

УДК 621 385 6

ЭФФЕКТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ПОЛОГО РЕЗОНАТОРА СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВОЗБУЖДЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

М. И. Петелин

Развит аналитический метод (вариант преобразования Лапласа), позволяющий исследовать условия самовозбуждения колебаний в СВЧ автогенераторах, основанных на индуцированном тормозном излучении классических электронов-осцилляторов, с учетом кулоновского взаимодействия между частицами.

В высокочастотных генераторах и усилителях, основанных на индуцированном излучении возбужденных классических осцилляторов [1], в режимах большой мощности заметное влияние на структуру переменного поля и на работу прибора в целом оказывает пространственный заряд электронного потока. Результирующие эффекты довольно подробно изучены методами как линейной, так и нелинейной теории (см. [1-3] и цитированную там литературу). Однако что касается линейной теории генераторов типа монотрона (автогенератора с одним резонатором), то опубликованные (например, в [2, 3]) уравнения имеют вид простой с точки зрения численных расчетов (например, [2], § 8.6), но неудобный для аналитических исследований. Устранение последнего недостатка и является целью данного сообщения. Описываемый здесь метод аналогичен использованному в [4].

Теоретическая модель и исходные уравнения. Рассмотрим двумерную модель генератора (рис. 1), в которой параметры электродинамической системы и электронного потока зависят только от координат x и z . Высокочастотное поле $\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}^\omega(x, z)e^{i\omega t}\}$ представим в виде суммы вихревой и потенциальной составляющих:

$$\mathbf{E}^\omega = \mathbf{E}_{\text{вихр}} + \mathbf{E}_{\text{от}}. \quad (1)$$

Считая резонатор достаточно высокодобротным, вихревую составляющую поля будем считать совпадающей по структуре с одной из собственных мод резонатора $\mathbf{E}_{\text{вихр}} = A_s \mathbf{E}_s$. Структурную функцию $\mathbf{E}_s(x, z)$ будем считать чисто действительной, $\text{Im} \mathbf{E}_s = 0$, и нормированной на сечение резонатора в плоскости (x, z) : $\int_S \mathbf{E}_s^2 dx dz = S$. Считая электронный поток нерелятивистским, для коэффициента A_s имеем [5]

$$A_s = a_s / [2i(\omega - \omega_s) + \omega_s Q_s^{-1}]; \quad (2)$$

$$a_s = i\omega_s (4\pi/S) \int P^\omega \mathbf{E}_s dx dz. \quad (3)$$

Здесь ω_s и Q_s — собственная частота и добротность s -й моды, $\mathbf{P} = \text{Re}\{\mathbf{P}^\omega e^{i\omega t}\}$ — плотность дипольного момента электронного потока.

Предположим, что электронный поток в исходном состоянии однороден, а его толщина d мала по сравнению с характерным размером поперечной неоднородности высокочастотного поля λ_{\perp} ($d \ll \lambda_{\perp}$). Кроме того, будем считать, что высокочастотное поле на электронном потоке и индуцированная этим полем поляризация потока параллельны оси x , тогда

$$\int P^{\omega} E_s dx dz = d \int_{-\infty}^{\infty} P^{\omega} E_s dz. \quad (4)$$

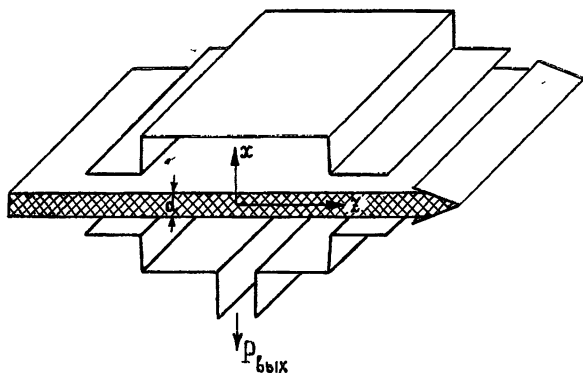


Рис. 1. Резонатор, возбуждаемый потоком электронов-осцилляторов

В такой модели легко связать с поляризацией электронного потока и потенциальную составляющую высокочастотного поля

$$E_{\text{пот}} = -4\pi P^{\omega}. \quad (5)$$

Спектральные преобразования. Представим высокочастотное поле и поляризацию электронного потока в виде интегралов Фурье:

$$\begin{Bmatrix} E^{\omega} \\ E_s \\ P^{\omega} \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_h \\ E_{s,h} \\ P_h \end{Bmatrix} e^{-ihz} dh. \quad (6)$$

