

УДК 535 312

ЭФФЕКТ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин

Разработан метод асимптотического решения нестационарного уравнения переноса излучения с учетом запаздывания во времени или памяти. Метод применен к исследованию эволюции волнового пакета в неограниченной рассеивающей среде, состоящей из крупномасштабных оптически жестких рассеивателей. Показано, что при больших значениях отношения времени наблюдения к времени свободного пробега луча поле усредненного по ансамблю вектора потока энергии пакета состоит из двух различных составляющих—потенциальной и вихревой.

В работах [1,2] был предложен подход к рассмотрению на основе уравнений нестационарной геометрической оптики [3] многократного рассеяния волнового пакета в дискретной случайно-неоднородной среде, состоящей из сферически симметричных рассеивателей малой плотности. Предполагалось, что каждый рассеиватель имеет слабонеоднородный в масштабе длин волн пакета показатель преломления и действует на лучи как рассеивающая сферическая линза. Было показано, что на ограниченном промежутке «медленного» времени, равного отношению времени наблюдения к времени свободного пробега луча, функция распределения фазовых переменных луча—его координаты и волнового вектора,—усредненная по ансамблю конфигураций рассеивателей, удовлетворяет обычному уравнению переноса излучения [4]. В частности, для оптически жестких рассеивателей индикатриса рассеяния элементарного объема среды изотропна [2]. Переход к уравнению переноса физически эквивалентен пренебрежению всеми процессами повторного рассеяния луча на одном и том же рассеивателе. Однако, как сейчас выясняется, именно такие процессы должны определять правильное асимптотическое поведение нестационарного излучения на бесконечности по медленному времени. Частично это положение было проверено в [5], где было показано, что автокорреляционная функция единичного вектора направления луча убывает со временем вследствие изотропизации излучения в рассеивающей среде не по экспоненциальному закону, как предписывается обычной теорией переноса, а по степенному. В настоящей работе высказанное положение подтверждается при решении более сложной задачи об асимптотическом поведении потока энергии волнового пакета.

1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исходим из полученного в [5] уравнения переноса с запаздыванием для усредненной по ансамблю функции распределения фазовых переменных луча

$$\begin{aligned} \left[\partial/\partial t + c_g(k) s (\partial/\partial r) - \rho \int d^3 r_1 \hat{T}_{r_1} \right] f(r, ks, t) = \\ = \rho \int_0^t dt' \hat{R}(t') f(r, ks, t - t'), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\hat{R}(t) = \int d^3 r_1 \hat{T}_{r_1} \hat{G}(t) \hat{T}_{r_1}. \quad (2)$$

Здесь $c_g(k)$ — групповая скорость волн в однородной среде; $s = k/k$ — единичный вектор в направлении волнового вектора k ; всюду далее ds — элемент телесного угла, $d^3 k = k^2 dk ds$. Входящий в (1), (2) оператор столкновения луча с изолированным рассеивателем $\hat{T}_{r_1}$ введен в [2]. Для рассматриваемого нами случая оптически жестких рассеивателей этот оператор действует согласно [5] следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{r_1} f(r, ks) = a^2 c_g(k) \int_{|\sigma|=1} d\sigma (\sigma\sigma) \theta(\sigma\sigma) [\delta(r - r_1 - a\sigma) \times \\ \times f(r, ks - 2k\sigma(\sigma\sigma)) - \delta(r - r_1 + a\sigma) f(r, ks)], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta(x) = 1$, $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$, $x < 0$. При замене правой части уравнения (1) нулем получим обычное уравнение переноса излучения с изотропной индикатрисой рассеяния. В этом нетрудно убедиться, если подставить (3) в левую часть (1), выполнить интегрирование по r_1 , а в оставшемся выражении заменить переменную интегрирования σ на $s' = s - 2\sigma(\sigma\sigma)$, $|\sigma'| = 1$ с учетом $ds' = 4\theta(\sigma\sigma)(\sigma\sigma) d\sigma$. Равенство (2), в которое входит оператор Грина $\hat{G}(t)$ обычного уравнения переноса, определяет приближенное значение оператора запаздывания $\hat{R}(t)$, называемого «кольцевым», так как с его помощью учитываются все процессы с одним повторным отражением луча от рассеивателя. Можно показать, что приближенное уравнение (1) дает правильную временную асимптотику [6] функции распределения $f(r, ks, t)$, но с коэффициентами, выражения для которых справедливы при условии низкой плотности ρ рассеивателей, $\alpha = \rho a^3 \ll 1$, где a — радиус рассеивателя.

