

УДК 535+530.145

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ПОЛЯ, ОБРАЗОВАННОГО СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА И БРОУНОВСКОГО ШУМА

Н. В. Ласкин, А. С. Мазманишвили

Рассмотрено формирование статистики фотоотсчетов поля, образованного суперпозицией когерентного сигнала произвольного вида и броуновского шума (процесс Орнштейна — Уленбека). Получено аналитическое выражение для производящей функции фотоотсчетов В случае гармонического когерентного сигнала выполнен анализ статистики отсчетов суперпозиционного поля в зависимости от сдвига несущей частоты гармонического сигнала относительно максимума лоренцевского спектрального контура шума, от парциальных компонент интенсивности суперпозиционного излучения, а также от произведения длительности фотодетектирования на ширину линии спектрального контура шума.

1. Целью настоящей работы является вывод и исследование формулы для вероятности отсчетов в предположении, что фотодетектор регистрирует оптическое поле, образованное суперпозицией когерентного сигнала и броуновского шума. Такая задача представляет интерес в связи с изучением распределения отсчетов детектора, поглощающего смесь когерентного и некогерентного излучения [1]. При получении выражения для плотности распределения числа фотоотсчетов возникают значительные математические трудности, связанные с тем, что процесс фотодетектирования протяжен во времени.

Вероятность $P(m, T)$ того, что в течение временного интервала T будет зарегистрировано m фотоэлектронов при попадании на фотодетектор суперпозиции когерентного сигнала* $\beta(t)$ и шума $\alpha(t)$, определяется формулой Мандела [2]

$$P(m, T) = \langle \Omega^m e^{-\Omega} / m! \rangle, \quad (1)$$

где

$$\Omega = \varepsilon \int_0^T d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2, \quad (2)$$

ε — коэффициент, характеризующий чувствительность фотодетектора, а угловые скобки означают усреднение по реализации случайного процесса $\alpha(\tau)$.

Введем производящую функцию вероятности фотоотсчетов

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = \langle \exp(-\lambda\Omega) \rangle = \langle \exp[-\lambda\varepsilon \int_0^T d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2] \rangle, \quad (3)$$

где λ — произвольный параметр.

Тогда, если использовать формулу Коши дифференцирования аналитических функций, выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$P_{\alpha+\beta}(m, T) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{m+1}} Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T), \quad (4)$$

* $\beta(t)$ — произвольная детерминированная функция.

где контур интегрирования в комплексной плоскости λ охватывает точку $\lambda=1$. Здесь и ниже $\epsilon=1$.

Таким образом, задача нахождения функции $P_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$, т.е. задача о распределении фотоотчетов разбивается на два этапа: нахождение производящей функции $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$ и вычисление интеграла Коши.

Отметим, что эта задача представляет интерес также в теории, описывающей прохождение нормального случайного процесса через типовое звено радиотехнических устройств (см. [3], с. 492).

Из (3) и (4) следует, что для нахождения $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$ или $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ необходимо произвести усреднение по континууму траекторий случайного процесса $\alpha(t)$, реализующихся на временном интервале $(0, T)$. Вычисление получающегося при этом континуального интеграла [4] и является той трудностью, о которой упоминалось выше. С целью ее преодоления применяется, например, способ, основанный на использовании интегрального уравнения Карунена—Лозва [5-7]. Получить конкретное конечное выражение для $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$ таким путем не удастся, поэтому или ограничиваются прямым вычислением нескольких факториальных моментов низшего порядка [5], или в процессе последовательных преобразований пользуются упрощающими предположениями [6, 8], или, наконец, применяют численное моделирование, используя ограниченное количество собственных чисел λ_k [9].

