9. Scappini F., Oka T. — J. Mol. Spectr., 1981, 85, p. 390.
10. Burenin A. V., Kazakov V. P., Krupnov A. F., Shapin S. M., Mel'nikov A. A. — J. Mol. Spectr., 1982, 94, p. 253.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
22 мая 1984 г.

УДК 538.56:519.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СМЕСИ СИГНАЛА И ШУМА НА ВЫХОДЕ КОРРЕЛЯТОРА

Н. В. Ласкин, А. С. Мазманишвили

1. Исследованию энергетического спектра процесса на выходе типового нелинейного звена, на вход которого действует нормальный случайный процесс, посвящен ряд работ (см. § 9 [1] и указанные там ссылки). Точные и приближенные методы решения таких задач описаны в монографии [1], следуя которой, в настоящей работе мы рассмотрели задачу о вероятностной структуре процесса на выходе коррелятора при прохождении через эту нелинейную систему смеси сигнала и нормального марковского процесса. В [2] задача, близкая к нашей, была подвергнута анализу, точные решения были получены только для простых частных случаев, таких, когда временной длительностью инерционного преобразования входных процессов можно пренебречь, кроме того рассматривались чисто шумовые процессы без аддитивного сигнала

Нами рассмотрен случай, когда временная эволюция шумовой компоненты описывается уравнением Ланжевена, часто используемым в приложениях [3] В качестве сигнальной компоненты использована произвольная квадратично интегрируемая функция. Производящую функцию (ПФ) процесса на выходе коррелятора удается выразить в терминах ПФ на выходе квадратора, для которой с помощью метода Каца—Фейнмана [5, 6] найдено явное выражение. Подобный подход был развит в [7, 8], его применение позволило выполнить точное вычисление статистических характеристик одноканального автокомпенсатора помех с корреляционной обратной связью

2. Образуем аддитивную смесь из сигнала $u(t)$ — произвольной детерминированной функции—и шума $x(t)$ — нормального марковского процесса, являющегося результатом прохождения белого шума f через интегрирующую цепь с постоянной ν, $\dot{x} + \nu x = f$. Статистические характеристики шума, являющегося нормальным марковским процессом, описываются с помощью переходной функции $w(x, t;\ x', t')$ следующего вида [3, 4]:

$$w(x, t; x', t') = [\pi\sigma_x(1-g^2)]^{-1/2}\exp\{-(x - x'g)^2[\sigma_x(1-g^2)]^{-1}\}, \tag{1}$$

где $\sigma_x = 2\langle x^2(t)\rangle$ и $g = \exp(-\nu|t-t'|)$. Пусть сигнал и шум поступают на вход коррелятора с конечным временем интегрирования T, тогда на выходе этого устройства будет сформирован процесс [1,2]

$$\eta_\tau(T) = \int\limits_0^T dt[x(t) + u(t)][x(t+\tau) + u(t+\tau)], \tag{2}$$

где τ — заданный временной сдвиг.

Статистическую структуру процесса $\eta_\tau(T)$ можно охарактеризовать с помощью производящей функции

$$Q_\tau(\lambda; x(t);\ u(t)) = \langle\exp[-\lambda\eta_\tau(T)]\rangle, \tag{3}$$

где λ — произвольный параметр, скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по всем реализациям $x(t)$ за время функционирования коррелятора Представим величину $\eta_\tau(T)$ в виде $\eta_\tau(T) = \eta_+ + \eta_-$, где

$$\eta_\pm = \pm\frac{1}{4}\int\limits_0^T dt[x(t) + u(t) \pm x(t+\tau) \pm u(t+\tau)]^2,$$

после чего можно показать, что $\langle\exp[-\lambda\eta_\tau(T)]\rangle = \langle\exp(-\lambda\eta_+)\rangle\langle\exp(-\lambda\eta_-)\rangle$. Последнее соотношение может быть представлено следующим образом:

$$Q_\tau(\lambda; x(t);\ u(t)) = Q_0(\lambda R_+; x(t), u_+(t))\, Q_0(\lambda R_-,\ x(t);\ u_-(t)), \tag{4}$$

где

$$R_\pm = \frac{1 \pm e^{-\nu\tau}}{2}, \qquad u_+(t) = \frac{u(t) + u(t+\tau)}{2}, \qquad u_-(t) = \frac{u(t) - u(t+\tau)}{2i},$$

$$Q_0(\lambda; x(t),\ u(t)) = \langle \exp\{-\lambda \int_0^T dt [x(t) + u(t)]^2\} \rangle.$$

Производящую функцию $Q_0(\lambda, x(t); u(t))$ можно определить с помощью метода, описанного в [5, 6], согласно которому Q_0 ищется в виде

$$Q_0(\lambda; x(t); u(t)) = \int dx_0 w(x_0) \int dx \psi(x, x_0; T),$$

где равновесная плотность $w(x_0) = (\pi\sigma_x)^{-1/2} \exp(-x_0^2/\sigma_x)$, а $\psi(x, x_0; T)$ — взятое в момент $t = T$ решение параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{\sigma_x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi - \lambda [x + u(t)]^2 \psi$$