Плотность потока энергии волнового пакета, усредненная по ансамблю, вычисляется по формуле [3]

$$\Pi(r, t) = \int d^3 k c_g(k) s f(r, ks, t). \quad (4)$$

Начальную функцию распределения выбираем в виде (о более общем начальном условии см. ниже)

$$f(r, ks, 0) = f^{(0)}(r, ks) = I(r) k_0^{-2} \delta(k - k_0) \delta^{(2)}(s - s_0). \quad (5)$$

Здесь s_0 — единичный вектор, указывающий направление начального потока энергии

$$\Pi^{(0)}(r) = s_0 c_g I(r), \quad c_g = c_g(k_0),$$

$I(r)$ — интенсивность излучения при $t = 0$. Считается, что функция $I(r)$ практически исчезает вне некоторой ограниченной области, внутри же медленно меняется в масштабе длины свободного пробега луча:

$$\int d^3 r I(r) = (4\pi/3) r_0^3 I(0), \quad I(r) \approx 0, \quad r > r_0, \quad (6)$$

$$|\nabla I(r)/I(r)| \leq r_0^{-1} \ll \rho a^2.$$

Для дальнейшего нам необходимо отметить некоторые особенности решения обычного уравнения переноса излучения и соответствующей ему асимптотики диффузионного потока энергии волнового пакета.

2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Представим решение уравнения (1) с начальным условием (4) в виде

$$f(\mathbf{r}, k\mathbf{s}, t) = k_0^{-2} \delta(k - k_0) f(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t),$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0) = f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = I(\mathbf{r}) \delta^{(2)}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0). \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые особенности уравнения переноса*, которое, как сказано выше, совпадает с (1), если в последнем пренебречь правой частью. Это уравнение после преобразования Фурье—Лапласа

$$f_{\xi, \omega}(\mathbf{s}) = \int_0^\infty dt \int d^3 r \exp(-z_0 \omega t - i\kappa_0 \xi \mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \quad (8)$$

принимает согласно (1), (3) и (7) следующую безразмерную форму:

$$(\omega + i\xi \mathbf{s} + \hat{P}_\perp) f_{\xi, \omega}(\mathbf{s}) = z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(\mathbf{s}). \quad (9)$$

Здесь $f_{\xi}^{(0)}(\mathbf{s})$ — фурье-образ начального условия $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, величины κ_0 и z_0 представляют собой характерные релаксационные константы для системы низкой плотности,

$$\kappa_0 = \pi \rho a^2, \quad z_0 = \pi \rho a^2 c_g. \quad (10)$$

Оператор $\hat{P}_\perp = 1 - \hat{P}$, а действие $\hat{P}$ состоит в усреднении по направлениям волнового вектора

$$\hat{P} f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (4\pi)^{-1} \int d\mathbf{s}' f(\mathbf{r}, \mathbf{s}') = \bar{f}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$$\hat{P}_\perp f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) - \bar{f}(\mathbf{r}) = \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{s}).$$

Эти операторы появляются в уравнении (9) в результате преобразования, описанного в замечании после формулы (3).

Введем оператор

$$\hat{G}_{\xi, \omega} = (\omega + i\xi \mathbf{s} + \hat{P}_\perp)^{-1} \quad (12)$$

и с его помощью запишем решение уравнения (9):

$$f_{\xi, \omega}(\mathbf{s}) = z_0^{-1} \hat{G}_{\xi, \omega} f_{\xi}^{(0)}(\mathbf{s}). \quad (13)$$

Нетрудно понять, что $\hat{G}_{\xi, \omega}$, как и $\hat{P}$, действует в пространстве функций $f(\mathbf{s})$ от единичных векторов $\mathbf{s}$ и представляет собой преобразование Фурье—Лапласа от оператора Грина уравнения переноса. Из (9) и (11) следует явное выражение

$$\hat{G}_{\xi, \omega} = (1 + \omega + i\xi \mathbf{s})^{-1} [1 + \varphi(\xi, \omega) \hat{P} (1 + \omega + i\xi \mathbf{s})^{-1}], \quad (14)$$

$$\varphi(\xi, \omega) = \left[1 - \frac{1}{2\xi} \ln \left(\frac{1 + \omega + i\xi}{1 + \omega - i\xi} \right) \right]^{-1}.$$

* Подробное обсуждение уравнения переноса с изотропной индикатрисой рассеяния можно найти, например, в [4].