2. Перейдем к вычислению производящей функции $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$. В качестве модели случайного процесса $\alpha(\tau)$ мы выбрали двумерный случайный процесс $\alpha(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$, каждая из компонент которого подчиняется уравнению Ланжевена [10] со случайной силой $f(\tau) = f_1(\tau) + if_2(\tau)$, являющейся «белым шумом»,

$$\dot{x} + \nu x = f_1(\tau), \quad \dot{y} + \nu y = f_2(\tau), \quad (5)$$

причем

$$\langle f_1(\tau) \rangle = \langle f_2(\tau) \rangle = 0, \quad \langle f_1(\tau) f_1(\tau') \rangle = \langle f_2(\tau) f_2(\tau') \rangle = \sigma \delta(\tau - \tau'), \quad (6)$$

$$\langle f_1(\tau) f_2(\tau') \rangle = \langle f_2(\tau) f_1(\tau') \rangle = 0,$$

где σ — интенсивность «белого шума», $\delta(\tau)$ — δ -функция Дирака. Соотношение (6) обеспечивает отсутствие стохастической зависимости между x - и y -компонентами шумового излучения.

Случайный процесс (5) является гауссовым марковским процессом (процесс Орнштейна—Уленбека [11]), переходная функция $w(x, t; x_0, 0)$ которого удовлетворяет уравнению «диффузии со сносом»:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t; x_0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu x + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, t; x_0, 0), \quad (7)$$

и равна

$$w(x, t; x_0, 0) = \left[\frac{\nu}{\pi \sigma (1 - e^{-2\nu t})} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\nu (x - x_0 e^{-\nu t})^2}{\sigma (1 - e^{-2\nu t})} \right]. \quad (8)$$

Обозначим $\beta(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$. В силу условия независимости покомпонентного движения (6) производящая функция $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$ факторизуется:

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = Q_{x+u}(\lambda, T) Q_{y+v}(\lambda, T), \quad (9)$$

где

$$Q_{x+u}(\lambda, T) = \langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T d\tau [x(\tau) + u(\tau)]^2 \right\} \rangle; \quad (10)$$

$$Q_{y+v}(\lambda, T) = \langle \exp\{-\lambda \int_0^T d\tau [y(\tau) + v(\tau)]^2\} \rangle. \quad (11)$$

Нам достаточно ограничиться вычислением одной из этих производящих функций, например $Q_{x+u}(\lambda, T)$. Для вычисления континуального интеграла (10) по мере Орнштейна—Уленбека, весовая функция которой имеет вид (8), воспользуемся методом Каца—Фейнмана [12]. Согласно [12] представим производящую функцию в виде

$$Q_{x+u}(\lambda, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_0 \omega(\eta_0) Q_{x+u}(\lambda, T; \eta_0); \quad (12)$$

$$Q_{x+u}(\lambda, T; \eta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \Psi(\eta, T; \eta_0), \quad (13)$$

где $\omega(\eta_0)$ — плотность вероятности начального состояния η_0 и функция $\Psi(\eta, T; \eta_0)$ является решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v\eta + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Psi - \lambda [\eta + u(t)]^2 \Psi \quad (14)$$

с начальным условием $\Psi(\eta, 0; \eta_0) = \delta(\eta - \eta_0)$.

Заметим, что это уравнение отличается от уравнения (7) для переходной функции наличием слагаемого $-\lambda[\eta + u(t)]^2 \Psi$.

Будем искать решение уравнения (14) в следующем виде:

$$\Psi(\eta, t; \eta_0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) - \frac{v-r}{2\sigma} (\eta^2 - \eta_0^2) + \right. \\ \left. + \frac{v+r}{2} t + \eta a(t) \right\} \Phi(\eta, t; \eta_0), \quad (15)$$

где $r = \sqrt{v^2 + 2\lambda\sigma}$ и введена некоторая произвольная пока функция $a(t)$. Функция $\Phi(\eta, t; \eta_0)$, входящая в правую часть выражения (15), удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \left[r\eta + \sigma a(t) + \frac{\sigma}{2} a^2(t) \right] \Phi + \\ + [ra(t) - 2\lambda u(t) - \dot{a}(t)] \eta \Phi. \quad (16)$$

Выберем функцию $a(t)$ таким образом, чтобы в уравнении (16) обратилось в нуль последнее слагаемое в правой части, т. е. $a(t)$ должно быть решением уравнения $ra - \dot{a} = 2\lambda u(t)$, $a(0) = 0$, т. е.

