$$\Gamma=\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} k_0^2 l_\perp\, |\sin\alpha|^{-1},\ D_{\gamma\gamma}=(\sqrt{\pi}/2)\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\perp^{-1} |\sin\alpha|^{-1},$$

$$D_{\delta\delta}=(\sqrt{\pi}/2)\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\perp l_\parallel^{-2} |\sin\alpha|^{-3}.$$

При этом $D_{\delta\delta}/D_{\gamma\gamma}\sim l_\perp^2/l_\parallel^2 \ll 1$, т. е. уширение углового спектра волны в плоскости xz происходит существенно медленнее, чем в плоскости yx. При меньших значениях угла $\alpha (\alpha \leqslant l_\perp/l_\parallel)$ зависимость функций Γ, $D_{\gamma\gamma}$, $D_{\delta\delta}$ от параметрв неоднородностей является более сложной (см. (1.12), где $\cos\alpha\simeq 1$, $\sin\alpha\simeq\alpha$), однако при $\alpha \ll l_\perp/l_\parallel$ имеем простые выражения

$$\Gamma=\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} k_0^2 l_\parallel,\quad D_{\gamma\gamma}=D_{\delta\delta}=0{,}5\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\parallel\, l_\perp^{-2}.$$

Рассмотрим теперь случай рассеяния на очень сплюснутых неоднородностях ($l_\perp \gg l_\parallel$). Для всех значений угла α, не близких к $\pi/2$ (а именно, $|\pi/2-\alpha| \gg l_\parallel/l_\perp$), имеем следующие приближенные выражения:

$$\Gamma=\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} k_0^2 l_\parallel\, |\cos\alpha|^{-1},$$

$$D_{\gamma\gamma}=(1/2)\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\parallel\, l_\perp^{-2}\, |\cos\alpha|^{-1},$$

$$D_{\delta\delta}=(1/2)\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\parallel\, l_\perp^{-2} |\cos\alpha|^{-3}.$$

Отсюда видно, что дисперсии углового спектра $\langle\delta^2\rangle$ и $\langle\gamma^2\rangle$ сравнимы между собой по величине, а при $\alpha \ll 1$ имеем равномерное уширение $\langle\delta^2\rangle=\langle\gamma^2\rangle$. В противоположном случае почти нормального падения волны на неоднородности ($|\alpha-\pi/2| \ll l_\parallel/l_\perp$) из (1.12) следует: $\Gamma=\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} k_0^2 l_\perp$, $D_{\gamma\gamma}=(1/2)\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle C_0^{-2} l_\perp^{-1}$, $D_{\delta\delta}=(1/2)\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle\times \times C_0^{-2} l_\perp l_\parallel^{-2}$. При этом $D_{\delta\delta}/D_{\gamma\gamma}=l_\perp^2/l_\parallel^2 \gg 1$, т. е. уширение углового спектра в плоскости xz происходит существенно быстрее, чем в плоскости xy.

2. РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ В РЕФРАКЦИОННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Рассмотрим теперь многократное рассеяние на анизотропных флуктуациях показателя преломления волны, распространяющейся в рефракционном волноводе. Ограничимся при этом случаем плоского рефракционного волновода, т. е. будем считать, что в отсутствие флуктуаций фазовая скорость волны C_0 зависит только от z-координаты. В отличие от предыдущего раздела учтем также медленные временные изменения флуктуаций показателя преломления. Будем считать, что масштабы корреляции по x, y флуктуаций ΔC превышают длину волны, при этом можно пренебречь рассеянием назад. Определим комплексные амплитуды b_p нормальных мод, распространяющихся, например, вдоль оси x, согласно

$$\varphi_\omega = \sum_p k_p^{-1/2} b_p(x, y)\,\varphi_p(z)\exp(ik_p x), \tag{2.1}$$

где $\varphi_p(z)$ и k_p — соответственно собственные функции и собственные значения краевой задачи

$$d^2\varphi_p/dz^2 + (\omega^2/C_0^2(z) - k_p^2)\varphi_p = 0\,, \quad \varphi_p = 0|_{z=\pm\infty}\,. \tag{2.2}$$