Функция $\ln z$ определена на комплексной плоскости z с разрезом вдоль полуоси $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0$ так, что $\operatorname{Im}(\ln z) = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0$. Согласно (14) функция $\psi_{\xi, \omega}(s)$, возникающая в результате действия оператора $\hat{G}_{\xi, \omega}$ на достаточно произвольную функцию единичного вектора $\psi(s)$, т.е. $\psi_{\xi, \omega}(s) = \hat{G}_{\xi, \omega} \psi(s)$, на плоскости комплексной переменной $\omega = u + iv$ обладает следующими особенностями:

1) меняется скачком при переходе через отрезок

$$\omega = -1 + iv, \quad |v| \leq 1, \quad (15)$$

и на этом же отрезке имеет полюс первого порядка;

2) при $0 \leq \xi < \pi/2$ имеет полюс первого порядка на действительной оси в точке

$$\omega = u_0(\xi), \quad u_0(\xi) = -1 + \xi/\operatorname{tg} \xi \approx -\xi^2/3, \quad (16)$$

где приближенное равенство отвечает $\xi \ll 1$.

В соответствии с такой классификацией особенностей $\hat{G}_{\xi, \omega}$ представим обратное преобразование Фурье—Лапласа решения (13) в виде суммы

$$f(\mathbf{r}, s, t) = -iz_0 \kappa_0^3 (2\pi)^4 \int d^3 \xi \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega f_{\xi, \omega}(s) \times \\ \times \exp(i\kappa_0 \xi \mathbf{r} + z_0 \omega t) = f^{(1)}(\mathbf{r}, s, t) + f^{(2)}(\mathbf{r}, s, t) \quad (17)$$

и рассмотрим поведение $f(\mathbf{r}, s, t)$ при временах $t \gg z_0^{-1}$. Слагаемое $f^{(1)}$ из правой части (17) содержит вклад в интеграл по ω от первой группы особенностей; согласно (15) оно ведет себя как

$$f^{(1)}(\mathbf{r}, s, t) \sim \exp(-z_0 t). \quad (18)$$

Второе слагаемое из (17) определяется «диффузионным» полюсом (16). Начальное распределение (7) представляет собой плавную функцию пространственных переменных (6); поэтому его фурье-образ подчиняется условию

$$f_{\xi}^{(0)}(s) \neq 0 \quad \text{при } \xi \leq (\kappa_0 r_0)^{-1} \ll 1, \quad (19)$$

которое ограничивает область интегрирования по ξ в (17). Учитывая это обстоятельство, находим

$$f^{(2)}(\mathbf{r}, s, t) \approx (\kappa_0/2\pi)^3 \int d^3 \xi \exp(i\kappa_0 \xi \mathbf{r} - (1/3) z_0 \xi^2 t) \times \\ \times (1 + i\xi s)^{-1} \hat{P} (1 + i\xi s)^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s). \quad (20)$$

Легко проверить, что $f^{(2)}$ удовлетворяет уравнению диффузии

$$(\partial/\partial t - D_0 \Delta) f^{(2)}(\mathbf{r}, s, t) = 0 \quad (21)$$

с коэффициентом

$$D_0 = z_0/3\kappa_0^2 = c_g/3\pi r a^2, \quad (22)$$

а при $t \rightarrow \infty$ ее изотропная $\hat{P} f^{(2)}$ и неизотропная $\hat{P}_{\perp} f^{(2)}$ компоненты убывают соответственно как $t^{-3/2}$ и $t^{-5/2}$. Итак, функция $f^{(1)}(\mathbf{r}, s, t)$ описывает быстрые, экспоненциально затухающие (18) процессы

расплывания и изотропизации волнового пакета, приводящие к возникновению локально однородного и изотропного по s состояния: дальнейшая эволюция этого состояния подчиняется уравнению диффузии и описывается функцией $f \approx f^{(2)}$.