$$a(t) = -2\lambda \int_0^t d\tau u(\tau) e^{-r(\tau-t)}. \quad (17)$$

Представляя $\Psi(\eta, t; \eta_0)$ в следующем виде:

$$\Psi(\eta, t; \eta_0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) - \frac{v-r}{2\sigma} (\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{v+r}{2} t + \right.$$

$$+ \eta a(t) + \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) \left\} \chi(\eta e^{rt}, t; \eta_0), \quad (18)$$

для функции $\chi(y, t; \eta_0)$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi = \frac{1}{2} \sigma e^{2rt} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \sigma a(t) e^{rt} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (19)$$

решение которого

$$\chi(y, t; \eta_0) = \sqrt{\frac{r}{\pi \sigma (e^{2rt} - 1)}} \times \\ \times \exp \left\{ -r \frac{\left[y - \eta_0 + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r\tau} \right]^2}{\sigma (e^{2rt} - 1)} \right\}. \quad (20)$$

Возвращаясь назад к уравнению (14), получим, что его решение имеет вид

$$\Psi(\eta, t; \eta_0) = \left(\frac{\pi \sigma}{r} (e^{2rt} - 1) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) - \right. \\ \left. - \frac{\nu - r}{2\sigma} (\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{\nu + r}{2} t + \eta a(t) + \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) - \right. \\ \left. - r \frac{\left[\eta - \eta_0 e^{-rt} + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} \right]^2}{\sigma (1 - e^{-2rt})} \right\}, \quad (21)$$

где напомним, что $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\sigma}$, а функция $a(t)$ определяется выражением (17).

Выражение для $Q_{x+u}(\lambda, T)$ можно получить, если проинтегрировать выражение (21) по переменной η и произвести усреднение по переменной η_0 с весовой функцией $w(\eta_0) = (\nu/\pi\sigma)^{1/2} \exp(-\nu\eta_0^2/\sigma)$. Возникающие гауссовы интегралы по переменным η и η_0 берутся, и мы приходим к следующей формуле:

$$Q_{x+u}(\lambda, T) = Q_u(\lambda, T) Q_x(\lambda, T) Q_{xu}(\lambda, T), \quad (22)$$

где $Q_u(\lambda, T)$ — производящая функция когерентного сигнала,

$$Q_u(\lambda, T) = \exp \left[-\lambda \int_0^T d\tau u^2(\tau) \right], \quad (23)$$

$Q_x(\lambda, T)$ — производящая функция броуновского шума,

$$Q_x(\lambda, T) = \left[\frac{4r\nu e^{\nu T}}{(r + \nu)^2 e^{rT} - (r - \nu)^2 e^{-rT}} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$Q_{xu}(\lambda, T)$ — производящая функция, отвечающая интерференции когерентной и некогерентной компонент излучения,

$$Q_{xu}(\lambda, T) = \exp \left\{ \frac{2\lambda^2 \sigma / r}{(r + \nu)^2 e^{rT} - (r - \nu)^2 e^{-rT}} \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^T dt u(t) [(r + \nu) e^{rt} + (r - \nu) e^{-rt}] \times \\ & \times \int_t^T d\tau u(\tau) [(r + \nu) e^{r(T-\tau)} + (r - \nu) e^{-r(T-\tau)}] \Big\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Вернемся теперь к комплексным амплитудам $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Согласно (9) имеем

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = Q_\alpha(\lambda, T) Q_\beta(\lambda, T) Q_{\alpha\beta}(\lambda, T), \quad (26)$$

где $Q_\alpha(\lambda, T)$ — производящая функция некогерентной компоненты излучения*,

$$Q_\alpha(\lambda, T) = 4r\nu e^{\nu T} [(r + \nu)^2 e^{rT} - (r - \nu)^2 e^{-rT}]^{-1}, \quad (27)$$

$Q_\beta(\lambda, T)$ — производящая функция когерентной компоненты излучения

$$Q_\beta(\lambda, T) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right\} \quad (28)$$