В работе [5] было показано, что корреляционная функция огибающей $N_p(\rho, \tau, x) = \langle b_p(y, t, x)\, b_p^*\;(y+\rho, t+\tau, x)\rangle$ в приближении «рассеяния вперед» подчиняется уравнению

$$\frac{\partial N_p(\rho, \tau)}{\partial x} = \sum_{p_2} [W_{pp_2}(\rho, \tau)\, N_{p_2}(\rho, \tau) - W_{pp_2}(0, 0)\, N_p(\rho, \tau)], \tag{2.3}$$

а когерентная компонента $\langle b_p\rangle$ затухает с декрементом

$$\Gamma_p = \frac{1}{2}\sum_{p_2} W_{pp_2}(0, 0). \tag{2.4}$$

Выражение для вероятности перехода $W_{pp_2}(\rho, \tau)$ приведено в [5]. Предполагая неоднородности настолько крупномасштабными, что в каждом акте рассеяния взаимодействуют лишь близкие моды $\Delta p \equiv |p - p_2| \ll p_{cr}$, будем использовать [5] вместо (2.3) диффузионное уравнение

$$\frac{\partial N_p(\rho, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p}\left[D_p(\rho, \tau)\frac{\partial N_p(\rho, \tau)}{\partial p}\right] + F_p(\rho, \tau)\, N_p(\rho, \tau), \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} D_p(\rho, \tau) = \frac{1}{2}\sum_{p_2}(p_2 - p)^2 W_{pp_2}(\rho, \tau), \\ F_p(\rho, \tau) = \sum_{p_2}[W_{pp_2}(\rho, \tau) - W_{pp_2}(0, 0)]. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Рассмотрим подробнее практически наиболее интересную ситуацию, когда ось анизотропии флуктуаций показателя преломления перпендикулярна плоскости волновода. Отметим, что такой характер имеют, например, флуктуации температуры и плотности в океанических и атмосферных звуковых каналах. Рассмотрим гауссову функцию корреляции

$$\begin{gathered} \langle \Delta C(x, y, z, t)\,\Delta C(x_1, y_1, z_1, t_1)\rangle = \\ = \langle \Delta C^2\rangle \exp\left[-\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{4l_\perp^2} - \frac{(z - z_1)^2}{4l_\parallel^2} - \frac{(t - t_1)^2}{4T^2}\right] \end{gathered} \tag{2.7}$$

и рефракционные волноводы с произвольным степенным изменением регулярного показателя преломления

$$C_0^{-2}(z) = C_*^{-2} - \beta^2|z|^s, \quad |z| \leqslant H; \quad C_0(z) = C(H), \quad |z| > H, \tag{2.8}$$

где s — произвольное положительное число. Используя для $W_{pp_2}(\rho, \tau)$ выражение, полученное в работе [5], можно найти в явном виде при $p \gg 1$ функции Γ_p, D_p и F_p:

$$\Gamma_m = \sqrt{\pi}\,\omega_0^2\,\langle \Delta C^2\rangle\, C_*^{-4}\, l_\perp \left(1 + \frac{l_\perp^2\,\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{s}; \frac{1}{2}+\frac{1}{s}; \frac{1}{1+(l_\parallel/(l_\perp\theta_m))^2}\right); \tag{2.9}$$

$$D_m = \frac{\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle l_\perp (1+2/s)\theta_m^{4/s}}{2C_*^2 l_\parallel^2 \theta_{cr}^{2+4/s}}\left(1+\frac{l_\perp^2\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)\times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{s}; \frac{3}{2}+\frac{1}{s}; \frac{1}{1+(l_\parallel/(l_\perp\theta_m))^2}\right); \tag{2.10}$$

$$F_m = 2\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle l_\perp C_*^{-4}\left(1+\frac{l_\perp^2\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)-1\right]{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{s}; \frac{1}{2}+\frac{1}{s}; \frac{1}{1+(l_\parallel/(l_\perp\theta_m))^2}\right). \tag{2.11}$$

Здесь $m=p/p_{cr}$ — номер моды, отнесенный к полному числу мод p_{cr}, локализованных в волноводе, $\theta_{cr}=2[C(H)-C(0)]^{1/2}/[2C(0)]^{1/2}$ — критический угол волновода, $\theta_m=\theta_{cr}ms/^{(s+2)}$, ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция. При получении выражений (2.9)—(2.11) предполагалось, что число Δp взаимодействующих в каждом акте рассеяния мод удовлетворяет условию $1\ll\Delta p\ll p_{cr}$, а также что $\theta_{cr}\ll 1$ (последнее условие хорошо выполняется в реальных волноводах). Важно отметить, что выражения (2.9)—(2.11) справедливы при произвольном соотношении между масштабами корреляции $l_\parallel$, $l_\perp$ и, таким образом, позволяют исследовать зависимость эффектов рассеяния волны от характера анизотропии флуктуаций.