Для того чтобы найти временную асимптотику плотности потока энергии, подставим (20) и (7) в (4), заменим переменную интегрирования ξ на $y = \xi \sqrt{z_0 t}/3$ и разложим получившееся подынтегральное выражение по параметру $(z_0 t)^{-1} \ll 1$, полагая

$$r^2, r_0^2 \ll z_0 t / \kappa_0^2 \sim D_0 t. \quad (23)$$

После этого простое вычисление с учетом (6) дает

$$\Pi_{(\text{лиф})}(r, t) = \frac{\kappa_0 c_g I(0)}{36 \sqrt{\pi}} (\kappa_0 r_0)^3 \left(\frac{3}{z_0 t} \right)^{5/2} (r - \langle r \rangle - s_0 / \kappa_0). \quad (24)$$

Здесь введен вектор

$$\langle r \rangle = \int d^3 r' r' I(r') / \int d^3 r' I(r'), \quad (25)$$

определяющий положение энергетического центра волнового пакета.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С «КОЛЬЦЕВЫМ» ОПЕРАТОРОМ

Преобразование (7), (8) приводит уравнение (1) к следующему виду:

$$(\omega + i\xi s + \hat{P}_\perp - \hat{R}_{\xi, \omega}) f_{\xi, \omega}(s) = z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s), \quad (26)$$

где $\hat{R}_{\xi, \omega}$ — преобразованный «кольцевой» оператор,

$$\hat{R}_{\xi, \omega} = \frac{\pi \alpha^2}{(2\pi)^3} \int d^3 \xi' \hat{T}_{-\alpha \xi'} \hat{G}_{\xi + \xi', \omega} \hat{T}_{\alpha \xi'}, \quad (27)$$

α — параметр упаковки рассеивателей, а $\hat{T}_\xi$ — безразмерная форма фурье-образа оператора столкновений (3),

$$\hat{T}_\xi f(s) = \pi^{-1} \int_{|\sigma|=1} d\sigma (s\sigma) \exp(-i\xi\sigma) f(s - 2\sigma(s\sigma)\theta(s\sigma)). \quad (28)$$

Заметим, что при $\xi = 0$ оператор $\hat{T}_0 = -\hat{P}_\perp$.

Поведение функции $f(r, s, t)$ на больших временах определяется, как известно, теми особенностями—полюсами и скачками—ее преобразования Лапласа, которые расположены в левой полуплоскости $\omega = u + iv$, $u \leq 0$ ближе остальных к мнимой оси $u = 0$; в правой полуплоскости $u > 0$ таких особенностей вообще нет. Поэтому рассмотрим решение уравнения (26) в полосе

$$u \leq 0, \quad |u| \ll 1, \quad (29)$$

считая в соответствии с (19), что и $\xi \ll 1$. В случае обычного уравнения переноса в эту область попадал только «диффузионный» полюс (16) при достаточно малых ξ . Учет зависящего от переменной ω «кольцевого» оператора $\hat{R}_{\xi, \omega}$ существенно меняет ситуацию: у $f_{\xi, \omega}(s)$ появляется отличный от нуля конечный скачок

$$\Delta f_u = (1/2i) (f_{u+i0} - f_{u-i0}) \quad (30)$$

на действительной оси, который имеет в точке $u \approx -\xi^2/3$ острый максимум.