и, наконец, $Q_{\alpha\beta}(\lambda, T)$ — производящая функция, отвечающая их интерференции,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}(\lambda, T) = \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \sigma / r}{(r + \nu)^2 e^{rT} - (r - \nu)^2 e^{-rT}} \int_0^T dt \int_t^T d\tau \times \right. \\ \times [(r + \nu) e^{rt} + (r - \nu) e^{-rt}] \times \\ \left. \times [(r + \nu) e^{r(T-\tau)} + (r - \nu) e^{-r(T-\tau)}] [\beta(t)\beta^*(\tau) + \beta^*(t)\beta(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

3. Произведению парциальных производящих функций отвечает свертка соответствующих им парциальных вероятностей отсчетов $P_\alpha(m, T)$, $P_\beta(m, T)$ и $P_{\alpha\beta}(m, T)$. Для полной вероятности $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ отсчетов при детектировании в течение временного интервала $(0, T)$ суперпозиции когерентного $\beta(t)$ и шумового $\alpha(t)$ излучений получим

$$P_{\alpha+\beta}(m, T) = \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n P_\beta(m-n, T) P_\alpha(n-l, T) P_{\alpha\beta}(l, T),$$

причем каждая из парциальных вероятностей P_α , P_β и $P_{\alpha\beta}$ определяется при помощи выражения (4) с подстановкой в нее Q_α , Q_β и $Q_{\alpha\beta}$ соответственно.

Функция $P_\beta(m, T)$ представляет собой, очевидно, распределение Пуассона

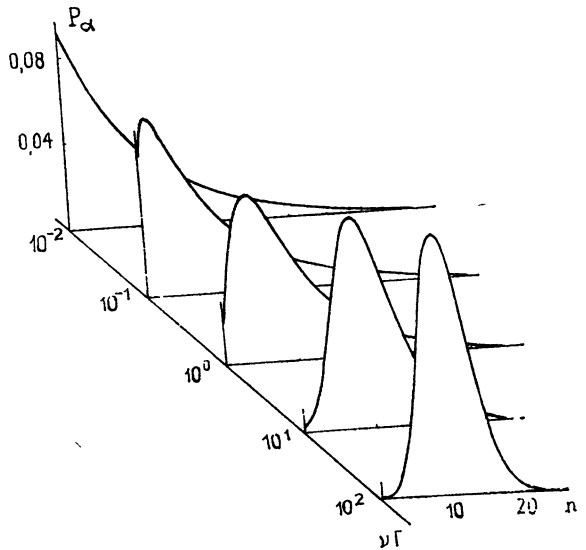
$$P_\beta(m, T) = \frac{1}{m!} \left[\int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right]^m \exp \left[- \int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right].$$

К сожалению, аналитически вычислить интеграл Коши (4) для Q_α и $Q_{\alpha\beta}$ не удастся. Асимптотический анализ парциальной производящей функции $Q_\alpha(\lambda, T)$ был проведен в [13], где были получены выражения для $P_\alpha(m, T)$, отвечающие случаю $\nu T \gg 1$ и $m / \langle m_\alpha \rangle \sim 1$. Нами было выпол-

* Результат (27) был ранее получен М. Лэксом (см. [13], с. 251).

нено численное интегрирование на ЭВМ выражения (4) с подстановкой в него совокупной производящей функции (26). При этом оказалось удобно перейти от интенсивности σ «белого» шума к интенсивности $\sigma_\alpha = \sigma/\nu$ ланжевеновского процесса $\alpha(t)$. В этом случае $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\sigma_\alpha\nu}$.

Рис. 1. Эволюция статистики отсчетов некогерентного шумового излучения; $\sigma_\alpha = 1,0$, $T = 10,0$.



На рис. 1 приведена расчетная зависимость для $P_\alpha(m, T)$, отвечающая случаю детектирования чисто некогерентного излучения ($\beta=0$) с постоянной интенсивностью $\sigma_\alpha=1,0$. Семейство графиков (хотя $P(m, T)$ является функцией целочисленного аргумента m , для наглядности на рисунках она изображена сплошной кривой) построено для широкого диапазона значений параметра $\chi = \nu T$. Этот параметр является отношением длительности процесса регистрации T ко времени корреляции случайного процесса $T_c = \nu^{-1}$. Если $\chi \ll 1$, вероятность $P_\alpha(m, T)$ стремится к ее винеровской асимптотике, отвечающей случаю δ -коррелированного случайного процесса $\dot{\alpha}(t)$.

