

УДК 534.0

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

П. С. Ланда, С. М. Перминов

Рассмотрено взаимодействие стохастических автоколебаний с периодическими и стохастическими. При этом возможен целый ряд эффектов: синхронизация стохастических автоколебаний периодическими, возбуждение почти периодических колебаний, стохастизация периодических автоколебаний и т. д.

В последнее время открыто и изучено большое количество динамических систем с малым числом степеней свободы, в которых возможны стохастические автоколебания [1]. Представляет интерес исследовать вопрос о взаимодействии таких систем с другими автоколебательными системами, как стохастическими, так и периодическими.

Целью данной работы является изучение некоторых случаев таких взаимодействий. В качестве автоколебательной системы со стохастическим поведением взята одна из систем с инерционным самовозбуждением. Как показано в работах [2, 3], системы такого типа описывают многие процессы в механике, электротехнике, радиофизике и биологии. Уравнения такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x &= -ky + f(x, \dot{x}, y), \quad \dot{y} + \gamma y = hx + \varphi(x, y), \\ f(x, \dot{x}, y) &= -bx^3, \quad \varphi(x, y) = -Qx^2 - Px^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Стochasticность в системе (1) существует в широкой области пространства параметров.

1. Изучение взаимодействия стохастических и периодических систем. В качестве периодической автоколебательной системы был взят генератор Ван-дер-Поля. Уравнения, описывающие взаимодействие рассматриваемых систем, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x &= ky - bx^3 + m_2 u, \quad \dot{y} = -\gamma y + hx - Qx^2 - Px^3, \\ \ddot{u} - \mu(1 - \alpha u^2) \dot{u} + \omega_r^2 u &= m_1 x, \end{aligned} \quad (2)$$

где m_1 и m_2 — коэффициенты связи, $2\delta = 0,75$, $k = 20$, $b = 17,5$, $\omega_0 = \gamma = \alpha = h = Q = P = 1$, $\mu = 0,1$. Решения автономной системы с инерционным самовозбуждением $m_1 = m_2 = 0$ стохастичны, автономный генератор имеет амплитуду $A = 2\alpha$ и частоту $f_r = \omega_r/2\pi$.

Вначале рассмотрим случай $m_1 = 0$, что эквивалентно воздействию на стохастическую автоколебательную систему гармонической внешней силы с амплитудой A и частотой $f = f_r$.

При помощи ЭВМ была обнаружена синхронизация стохастической системы при $f_r = n f_{\text{синхр}}$, где $f_{\text{синхр}} = 0,26 \text{ Гц}$, $n = 1, 2, \dots$. Случай $f_r = f_{\text{синхр}}$ соответствует синхронизации вблизи самого низкочастотного

из пиков спектра «автономной системы» (1). Зоны синхронизации стохастической автоколебательной системы на основной частоте и второй гармонике ($n=2$) показаны на рис. 1. В областях синхронизации странный аттрактор в фазовом пространстве заменяется в зависимости от значений A и f_g на двух-, трех-, четырех- или шестиоборотные циклы (области трех- и шестиоборотных циклов показаны на рис. 1 штриховкой).

Для того чтобы составить представление о переходах от одного вида циклов к другому в областях синхронизации при изменении значения f_g , была построена при разных значениях A зависимость координаты X циклов при пересечении «сверху» траекториями плоскости $X = -0,2$, как функция частоты генератора f_g (рис. 2).

Представляет интерес вопрос о переходе от синхронизации к стохастичности и обратно при «входе» и «выходе» частоты f_g из областей синхронизации. Исследования показали, что случай перехода от стохастичности к синхронизации эквивалентен случаю обратного перехода, и поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о последнем.