Для того, чтобы это показать, рассмотрим сначала функцию $\psi_{\xi,\omega}(s) = \hat{R}_{\xi,\omega} \psi(s)$. Входящий в подынтегральное выражение (27) оператор $\hat{G}_{\xi,\omega}$ (14) содержит множитель $\varphi(\xi, \omega) \sim (\omega + \xi^2/3)^{-1}$ при $\xi \ll 1$, имеющий полюс на действительной оси. Поэтому согласно (30) и (14) при $|u| \rightarrow 0$

$$\Delta \hat{G}_{\xi,u} = -\pi \delta(u + \xi^2/3) (1 + i\xi s)^{-1} \hat{P} (1 + i\xi s)^{-1}. \quad (31)$$

Если заменить оператор $\hat{G}_{\xi,\omega}$ в правой части (27) на $\Delta \hat{G}_{\xi,u}$ и подействовать полученным оператором $\Delta \hat{R}_{\xi,u}$ на $\psi(s)$, то результатом будет функция $\Delta \psi_{\xi,u}(s)$ — скачок $\psi_{\xi,\omega}(s)$ на действительной оси. Простой расчет дает следующее выражение для асимптотики $\Delta \psi_{\xi,u}(s)$ при $|u| \rightarrow 0$:

$$\Delta \psi_{\xi,u}(s) = \Delta \hat{R}_{\xi,u} \psi(s) \approx \gamma \sum_{j=1}^3 s_j \hat{P} s_j \psi(s), \quad \gamma = \theta(-u) \alpha^2 |3u|^{3/2}/4, \quad (32)$$

где суммирование идет по проекциям единичного вектора s , а в коэффициенте при $|u|^{3/2}$ сохранен только первый член разложения по малому параметру задачи α . Итак, функция $\psi_{\xi,\omega}(s)$ скачком меняется при переходе через действительную ось, но выше и ниже нее в полосе (29) является в силу свойств оператора $\hat{G}_{\xi,\omega}$ аналитической функцией ω . Используя это обстоятельство, можно показать, что решение уравнения (26) для $\omega = u + i\nu$ из области (29) не имеет никаких особенностей при конечных значениях $|v|$, а оператор $\hat{R}_{\xi,\omega}$ представляет собой малое по α и аналитическое по ω возмущение левой части уравнения переноса (9).

В непосредственной близости к действительной оси $|v| \ll 1$ вид уравнения зависит от знака v :

$$(\omega + i\xi s + \hat{P}_\perp - \text{Re} \hat{R}_{\xi,u} - i(v/|v|) \Delta \hat{R}_{\xi,u}) f_{\xi,\omega}(s) = z_0^{-1} f_\xi^{(0)}(s). \quad (33)$$

Здесь $\text{Re} \hat{R}_{\xi,u}$ — оператор, построенный из (27) по правилу

$$\text{Re} f_u = (1/2) (f_{u+i0} + f_{u-i0}). \quad (34)$$

Он непрерывен по параметрам ξ, u и вместе с $\hat{R}_{\xi,\omega}$ удовлетворяет условиям, которые следуют из определений (11), (28), (27):

$$\hat{P} \hat{R}_{\xi,\omega} = 0, \quad \hat{R}_{0,\omega} \hat{P} = 0. \quad (35)$$

Благодаря этим свойствам оператора $\text{Re} \hat{R}_{\xi,u}$, добавление его в левую часть уравнения переноса (9), т. е. переход к

$$(\omega + i\xi s + \hat{P}_\perp - \text{Re} \hat{R}_{\xi,u}) f_{\xi,\omega}^{(\text{kin})}(s) = f_\xi^{(0)}(s), \quad \omega = u \pm i0, \quad (36)$$

существенно не изменяет характера решения (13), (14) в области $|u| \ll 1$, $\xi \ll 1$, а приводит лишь к разного рода малым по параметру

α поправкам. В частности, решение уравнения (36) также имеет полюс на действительной оси, которому отвечает скачок типа (31):

$$\Delta f_{\xi,u}^{(\text{kin})} \approx -\pi\delta(u + \xi^2 d) [1 - i(1 + \text{Re} \hat{R}_{0,0}) (\xi s + i \text{Re} \hat{R}_{\xi,0})] \hat{P} \times \\ \times [1 - i\xi s (1 + \text{Re} \hat{R}_{0,0})] f_{\xi}^{(0)}, \quad (37)$$