Если детектированию подвергается аддитивная смесь когерентного и некогерентного излучений, то вид $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ зависит от вклада их интенсивностей, величины νT и от конкретного вида функции $\beta(t)$. Нами рассмотрено два типа этой функции: $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + i\omega_0 t)$ и $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + i\omega_0 t + i\Delta\omega t)$, где амплитуда b , начальная фаза φ_0 , частота ω_0 и сдвиг частоты $\Delta\omega$ — постоянные. Для первого случая, когда несущая частота ω_0 локализована в максимуме лоренцевского спектрального контура вида

$$\rho(\omega) = \frac{\sigma_\alpha \nu / \pi}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu^2}, \quad (30)$$

имеем

$$Q_\beta(\lambda, T) = \exp(-\lambda\sigma_\beta T); \quad (31)$$

$$\ln Q_{\alpha\beta}(\lambda, T) = \frac{2\lambda^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta \nu / r^3}{r_+^2 e^{r_+ T} - r_-^2 e^{-r_- T}} [rT (r_+^2 e^{r_+ T} - r_-^2 e^{-r_- T}) - 2\nu (r_+ e^{r_+ T} - r_- e^{-r_- T}) + 4\nu^2], \quad (32)$$

где $\sigma_\beta = |b|^2$, $r_\pm = r \pm \nu$, а выражение для $Q_\alpha(\lambda, T)$ совпадает с (27).

На рис. 2 приведена расчетная зависимость $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ для рассматриваемого случая. Семейство графиков отложено в логарифмическом диапазоне значений параметра χ , а парциальные интенсивности выбраны одинаковыми, $\sigma_\alpha=0,5$ и $\sigma_\beta=0,5$. Для первых факториальных моментов из (27), (31) и (32) можно получить

$$\langle m \rangle = (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) T = \langle m_\alpha \rangle + \langle m_\beta \rangle; \quad (33)$$

$$\langle m(m-1) \rangle = \langle m \rangle^2 + \langle m \rangle + \quad (34)$$

$$+ (\sigma_\alpha^2/2\nu^2) (2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}) + (4\sigma_\alpha\sigma_\beta/\nu^2) (\nu T - 1 + e^{-\nu T}),$$

поэтому дисперсия $\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$ распределения $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ равна

$$\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle^2 \frac{2\chi - 1 + e^{-2\chi}}{2\chi^2} + \quad (35)$$

$$+ 4 \langle m_\alpha \rangle \langle m_\beta \rangle \frac{\chi - 1 + e^{-\chi}}{\chi^2}.$$

Таким образом, присутствие когерентной компоненты излучения приводит к вкладу в дисперсию. Если $\chi = \nu T$ мало, то $\Delta_{\alpha+\beta} \approx \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle (\langle m_\alpha \rangle + \langle m_\beta \rangle)$. В противоположном случае $\Delta_{\alpha+\beta} \approx \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle (\langle m_\alpha \rangle + 4\langle m_\beta \rangle) / \chi$, т. е. величина дисперсии пропорциональна T .

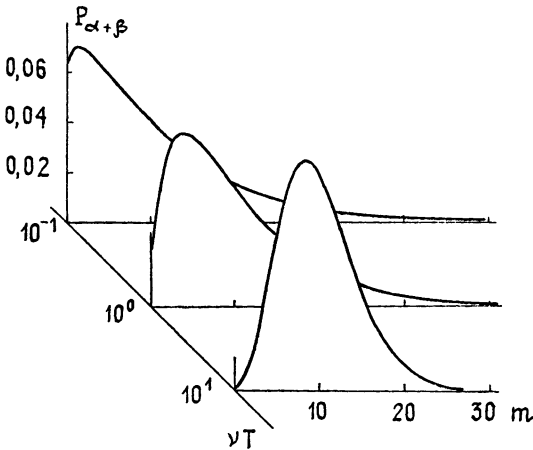


Рис. 2. Эволюция статистики отсчетов аддитивной смеси излучений; $\sigma_\alpha=0,5$, $\sigma_\beta=0,5$, $T=10,0$, $\Delta\omega=0$.