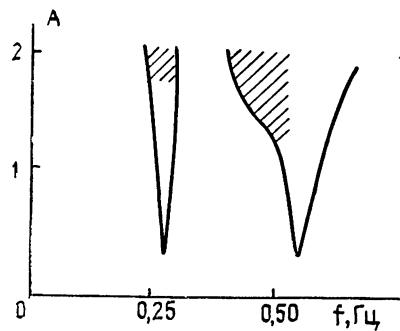
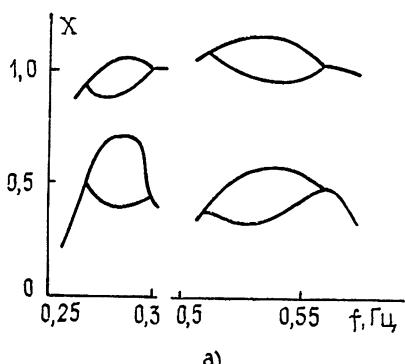
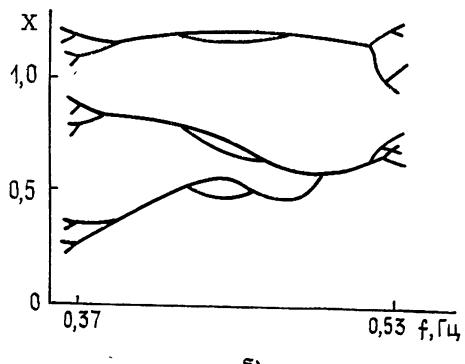


Рис. 1.



а)



б)

Рис. 2.

При малых значениях параметра A (рис. 2а) переход от синхронизации к стохастичности осуществляется путем образования в фазовом пространстве тора. Рассмотрим этот переход подробно в области частот $f \in [0,249; 0,255]$. При достижении частотой f_g значения $f_{kp1} =$

$= 0,2535$ в системе (2) возникают биения, что приводит к появлению новых пиков в низкочастотной области спектра (частоты $f = lf_2$, $l=1, 2, 3, \dots$) и вблизи частоты генератора ($f_n = f_g \pm \pm nf_2$, $n=+1, +2, +3, \dots$), что показано на рис. 3 непрерывной линией. При уменьшении $f_g < f_{kp1}$ число различных частот f_n растет, частота f_2 незначительно увеличивается. При $f_g = f_{kp2} = 0,2504$ происходит бифуркация удвоения квазипериода тора ($T_{тора} = 1/f_2$), в результате чего в

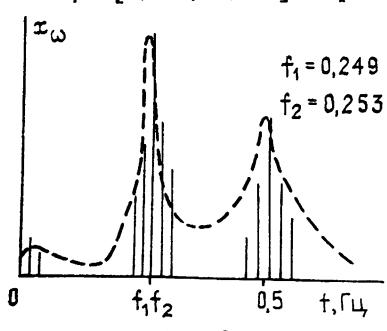


Рис. 3.

спектре появляются частоты $f_2/2$ и $f_r \pm nf_2/2$. При $f_r = f_{kp} = 0,249$ мы уже не можем выделить в спектре частоты $f_r \pm nf_2/2$, и спектр становится практически сплошным, хотя на его фоне различима частота f_r (рис. 3, пунктирная линия). Этот пик исчезает при дальнейшем уменьшении f_r .

При $A > A_1$ ($A_1 \approx 1,2 \div 1,3$), как видно из рис. 2б, переход от синхронизации к стохастичности осуществляется путем бифуркаций удвоения периодов циклов. Удалось проследить первые три бифуркации.

Воздействие на стохастическую систему на частотах $f_r = nf_{\text{синх}}$ не вызывает существенного изменения свойств системы по сравнению с «автономным» случаем.

Зафиксируем теперь $m_2 = 1$, что соответствует $A = 2$, и частоту $f_r = 0,5 \text{ Гц}$, что соответствует синхронизации при $m_1 = 0$ на второй гармонике, и будем варьировать значение m_1 . При $m_1 < m_{\text{пор}} = -1,2$ в системе наблюдается эффект синхронизации, аналогичный случаю $m_1 = 0$. При увеличении m_1 ($m_1 > m_{\text{пор}}$) происходит разрушение синхронизации путем образования тора (область существования тора занимает малый участок по параметру m_1). После разрушения синхронизации система с инерционным самовозбуждением переходит в режим стохастических автоколебаний и в свою очередь навязывает свои частоты генератору, стохастизуя его. На рис. 4а изображены спектры генератора u_ω (непрерывная линия) и x_ω (пунктирная линия) при $m_2 = 1$ и $m_1 = 3$, и показана взаимокорреляционная функция. Эта функция имеет максимум, равный 0,5 при $\tau = 0$ (рис. 4б). При дальнейшем увеличении коэффициента m_1 происходит более полная стохастизация генератора (имеется в виду, что спектры генератора и системы совпадают по ширине и расположению пиков, взаимокорреляционная функция имеет максимум ≈ 1 при $\tau = 0$).