где безразмерный коэффициент самодиффузии $d = 1/3 + O(\alpha)$. Мы будем дальше интересоваться не этими поправками по плотности, а только новыми по сравнению с (13), (14) аналитическими особенностями решения уравнения (33), которые, очевидно, связаны с членом, содержащим скачок «кольцевого» оператора. Поэтому вместо (33) рассмотрим уравнение, которое отличается от исходного тем, что в нем отсутствует $\text{Re} \hat{R}_{\xi,\omega}$, а для скачка $\Delta \hat{R}_{\xi,u}$ выбрано приближение низкой плотности (32),

$$(\omega + i\xi s + \hat{P}_{\perp} - i(v/|v|) \gamma s \hat{P} s) f_{\xi,\omega}(s) = z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s). \quad (38)$$

В этом уравнении сохранены основные аналитические особенности (33) из области

$$u < 0, \quad |u| \ll 1, \quad |v| \ll 1, \quad (39)$$

отброшенные же при переходе к (38) члены могут быть учтены с помощью соответствующего варианта теории возмущений.

Согласно определению проекционных операторов (11) уравнение (38) представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, для которого существует точное решение. При $\xi \leq \xi_0$, $|\omega| \leq \xi_0^2$, $\xi_0 \ll 1$ оно имеет вид

$$f_{\xi,\omega}(s) = (1 + i\xi s)^{-1} z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s) + (1 + i\xi s)^{-1} \{i(v/|v|) \gamma s_{\perp} \hat{P} s_{\perp} + \\ + (\omega + \xi^2/3 - i v \gamma \omega/3 |v|)^{-1} [(1 - i v \gamma/3 |v|) \hat{P} + \\ + (\hat{P}(es) + (es) \hat{P}) v \gamma \xi/3 |v| + i(es) \hat{P}(es) v \gamma (\omega + \xi^2/3 |v|)]\} \times \\ \times (1 + i\xi s)^{-1} z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s), \quad (40)$$

где векторы

$$e = \xi/\xi, \quad s_{\perp} = s - e(se). \quad (41)$$

Отсюда ясно, что $f_{\xi,\omega}(s)$ не имеет особенностей в области (39) при $v > 0$ или $v < 0$, но принимает разные значения, если $v \rightarrow \pm 0$. Скачок $f_{\xi,\omega}(s)$ на вещественной оси вычисляется с помощью (30) и (40). В частности, для неизотропной по s компоненты $\Delta f_{\xi,u}(s)$ находим

$$\hat{P}_{\perp} \Delta f_{\xi,u}(s) = \hat{P}_{\perp} (1 + i\xi s)^{-1} \left\{ \frac{\gamma u/3}{(u + \xi^2/3)^2 + (\gamma u/3)^2} \times \right. \\ \times [-i\xi s \hat{P} + 3(u + \xi^2/3)(es) \hat{P}(es)] + \gamma s_{\perp} \hat{P} s_{\perp} \Big\} \times \\ \times (1 + i\xi s)^{-1} z_0^{-1} f_{\xi}^{(0)}(s). \quad (42)$$

Так как величина γ , определенная в (32), пропорциональна $\gamma \sim \sim \alpha^2 |u|^{3/2}$ и $\alpha \ll 1$, скачок $\hat{P}_\perp \Delta f_{\xi,u}$ действительно имеет δ -образный максимум в точке $u \approx -\xi^2/3$. Если перейти к пределу $\alpha \rightarrow 0$, то второе слагаемое из фигурных скобок (42) исчезает, а первое переходит в выражение, которое следует из (13), (31) и выводится на основе обычного уравнения переноса. При $\xi = 0$ имеем

$$\hat{P}_\perp \Delta f_{0,u}(s) = z_0^{-1} \gamma s \hat{P}_\perp f_0^{(0)}(s). \quad (43)$$

Отсюда, учитывая (32), нетрудно получить результат [5], согласно которому в пространственно однородном случае функция распределения $\delta f(k, s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ убывает по степенному закону $(z_0 t)^{-5/2}$, и вычислить, полагая $f_0^{(0)}(s) = s/4\pi$, упомянутую во введении степенную асимптотику автокорреляционной функции единичного вектора направления луча

$$\langle s(t) s \rangle = \int d^3 k s \delta f(k, s, t) = -\alpha^2 / 48 \sqrt{\pi} (3/z_0 t)^{5/2}, \quad z_0 t \rightarrow \infty.$$

Существенно, что этот автокоррелятор отрицателен.