Рассмотрим вначале наиболее простой случай волновода с профилем $C_0(z)=C_*$ при $|z|<H$, $C_0(z)=C(H)$ при $|z|\geqslant H$. Соответствующие выражения для функций Γ_m, D_m, F_m могут быть получены путем предельного перехода $s\to\infty$ в формулах (2.9)—(2.11) и имеют вид

$$\Gamma_m = \sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle C_*^{-4} l_\perp\left(1+\frac{l_\perp^2\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-1/2},$$

$$D_m = \frac{\sqrt{\pi}\langle\Delta C^2\rangle l_\perp}{2C_*^2 l_\parallel^2\theta_{cr}^2}\left(1+\frac{l_\perp^2\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right), \tag{2.12}$$

$$F_m = 2\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle C_*^{-4} l_\perp\left(1+\frac{l_\perp^2\theta_m^2}{l_\parallel^2}\right)^{-1/2}\left[\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)-1\right].$$

В этом случае величина $\theta_m=\theta_{cr}m$, очевидно, имеет смысл угла наклона к плоскости xy волнового вектора бриллюэновской волны, соответствующей нормальной моде с номером m. Из выражений (2.12) видно, что характер рассеяния существенно зависит от соотношения угла наклона волны Бриллюэна и коэффициента анизотропии неоднородностей $l_\parallel/l_\perp$. Если $l_\parallel/l_\perp\gg\theta_m$ (т. е. неоднородности вытянуты, либо изотропны, либо умеренно сплюснуты), то функции Γ_m, D_m, F_m слабо зависят от угла θ_m (и тем самым от номера моды). При этом, как следует из условий резонанса, характер рассеяния определяется вертикальным масштабом флуктуаций $l_\parallel$. В случае сильно сплюснутых неоднородностей ($l_\parallel/l_\perp\ll\theta_m$) функции Γ_m, D_m, F_m существенно зависят от угла θ_m. Рассеяние нормальных мод определяется в этом случае масштабом $l_\perp$ и зависит от номера моды. Отметим также, что если ввести коэффициент диффузии D_θ по вертикальному углу θ_m, то выражение (2.12) для D_θ совпадает с выражением для $D_{\delta\delta}$ при $|\alpha-\pi/2|\ll 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению волноводов с произвольными конечными значениями s. В этом случае вертикальное волновое число нормальной моды зависит от z, но тем не менее моду удобно характеризовать углом наклона к оси волновода при $z=0$ одной из волн Бриллюэна, суперпозиция которых соответствует (в приближении ВКБ) данной моде. Нетрудно показать, что именно этот смысл имеет величина θ_m, фигурирующая в (2.9)—(2.11). Используя формулы линейного преобразования и асимптотического разложения гиперфункций ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$, можно получить простые выражения для Γ_m, D_m и F_m при $l_\parallel/l_\perp\gg\theta_m$ и при $l_\parallel/l_\perp\ll\theta_m$. В случае сильно сплюснутых по вертикали неоднородностей $(l_\parallel/l_\perp\ll\theta_m)$ из (2.9)—(2.11) имеем

$$\Gamma_m=\frac{\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle\, l_\parallel}{B(1/2,1/s)\,C_*^4\,\theta_m}\left[2\ln\left(\frac{l_\perp\theta_m}{l_\parallel}\right)+2\Psi(1)-\Psi(1/s)-\Psi(1/2)\right],$$

$$D_m=\frac{\sqrt{\pi}\,\langle\Delta C^2\rangle\, l_\parallel\,\theta_m^{4/s-3}\,(1+2/s)}{2B(3/2,1/s)\,C_*^2\,l_\perp^2\,\theta_{cr}^{4/s+2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)\times$$

$$\times\left[2\ln(l_\perp\theta_m/l_\parallel)+2\Psi(1)-\Psi(1/s)\right], \qquad (2.13)$$

$$F_m=\frac{2\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle\, l_\parallel}{B(1/2,1/s)\,C_*^4\,\theta_m}\left[\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)-1\right]\times$$

$$\times\left[2\ln(l_\perp\theta_m/l_\parallel)+2\Psi(1)-\Psi(1/s)-\Psi(1/2)\right],$$