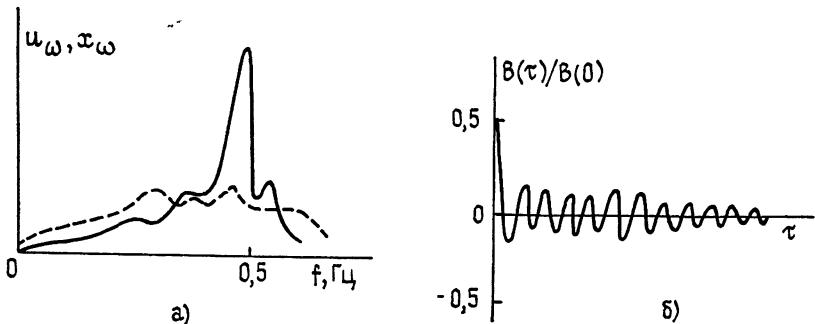


Рис. 4.

В случае, когда частота генератора f_r не принадлежит зонам синхронизации (при $m_1 = 0$), уже при малых значениях m_1 происходит расширение спектра генератора и его стохастизация. При увеличении параметра m_1 происходит расширение спектра генератора до ширины спектра системы в «автономном» случае.

Из изучения взаимодействия стохастических и периодических автоколебаний можно сделать вывод, что в зависимости от значения коэффициентов связи здесь возможны различные эффекты: синхронизация с образованием многооборотных циклов, появление торов, бифуркаций удвоения периодов или, наоборот, эффекты стохастизации периодических автоколебаний.

2. Изучение взаимодействия стохастических автоколебательных систем.

В работе [4] показано, что возможны два различных механизма воз-

никновения стохастичности в системах с инерционным самовозбуждением при разных видах нелинейностей. В работе [3] разобран механизм возникновения стохастичности при $f(x, \dot{x}, y) = -gxy$, $\varphi(x, y) = lx^2$. Как выяснилось, при этом стохастичность возникает за счет члена gxy в функции $f(x, \dot{x}, y)$. Такой механизм был назван параметрическим. Механизм, связанный с уравнениями (1), был назван силовым [4]. Системы с инерционным самовозбуждением при различных механизмах возбуждения стохастичности имеют различную топологию фазового пространства и различные свойства стохастических автоколебаний, поэтому в качестве двух различных стохастических автоколебательных систем мы взяли две системы с инерционным самовозбуждением, но с различными механизмами возникновения стохастичности.

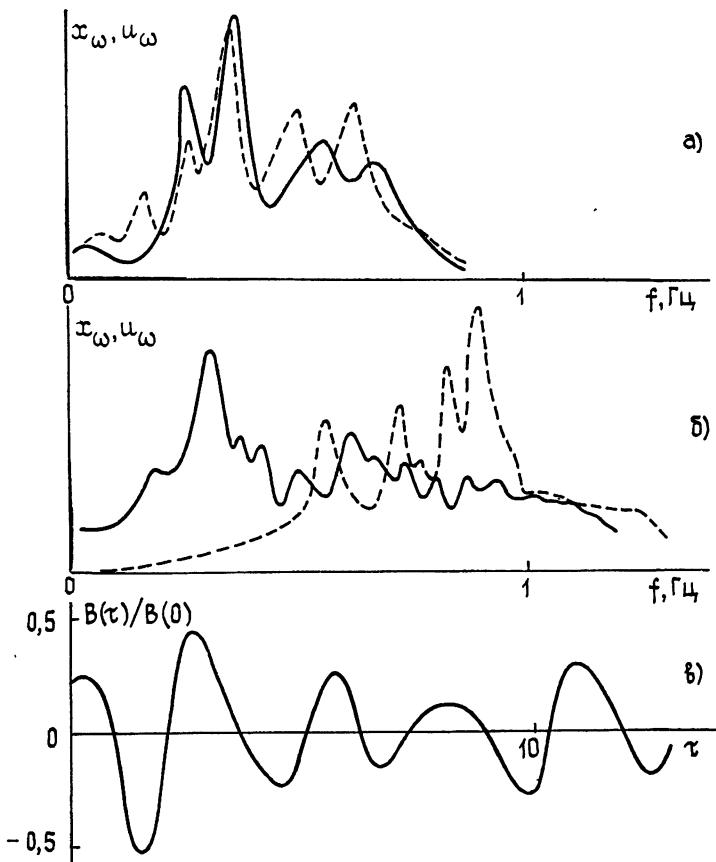


Рис. 5.