4. ДИФФУЗИОННЫЙ И «ОТРАЖЕННЫЙ» ПОТОК ЭНЕРГИИ

Выполним обратное преобразование Фурье — Лапласа функции $\hat{P}_\perp f_{\xi,\omega}(s)$ и, используя ее аналитические свойства в полосе $u < 0$, $|u| \ll 1$, получим следующее выражение для временной асимптотики ($z_0 t \rightarrow \infty$) неизотропной по s части функции распределения

$$\begin{aligned} \delta f(r, s, t) = z_0 \left(\frac{x_0}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \xi \int_{-\infty}^0 \frac{du}{\pi} \hat{P}_\perp \Delta f_{\xi,u}(s) \times \\ \times \exp(i x_0 \xi r + z_0 u t) = \delta f^{(2)} + \delta f^{(3)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь сумме в правой части отвечает подстановка в интеграл соответственно первого и второго членов из фигурных скобок (42). Причем первому слагаемому в (44) умышленно присвоен индекс «2»: фактически он совпадает с величиной $\delta f^{(2)}$, вычисленной на основе уравнения переноса. В этом нетрудно убедиться, если после указанной подстановки заменить переменные интегрирования u, ξ на $x = -3u/\xi^2$, $y = \xi \sqrt{z_0 t}/3$ и перейти к пределу $z_0 t \rightarrow \infty$. Результатом будет временная асимптотика неизотропной по s части функции (20). Для второго слагаемого из (44) согласно (42) и (32) находим

$$\begin{aligned} \delta f^{(3)}(r, s, t) = - \frac{\alpha^2}{16 \sqrt{\pi}} \left(\frac{x_0}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{3}{z_0 t} \right)^{5/2} \times \\ \times \int d^3 \xi \exp(i x_0 \xi r) s_\perp \hat{P}_\perp s_\perp f_\xi^{(0)}(s), \end{aligned} \quad (45)$$

где под знаком интеграла в соответствии с условием (19) отброшены высшие поправки по ξ .

Временная асимптотика плотности потока энергии вычисляется путем подстановки (44), (7) в (4) и имеет вид суммы:

$$\Pi(r, t) = \Pi(\text{диф}) + \Pi(\text{отр}), \quad (46)$$

где первый член, отвечающий $\delta f^{(2)}$, это — диффузионный поток, который дается формулой (24). Несложный расчет с использованием (45) и определения вектора $s_{\perp}$ (41) приводит к следующему выражению для второго слагаемого из (46), называемого «отраженным» потоком:

$$\Pi^{(\text{отр})}(\mathbf{r}, t) = -c_g(\alpha^2/48\sqrt{\pi})(3/z_0 t)^{5/2} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (47)$$

Здесь вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = s_0 I(\mathbf{r}) + \nabla(s_0 \nabla) \int \frac{I(\mathbf{r}') d^3 r'}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (48)$$

и, как легко проверить, удовлетворяет условию

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (49)$$

Таким образом, на больших временах картина линий потока энергии (рис. 1) может быть представлена в виде наложения двух векторных полей: потенциального поля $\Pi^{(\text{диф})}$, имеющего согласно (24) источник в точке, практически совпадающей с энергетическим центром начального волнового пакета, и вихревого поля $\Pi^{(\text{отр})}$, возникающего как следствие повторного рассеяния и эффектов запаздывания. В области $r \ll r_0$

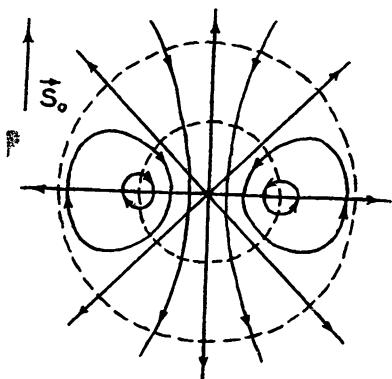


Рис. 1.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx (2/3) s_0 I(0). \quad (50)$$

Поэтому, хотя параметр $\kappa_0 r_0 \gg 1$, вблизи энергетического центра начального распределения существует небольшая область, в которой доминирующим является «отраженный» поток. Если считать начальное распределение интенсивности $I(\mathbf{r})$ сферически симметричным, то из (48) следует