с начальным условием $\psi(x, x_0; 0) = \delta(x - x_0)$.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для производящей функции (4)

$$Q_\tau(\lambda; x(t); u(t)) = \left(\frac{4\rho_+ \nu e^{\nu T}}{(\rho_+ + \nu)^2 e^{\rho_+ T} - (\rho_+ - \nu)^2 e^{-\rho_+ T}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{4\rho_- \nu e^{\nu T}}{(\rho_- + \nu)^2 e^{\rho_- T} - (\rho_- - \nu)^2 e^{-\rho_- T}}\right)^{1/2} \exp\left\{-\lambda \int_0^T dt\, u(t) u(t+\tau) + \right. \tag{5}$$

$$\left. + \lambda^2 \int_0^T dt \int_t^T dt' [U_+(t, t') + U_-(t, t')]\right\},$$

где

$$U_+(t, t') = \frac{2\sigma_x \nu (R_+^2/\rho_+)}{(\rho_+ + \nu)^2 e^{\rho_+ T} - (\rho_+ - \nu)^2 e^{-\rho_+ T}}\, u_+(t)\, u_+(t') \times$$

$$\times [(\rho_+ + \nu) e^{\rho_+ t} + (\rho_+ - \nu) e^{-\rho_+ t}]\ [(\rho_+ + \nu) e^{\rho_+ (T - t')} + (\rho_+ - \nu) e^{-\rho_+ (T - t')}],$$

$\rho_\pm = (\nu^2 + 2\lambda\sigma_x\nu R_\pm)^{1/2}$, а выражение для U_- получается из формулы для U_+ заменой R_+, u_+, ρ_+ на R_-, u_-, ρ_- соответственно

3. Результаты (5) содержат решение задачи, поскольку при помощи $Q_\tau(\lambda; x(t); u(t))$ можно определить как произвольные моменты случайной величины $\eta_\tau(T)$, так и плотность распределения $p(\eta_\tau)$, для которой Q_τ является лаплас-образом. Если отношение сигнала к шуму велико, то из (5) следует асимптотическое выражение для плотности распределения

$$p(\eta_\tau) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, S_\tau(T)} \exp\left[-\frac{(\eta_\tau - \langle \eta_\tau(T) \rangle)^2}{2S_\tau^2(T)}\right], \tag{6}$$

где

$$\langle \eta_\tau(T) \rangle = \frac{1}{2}\sigma_x T e^{-\nu\tau} + \int_0^T dt u(t) u(t+\tau),$$

$$S_\tau^2(T) = 2\sigma_x \int_0^T dt \int_t^T dt' [u(t) u(t'+\tau) + u(t') u(t+\tau)] e^{\nu(t-t')}.$$

Из (6) виден результат влияния шума на формирование плотности $p(\eta_\tau)$, заключающийся в смещении среднего $\langle \eta_\tau(T) \rangle$ и увеличении дисперсии $S_\tau^2(T)$ с ростом σ_x

тем эффективнее, чем меньше декремент, что физически отвечает помехе с большим временем корреляции $\tau_c = \nu^{-1}$. В общем случае для нахождения $p(\eta_\tau)$ необходимо найти лаплас-трансформанту от (5), само выражение для Q_τ имеет вид простых квадратур, легко вычисляемых для конкретных видов сигнальной функции $u(t)$.

Благодарим А. Н. Малахова и участников руководимого им семинара за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники — М.: Сов. радио, 1969
2. Lampard D. G. — IRE Trans., 1956, IT-2, № 1.
3. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии — М.: ИЛ, 1947.
4. Тихонов В. И, Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
5. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М: Мир, 1968.
6. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.
7. Мальцев А. А, Саичев А. И. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 12, с. 2543.
8. Дубков А. А, Мальцев А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 1, с. 107.

Поступила в редакцию
22 марта 1983 г.,
в окончательном варианте
16 июля 1984 г.

УДК 621.385.633

РЕЖИМ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ ОБРАТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В ПРОДОЛЬНОМ СТАТИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Е. Д. Белявский

В [1–3] описан режим работы приборов *О*-типа с захватом электронных сгустков полем электромагнитной волны большой амплитуды в случае, когда фазовая скорость волны совпадает по направлению с групповой скоростью. Такой режим работы характеризуется высоким значением КПД преобразования энергии статического поля в энергию бегущей волны (или обратного преобразования). В [4–6] предложены и описаны различные схемы реализации этого режима.

Данная работа посвящена исследованию режима захвата электронных сгустков электромагнитной волной в продольном статическом электрическом поле в случае, когда фазовая и групповая скорости имеют разные знаки (обратная волна). В этом случае также возможен эффективный обмен энергией между волной и статическим электрическим полем.

1. Исходные положения. Рассмотрим периодическую во времени последовательность протяженных электронных сгустков, захваченных продольной составляющей электромагнитного поля и распространяющихся вдоль оси z в статическом электрическом поле $E_{\text{ст}}$, ориентированном в этом направлении. Предположим. что групповая скорость электромагнитного поля направлена против движения сгустков электронов. а фазовая скорость синхронной пространственной гармоники этого поля совпадает по направлению со скоростью электронного потока. Если при этом пренебречь взаимодействием сгустков электронов со всеми несинхронными гармониками электромагнитного поля (одноволновое приближение), от все сказанное в [1, 2] о движении электронов остается справедливым и в случае обратной волны; при этом изменяется только характер нарастания (убывания) амплитуды синхронной волны (E), так как параметр связи $R=E^2/2P$ в случае обратной волны отрицателен (за счет обратного направления потока мощности).

Преобразование энергии в рассматриваемой распределенной системе описывается (в рамках адиабатической нелинейной теории [2]), так же как и в случае прямой волны, следующей системой нелинейных уравнений и неравенств:

$$E^2 = E_0^2 + 2R\, I_0 \int\limits_0^z E_{\text{ст}}\, dz; \qquad (1)$$