где $B(\alpha,\beta)$ и $\Psi(x)$ — соответственно бета- и пси-функции. В случае вытянутых, либо изотропных, либо умеренно сплюснутых неоднородностей $(l_\parallel/l_\perp\gg\theta_m)$ имеем

$$\Gamma_m=\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle\, C_*^{-4}\, l_\perp\left[1-\frac{s}{2s+4}\left(\frac{l_\perp\theta_m}{l_\parallel}\right)^2\right],$$

$$D_m=\frac{\sqrt{\pi}\,\langle\Delta C^2\rangle\, l_\perp\,(1+2/s)\,\theta_m^{4/s}}{2C_*^2\,l_\parallel^2\,\theta_{cr}^{(4/s)+2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)\times$$

$$\times\left[1-\frac{9s}{6s+4}\left(\frac{l_\perp\theta_m}{l_\parallel}\right)^2\right], \qquad (2.14)$$

$$F_m=2\sqrt{\pi}\,\omega_0^2\langle\Delta C^2\rangle\, C_*^{-4}\, l_\perp\left[\exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_\perp^2}-\frac{\tau^2}{4T^2}\right)-1\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{s}{2s+4}\left(\frac{l_\perp\theta_m}{l_\parallel}\right)^2\right].$$

Отметим, что без учета поправок порядка $\theta_m l_\perp/l_\parallel$ формулы (2.14) были получены в работе [5]. Из полученных выражений видно, что в случае волноводов с произвольными степенными изменениями $C_0(z)$ рассеяние на сильно сплюснутых неоднородностях существенно отличается от рассеяния на неоднородностях с другим характером анизотронии. Так, например, декремент Γ_m при $l_\parallel/l_\perp \ll \theta_m$ слабо зависит от номера моды m и типа волновода (индекса профиля s), а при $l_\parallel/l_\perp \ll \theta_m$ зависимость Γ_m от m и s весьма существенна.

Диффузионное уравнение для функции когерентности (2.5) может быть решено аналитически при произвольных значениях индекса профиля s в случае $l_\parallel/l_\perp \gg \theta_{cr}$. Соответствующее решение приведено в работе [5]. Если $l_\parallel/l_\perp \lesssim \theta_{cr}$, то аналитическое решение получить не удается из-за сложной зависимости функций D_m, F_m от номера моды m. Однако, уравнение (2.5) имеет простое приближенное решение при произвольном характере анизотропии флуктуаций, если временной масштаб корреляции волны превышает T, а масштаб корреляции волны по y, соответственно, больше $l_\perp$. В этом случае, при достаточно плавном распределении $N_m(\rho,\tau)$ по номерам мод, в правой части уравнения (2.5) можно пренебречь диффузионным членом, и тогда имеем простое решение

$$N_m(\rho,\tau,x) = N_m(\rho,\tau,0)\exp[F_m(\rho,\tau)x], \qquad (2.15)$$

позволяющее проследить зависимость изменения корреляционных функций нормальных мод от характера анизотропии флуктуаций, параметров волновода и номера моды m. Приведенные результаты можно обобщить на случай неоднородного по y, а также нестационарного процессов рассеяния. Например, если при $x=0$ задается волновой пакет с параметрами, плавно зависящими от y, то для медленных амплитуд b_p можно ввести поперечную функцию корреляции $\langle b_p(y_1,t,x)b_p(y_2,t+\tau,x)\rangle \equiv N_p(R,\rho,\tau,x)$, где $R=(1/2)(y_1+y_2)$, $\rho=y_1-y_2$. Для функции $N_p(R,\rho,\tau,x)$ имеем вместо (2.5) уравнение

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} - \frac{i}{k_m}\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial\rho}N_m = \frac{\partial}{\partial m}\left(D_m\frac{\partial N_m}{\partial m}\right) + F_m N_m. \qquad (2.16)$$