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = s_0 (I(\mathbf{r}) - \bar{I}(r)/3) - e(s_0 e) (I(\mathbf{r}) - \bar{I}(r)), \quad (51)$$

$$\bar{I}(r) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{r' < r} d^3 r' I(r'), \quad e = \mathbf{r}/r.$$

Таким образом, всюду вблизи оси $s_0 \mathbf{r} = \mathbf{r}$ «отраженный» поток $\Pi^{(\text{отр})}(\mathbf{r}, t)$ направлен в сторону, противоположную s_0 , а около границы области, занятой пакетом в начальный момент, $r \approx r_0$, для $\mathbf{r} s_0 = 0$ — ориентирован вдоль s_0 ; центр вихря расположен на окружности $\mathbf{r} s_0 = 0$, $r = r_{\text{ц}}$, где $3I(r_{\text{ц}}) = I(r_{\text{ц}})$.

До сих пор мы рассматривали специально выбранные начальные условия (7). В более общем случае начальную функцию распределения фазовых переменных луча, которая в приближении геометрической оптики совпадает со спектральной плотностью (преобразованием Фурье функции взаимной когерентности по разностной координате) частично когерентного волнового пучка, для гауссова пучка [7] можно представить в виде

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, k s) = I(\mathbf{r}) w(k s - k_0 s_0). \quad (52)$$

Функция $w(\mathbf{k})$ имеет острый максимум в $k = 0$ с шириной порядка $1/r_{\text{ког}}$, где радиус когерентности $r_{\text{ког}} \gg r_0$, и превращается в $\delta(\mathbf{k})$ при

$r_{\text{кор}} \rightarrow \infty$. Для того чтобы найти асимптотику плотности потока энергии при таком начальном условии, достаточно в выражении для $\Pi(\mathbf{r}, t; k_0, s_0)$, следующем из (46), (24), (47) и зависящем от параметров k_0, s_0 , заменить k_0 на k, s_0 на s и выполнить интегрирование по k с весом w ,

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \int k^2 dk ds w(k s - k_0 s_0) \Pi(\mathbf{r}, t; k, s). \quad (53)$$

Поскольку зависимость от k_0 правых частей (24) и (47) связана только с групповой скоростью $c_g = c_g(k_0)$, которая входит также в z_0 (10), ясно, что степенной закон убывания потока энергии при $t \rightarrow \infty$ не изменится. Усреднение по s в (53) должно несколько уменьшить «отраженную» часть потока энергии, обязанную анизотропии начального распределения.

Итак, плотность потока энергии волнового пакета, сосредоточенного в начальный момент в некоторой области $r \leq r_0$, убывает на больших временах по диффузионному закону $t^{-5/2}$. Однако к чисто диффузионному потоку $\Pi^{(\text{диф})}(\mathbf{r}, t)$ добавляется вихревой «отраженный» поток $\Pi^{(\text{отр})}(\mathbf{r}, t)$, связанный с повторными отражениями луча от рассеивателя и соответствующими эффектами запаздывания, которые не учитываются обычной нестационарной теорией переноса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д. Тезисы докладов XIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1981, ч. 2, с. 120.
2. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 2, с. 180.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
4. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.
5. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д. Краткие тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1981, 2, с. 141.
6. Озрин В. Д. — ТМФ, 1983, 57, № 2, с. 290.
7. Барабаненков Ю. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 2, с. 253.

Всесоюзный научно-исследовательский центр
по изучению свойств поверхности и вакуума

Поступила в редакцию
24 января 1984 г.,
в окончательном варианте
26 апреля 1984 г.

BACKSCATTERING EFFECT OF THE NONSTATIONARY RADIATION IN THE THEORY OF TRANSFER WITH MEMORY

Yu. N. Barabanenkov, V. D. Ozrin

A method is developed of asymptotic solution of the nonstationary radiation transfer equation with memory of time lag. This method is applied to investigation of wave packet evolution in an infinite scattering medium which is composed of optically rigid scatterers with radius greater than the wavelength. It is shown that for greater ratios of observation time to mean free ray travelling time the ensemble mean vector of radiation flow energy is equal to a sum of potential and vortex components.