Наличие в (35) слагаемых пропорциональных $\langle m_\alpha \rangle$ соответствует заметному отличию вероятности $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ от вероятности $P_\beta(m, T)$, имеющей тот же по величине первый момент. На рис. 3 приведены расчетные зависимости для $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ в случае $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + i\omega_0 t)$. Семейство графиков отложено для различных вкладов парциальных интенсивностей σ_α и σ_β , полная интенсивность при этом поддерживалась неизменной. Если $\sigma_\alpha \gg \sigma_\beta$, то зависимость $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ в основном повторяет ход зависимости $P_\alpha(m, T)$ с интенсивностью, равной сумме парциальных.

Рассмотрим теперь статистику отсчетов для случая, когда частота когерентного излучения смещена относительно центра спектрального контура линии шума, т. е. $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + i\omega_0 t + i\Delta\omega t)$. Парциальные производящие функции $Q_\alpha(\lambda, T)$ и $Q_\beta(\lambda, T)$ будут описываться выражениями (27) и (28) ($\sigma_\beta = |b|^2$), а для $Q_{\alpha\beta}(\lambda, T)$ в этом случае из (29) получим

$$\ln Q_{\alpha\beta}(\lambda, T) = \frac{2\lambda^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta}{r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}} \frac{\nu/r}{(r^2 + \Delta\omega^2)^2} \left\{ (r^2 + \Delta\omega^2) \times \right. \\ \times rT (r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}) - 2r [r\nu (r_+ e^{rT} - r_- e^{-rT}) - \\ \left. - \Delta\omega^2 (r_+ e^{rT} + r_- e^{-rT})] + 4r^2 [(\nu^2 - \Delta\omega^2) \cos(T\Delta\omega) - 2\nu\Delta\omega \sin(T\Delta\omega)] \right\}. \quad (36)$$

Рис. 3. Зависимость статистики отсчетов аддитивной смеси излучений от частичного вклада компонент; $\nu = 0,1$,

- $T = 10,0, \Delta\omega = 0;$
 1 — $\sigma_\alpha = 0,0, \sigma_\beta = 1,0;$
 2 — $\sigma_\alpha = 0,1, \sigma_\beta = 0,9;$
 3 — $\sigma_\alpha = 0,2, \sigma_\beta = 0,8;$
 4 — $\sigma_\alpha = 1,0, \sigma_\beta = 0,0.$

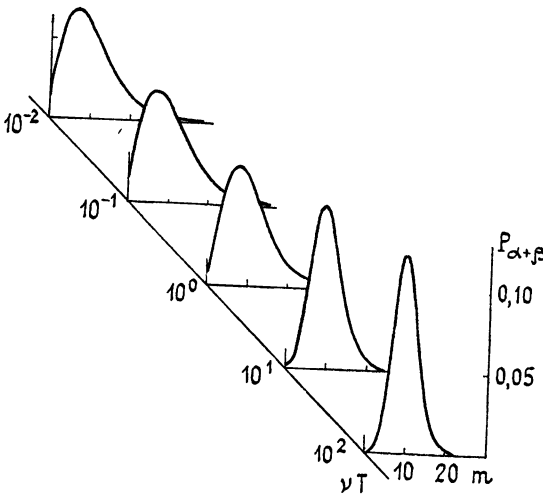
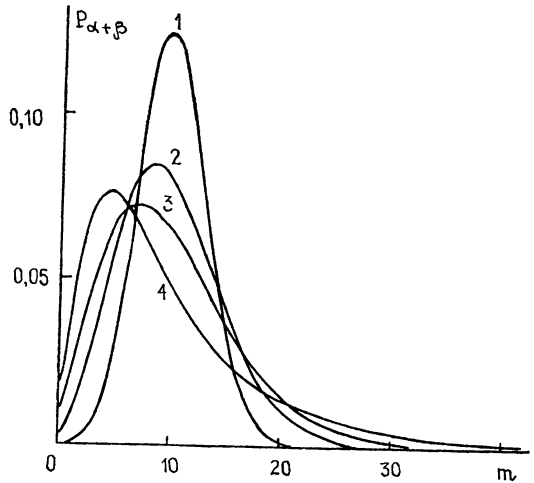