Здесь $k_m \equiv k_p$, а для функций D_m, F_m имеем прежние выражения (2.10), (2.11). В том случае, если диффузионным членом в правой части этого уравнения можно пренебречь (см. выше), оно может быть решено после фурье-преобразования по R методом характеристик. Соответствующее решение по аналогии с безграничной средой [6] может быть записано в виде

$$N_m(R,\rho,\tau,x) = \int dq\, N_m^0\left(q,\rho - q\frac{x}{k_m},\tau\right)\times$$
$$\times\exp\left[iqR + \int_0^x d\xi\, F_m\left(\rho - q\frac{\xi}{k_m},\tau\right)\right], \qquad (2.17)$$

где $N_m^0(q,\rho,\tau)$ — фурье-преобразование по R функции когерентности при $x=0$.

Соответствующее уравнение для $\langle b_p\rangle$ имеет вид

$$\frac{\partial\langle b_m\rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k_m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\langle b_m\rangle = -\Gamma_m\langle b_m\rangle \qquad (2.18)$$

и легко решается:

$$b_m(y,x) = \int b_m^0(q)\exp\left[-i\frac{q^2}{2k_m}x - \Gamma_m x + iqy\right]dq, \qquad (2.19)$$

где b_m^0 — фурье-преобразование начального распределения $b_m(y,0)$.

Поскольку мы рассматривали рассеяние волны на крупномасштабных неоднородностях, интересно сравнить полученные результаты с результатами, получаемыми путем рассмотрения броуновского движения лучей в волноводе. Проведем такое сравнение между диффузией интенсивности волны по нормальным модам $N_m(0,0)$, которая описывается уравнением (2.5) при $\tau=0$, $\rho=0$, и диффузией углового распределения лучевой интенсивности, усредненной по циклам лучей в волноводе. Введем вертикальный угол $\theta(z)$ наклона луча к оси x, который для рассматриваемых волноводов меняется по закону $\theta(z)=\theta(0)[1-(z/z_п)^s]^{1/2}$, где $z_п$ — координата точки заворота луча. Рассмотрим среднеквадратичное отклонение луча, обусловленное статистическими флуктуациями $\Delta C(x,y,z)$ с корреляционной функцией (2.7), где следует положить $T=\infty$, при изменении лучевой координаты L. Из-за флуктуаций ΔC луч при прохождении участка траектории $(L, L+\Delta L)$ отклоняется на угол $\Delta\theta(L)=\partial/\partial z[\Delta C(L)/C_0(L)]\Delta L$. Это приводит к эффективному изменению угла наклона луча θ^* на оси симметрии волновода (т. е. при $z=0$) $\Delta\theta^*=\Delta\theta(L)d\theta^*/d\theta(L)$. Учитывая, что для рассматриваемых нами волноводов $d\theta^*/d\theta(L)=\theta(L)/\theta^*$, получим для отклонения луча на длине цикла $\tilde{L}$ величину

$$\Delta\theta^*_{\tilde{L}} = \int\limits_0^{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Delta C(L)}{C_0(L)}\right]\frac{\theta(L)}{\theta^*}dL. \tag{2.20}$$

Отсюда для дисперсии отклонения луча на длине лучевого цикла в волноводе $\langle(\Delta\theta^*_{\tilde{L}})^2\rangle$ имеем

$$\langle(\Delta\theta^*_{\tilde{L}})^2\rangle = \int\limits_0^{\tilde{L}} dL_1 \int\limits_0^{\tilde{L}} dL_2\, \frac{\theta(L_1)\,\theta(L_2)}{(\theta^*)^2}\,\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{\partial}{\partial z_2}\left\langle\frac{\Delta C(L_1)}{C_0(L_1)}\,\frac{\Delta C(L_2)}{C_0(L_2)}\right\rangle, \tag{2.21}$$

где $z(L)$ — вертикальная координата, определяемая вдоль траектории невозмущенного луча. Предполагая, что на цикле $\tilde{L}$ луч проходит через много неоднородностей, а также, что на масштабе корреляции неоднородностей луч можно считать локально прямым, получим из (2.21) после перехода к координатам $L_+=(L_1+L_2)/2$, $L_-=L_1-L_2$ выражение

$$\langle(\Delta\theta^*_{\tilde{L}})^2\rangle = \int\limits_0^{\tilde{L}} dL_+\,\frac{\theta^2(L_+)}{(\theta^*)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dL_-\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{B}{C_0^2(z)}\right], \tag{2.22}$$

где B — корреляционная функция флуктуаций.