Уравнения, описывающие взаимодействие двух таких стохастических автоколебательных систем, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta_1 \dot{x} + \omega_0^2 x &= -k_1 y - bx^3 + m_2 u, \quad \dot{y} + \gamma_1 y = h_1 x - Qx^2 - Px^3, \\ \ddot{u} + 2\delta_2 \dot{u} + \omega_0^2 u &= -guv + m_1 x - k_2 v, \quad \dot{v} + \gamma_2 v = h_2 u + lu^2, \end{aligned}$$

где m_1 и m_2 — коэффициенты связи. Для определенности положим $2\delta_1 = 0,75$, $b = 17,5$, $k_1 = 20$, $2\delta_2 = 0,5$, $\gamma_2 = 0,1$, $k_2 = 10$, $g = 20$, $\omega_0 = \omega_0^2 = \gamma_1 = h_1 = Q = P = h_2 = l = 1$. В отсутствие связи ($m_1 = m_2 = 0$), как и предполагалось, колебания обеих систем не коррелированы. Нами изучался случай $m_1 = m_2 = m$. При увеличении происходит синхронизация стохастических систем. Под этим мы понимаем равенство их ши-

рины спектров и совпадение их пиков. На рис. 5а представлены спектры процессов u_ω и x_ω (соответственно непрерывная и пунктирная линии) при $t=1$. Для сравнения на рис. 5б представлены аналогичные спектры u_ω , x_ω для автономных систем. Из рисунка видно, что при $t \neq 0$ происходит смещение пиков спектров в низкочастотную область и уменьшение ширины спектра второй системы. На рис. 5в приведена корреляционная функция процессов x и u . Она имеет максимум при $\tau=\tau_1$, что соответствует некоторому фазовому сдвигу при синхронизации систем.

Заметим, что взаимодействие двух разных автоколебательных систем с силовым механизмом возникновения стохастичности, имеющих разные начальные условия, описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = -k_1 y - bx^3 + m_2 u, \quad \dot{y} + \gamma y = Rx - Qx^2 - Px^3,$$

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = -k_1 v - bx^3 + m_1 x, \quad \dot{v} + \gamma v = Ru - Qu^2 - Pu^3.$$

Были выбраны следующие коэффициенты: $2\delta=0,75$, $k=20$, $b=17,5$, $\omega_0=\gamma=h=Q=P=1$. В отсутствие связи $m_1=m_2=0$ при разных начальных условиях процессы x и u не коррелированы. При ненулевой связи $m_1=m_2=t \neq 0$ системы синхронизируются в описанном выше смысле. При синхронизации пики спектра смещаются в низкочастотную область, т. е. синхронизация опять происходит на низких частотах автономной системы.

Проведенные исследования взаимодействия стохастических и периодических автоколебательных систем позволяют сделать вывод, что при этом возможен широкий класс эффектов: синхронизация, образование торов, стохастизация систем и т. д. Все эти эффекты происходят, как мы видели, в результате взаимодействий на низких частотах. Заметим также, что ни в одном из описанных случаев нам не удалось за счет внешнего воздействия расширить спектры стохастических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
2. Бабицкий В. И., Ланда П. С. — ДАН СССР, 1982, 266, № 5, с. 1087.
3. Ланда П. С., Ольховой А. Ф., Перминов С. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 5, с. 566.
4. Ольховой А. Ф., Перминов С. М. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 4787-83. Деп. от 29 августа 1983 г.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 марта 1984 г.

INTERACTION OF PERIODIC AND STOCHASTIC AUTOOSCILLATIONS

P. S. Landa, S. M. Perminov

The interaction of stochastic autooscillations with periodic and stochastic autooscillations is described in the article. The whole number of effects appears here: synchronization of stochastic and periodic autooscillations, appearance of quasi-periodic oscillations, stochastization of periodic autooscillations and so on.