Рис. 4. Эволюция статистики отсчетов аддитивной смеси излучений; $\sigma_\alpha = 0,2, \sigma_\beta = 0,8, T = 10,0, \Delta\omega = 0,1.$

Выражение (36) при $\Delta\omega = 0$ переходит в (32). Результаты (32) и (36) для $Q_{\alpha\beta}(\lambda, T)$ не зависят от начальной фазы φ_0 , т. е. они отвечают интерференции интенсивностей когерентной и некогерентной компонент излучения, а не интерференции амплитуд $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. На рис. 4 приведена расчетная зависимость $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ для сигнала $\beta(t)$ рассматриваемого вида. Так же как и на рис. 2, видна эволюция вероятности $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ в зависимости от величины параметра $\chi = \nu T$. Для больших значений параметра χ вероятность $P_{\alpha+\beta}(m, T)$ стремится к устойчивому распределению, которое при выбранном нами значении $\langle m \rangle$, равном десяти, принимает асимптотическую гауссову форму. Скорость перехо-

да к асимптотической форме тем больше, чем больше ширина лоренцевской линии ν . Для дисперсии $\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$ справедливо выражение

$$\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle^2 \frac{2\chi - 1 + e^{-2\chi}}{2\chi^2} + \quad (37)$$

$$+ 4\langle m_\alpha \rangle \langle m_\beta \rangle (\chi^2 + \varphi^2)^{-2} [(\chi^2 - \varphi^2)(\chi - 1 + \cos \varphi e^{-\chi}) + 2\chi \varphi (\varphi - \sin \varphi e^{-\chi})],$$

где $\varphi = T\Delta\omega$. Из (37) видно, что дисперсия $\Delta_{\alpha+\beta}$ содержит осциллирующее по φ слагаемое, амплитуда которого экспоненциально падает с ростом χ . Если $\chi \ll 1$ и $\varphi \ll 1$, то

$$\Delta_{\alpha+\beta} \simeq \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle (\langle m_\alpha \rangle + 2\langle m_\beta \rangle).$$

На рис. 5 приведены расчетные зависимости для $P_{\alpha+\beta}(m, T)$, отвечающие случаю, когда несущая частота когерентного излучения смещена относительно максимума лоренцевского контура шума. Семейство графиков отложено для различных вкладов парциальных интенсивностей σ_α и σ_β , полная интенсивность $\sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\beta$ поддерживалась неизменной. Обратим внимание на вытянутый «хвост» при больших m , когда $\sigma_\alpha \neq 0$.

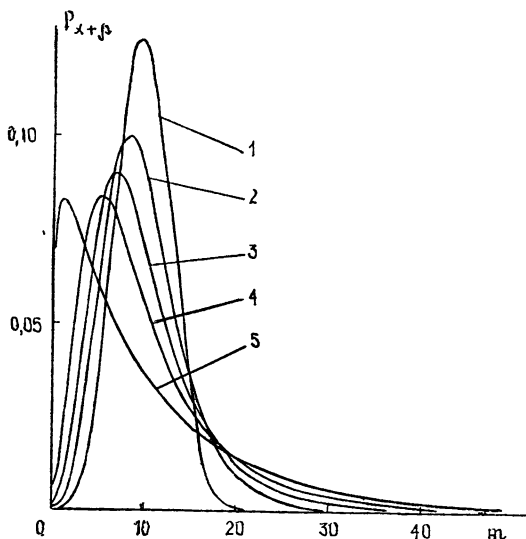


Рис. 5. Зависимость статистики отсчетов аддитивной смеси излучений от парциального вклада компонент; $\nu = 0,01$, $T = 10,0$, $\Delta\omega = 0,4$;

- 1 — $\sigma_\alpha = 0,0$, $\sigma_\beta = 1,0$;
- 2 — $\sigma_\alpha = 0,2$, $\sigma_\beta = 0,8$;
- 3 — $\sigma_\alpha = 0,4$, $\sigma_\beta = 0,6$;
- 4 — $\sigma_\alpha = 0,6$, $\sigma_\beta = 0,4$;
- 5 — $\sigma_\alpha = 1,0$, $\sigma_\beta = 0,0$.