При диффузионном законе уширения угла наклона луча θ^* имеем $\langle(\Delta\theta^*)^2\rangle=2D_\theta^* x$ и, таким образом, коэффициент диффузии $D_\theta^*=\langle(\Delta\theta^*_{\tilde{L}})^2\rangle/(2x_{\tilde{L}})$, где $x_{\tilde{L}}$ — период по x осцилляций луча в волноводе. Проводя конкретные расчеты для класса волноводов (2.8) и корреляционной функции флуктуаций (2.7), получим для D_θ^* выражение

$$D_\theta^* = \frac{\sqrt{\pi}\,\langle\Delta C^2\rangle\, l_\perp}{2C_*^2 l_\parallel^2\,(1+2s^{-1})}\left(1+\frac{l_\perp^2(\theta^*)^2}{l_\parallel^2}\right)^{-3/2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2},\frac{1}{s};\frac{3}{2}+\frac{1}{s};\frac{1}{1+(l_\parallel/(l_\perp\theta^*))^2}\right). \tag{2.23}$$

Отметим, что попытка усреднения коэффициента диффузии Чернова по циклу луча была предпринята в [8], однако в этой работе авторы не учитывали важный фактор изменения сечения лучевой трубки $d\theta^*/d\theta(L)$, что приводит к неправильным результатам.

Введем теперь вместо распределения интенсивности по модам $N_m(0, 0)$ распределение по углу наклона θ_m волны Бриллюэна к оси волновода $n_\theta = N_m(0, 0)\, dm/d\theta_m$. Очевидно, что по определению угол θ_m аналогичен углу наклона луча θ^*. Для распределения n_θ из (2.5) следует уравнение

$$\frac{\partial n_\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_\theta \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta n_\theta), \tag{2.24}$$

где $d_\theta = D_m(0, 0)\,(d\theta_m/dm)^2$, $a_\theta = D_m(0, 0)\, d^2\theta_m/dm^2$. Нетрудно убедиться, что коэффициент диффузии d_θ тождественно совпадает с коэффициентом диффузии $\overset{*}{D_\theta}$, если угол $\theta_m \equiv \theta$ отождествить с углом θ^*. Таким образом, оба подхода дают одно и то же значение коэффициента диффузии интенсивности волны. В случае идеального волновода из (2.24) следует, что при больших x устанавливается стационарное распределение угловой интенсивности $n_\theta \sim dm(\theta)/d\theta$. Таким образом, диффузия лучей в рефракционном волноводе происходит существенно иначе, чем в безграничной среде, где асимптотически реализуется изотропное распределение лучевой интенсивности $n_\theta = \text{const}$ [7]

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов Н. Г. — Изв. вузов — Радиофизика. 1960, 3, № 4, с. 619.
2. Bowhill S. A. — J. Atm. Terr. Phys., 1961, 20, p. 9.
3. Bramley E. N. — J. Atm. Terr. Phys., 1977, 39, p. 367.
4. Ерухимов Л. М., Шпиро П. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 443.
5. Артельный В. В., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 9, с. 1142
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику Ч 2 — М.: Наука, 1978.
7. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975
8. Mellen R. H., Browning D. G., Goodman L. — J. Acoust. Soc. Am., 1976, 60, № 5, p. 1053.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
5 марта 1984 г.

ON MULTIPLE WAVE SCATTERING BY ANISOTROPIC FLUCTUATIONS OF THE REFRACTIVE INDEX IN THE UNBOUNDED MEDIUM AND IN REFRACTIVE WAVEGUIDES

V. V. Artel'nyj, M. A. Raevskij

The multiple wave scattering by large-scale fluctuations of the refractive index with an arbitrary anisotropic character is studied. The wave scattering in the unbounded medium and refractive waveguides is considered. The attenuation of the coherent wave component, its angular spectrum broadening and the variation in the transverse correlation function depending on the character of the anisotropy of the fluctuations and the parameters of the wave are analysed