4. Таким образом, в настоящей работе рассмотрено формирование статистики фотоотсчетов поля, образованного суперпозицией когерентного сигнала и броуновского шума. Общность результатов заключается в том, что они получены для функций когерентного сигнала $\beta(t)$ произвольного вида. В качестве шумовой компоненты излучения $\alpha(t)$ выбран стохастический процесс типа Орнштейна—Уленбека, обладающий лоренцевским спектральным контуром линии. Получены аналитические выражения для производящей функции фотоотсчетов $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$, показана ее факторизация на когерентный, некогерентный и интерференционный множители.

Изучена зависимость статистики отсчетов от параметра $\chi = \nu T$, где ν — ширина линии спектрального контура шума, а T — временная длительность процесса фотодетектирования. В частности, если $\nu T \ll 1$, то возможны значительные отклонения от пуассоновской статистики, в том числе, когда доля шумовой компоненты относительно невелика.

С увеличением параметра \sqrt{T} распределение отсчетов стремится сформироваться в устойчивое асимптотическое распределение гауссова типа. Для случая гармонического сигнала проведен анализ статистики отсчетов в зависимости от сдвига несущей частоты когерентного сигнала относительно максимума спектрального контура шума. Показано, что с ростом частотного сдвига вклад интерференционного взаимодействия полей в статистику отсчетов уменьшается.

В заключение мы благодарим Ю. Н. Григорьева, А. Н. Малахова и С. В. Пелетминского за интерес, проявленный к работе, и поддержку. Мы также признательны С. М. Бабню, Ю. П. Вирченко, А. Н. Довбне, Л. Г. Содину, С. И. Фальковичу и А. Г. Шереметьеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Rice S O — Bell System Techn. J, 1945, 24, № 1.
- 2 Mandel L. — Proc. Phys. Soc., 1958, 72, p. 1037.
- 3 Левин Б Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1969 — 748 с.
- 4 Фейнман Р. Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968. — 240 с.
- 5 Jaiswal A. K, Mehta C L — Phys. Rev. A, 1970, 2, № 1, p. 168.
- 6 Курикса А. А. Квантовая оптика и оптическая локация. — М.: Сов. радио, 1973. — 184 с.
- 7 Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1962.
- 8 Глаубер Р. — В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М.: Мир, 1966.
- 9 Slepian D. — Bell System Techn. J, 1958, № 1, p. 163 (перевод в сб Определение параметров случайных процессов. — Киев: Гостехиздат, 1962).
- 10 Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: ИЛ, 1947. — 168 с.
- 11 Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1969 — 511 с.
- 12 Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике — М.: Мир, 1965 — 406 с.
- 13 Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления — М.: Мир, 1974 — 299 с.

Поступила в редакцию
17 апреля 1984 г.

COUNTING STATISTICS OF THE FIELD CREATED BY THE SUPERPOSITION OF THE COHERENT SIGNAL AND BROWNIAN NOISE

N. V. Laskin, A. S. Mazmanishvili

The formation of photocount statistics of the field created by the superposition of the arbitrary-mode coherent signal and the Brownian noise (Ornstein—Uhlenbeck process) is considered. The analytical expression for the generating function of photocounts is obtained. In the case of the harmonic coherent signal the statistic analysis of superposition field counts is performed as a function of carrier frequency shift of the harmonic signal relative to the Lorentz spectral noise contour; and also as functions of the partial component of superposition radiation intensity and, finally, of photodetection duration multiplied by the line width of the spectral noise contour.