Тогда в (4) интегрирование по z с использованием соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(h+h')z} dz = 2\pi\delta(h+h')$ сводится к интегрированию по спектральной переменной h , к свертке:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{\omega} E_s dz = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_h E_{s,-h} dh. \quad (7)$$

В рамках спектрального подхода вследствие однородности и стационарности потока электронов-осцилляторов спектральная составляющая дипольного момента P_h связана с соответствующей спектральной составляющей высокочастотного поля E_h коэффициентом, зависящим только от h и имеющим смысл восприимчивости электронного потока:

$$P_h = \chi_h E_h. \quad (8)$$

Учитывая разложение высокочастотного поля на вихревое и потенциальное (1), что эквивалентно соотношению $E_h = A_s E_{s,h} - 4\pi P_h$, можно связать поляризацию потока со спектральной составляющей вихревого поля

$$P_h = (\chi_h/\epsilon_h) A_s E_{s,h}, \quad (9)$$

где

$$\epsilon_h = 1 + 4\pi\chi_h \quad (10)$$

— диэлектрическая проницаемость электронного потока.

Собственные волны потока электронов-осцилляторов. Эффект отрицательной массы. Как следует из (9) или непосредственно из (1), (5) и (8), в электронном потоке высокочастотные колебания (волны) могут существовать и в отсутствие вихревого поля (собственного поля резонатора) $A_s E_s$, если

$$\epsilon_h = 0, \quad (11)$$

при этом $E_h = -4\pi P_h \neq 0$ (см. также [6]).

Рассмотрим поток осцилляторов простейшего типа, а именно, будем считать, что каждый электрон помещен в «свой» потенциальный желоб $u = u(x-x_0)$ и его движение подчиняется уравнениям

$$m\ddot{x} + du/dx = -eE; \quad (12)$$

$$z = z_0 + v_{\parallel} t; \quad (13)$$

размах колебаний $|x - x_0|_{\max}$ мал по сравнению с толщиной слоя d ; ведущие оси электронных траекторий $x = x_0$ внутри слоя распределены равномерно; в исходном состоянии все электроны обладают одинаковой колебательной энергией $\mathcal{E}_{\perp} = m(x^{(0)})^2/2 - eu$, а следовательно, одинаковой частотой колебаний $\omega_0(\mathcal{E}_{\perp})$ и равномерно распределены по фазам колебаний; статическое поле потока скомпенсировано ионным фоном*.

Уравнение (12) в линейном по высокочастотному полю приближении проинтегрировано методом вариации произвольных постоянных в [1]. На основании этого решения при резонансном воздействии высокочастотного поля на осциллирующие электроны

$$\omega \approx n\omega_0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (14)$$

$$|hv_{\parallel}| \ll \omega_0 \quad (15)$$

(последнее условие выполняется при достаточно длительном пролете электронов через резонатор) для восприимчивости потока χ_h имеем

$$\chi_h = -e^2 N n \omega_0 (d/d\mathcal{E}_{\perp}) (|x_n|^2 / (\omega - hv_{\parallel} - n\omega_0)), \quad (16)$$

где x_n — комплексная амплитуда n -й гармоники невозмущенных колебаний электронов $x^{(0)} - x_0 = \sum x_n e^{in\omega_0 t}$. Соответственно

$$\epsilon_h = 1 + \alpha/\delta + \beta/\delta^2, \quad (17)$$

где

$$\alpha = 4\pi e^2 N (n\omega_0/v_{\parallel}) (d|x_n|^2/d\mathcal{E}_{\perp}); \quad (18)$$

$$\beta = -4\pi e^2 N (n^2\omega_0^2/v_{\parallel}^2) |x_n|^2 (d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}); \quad (19)$$

* Такой ансамбль возбужденных классических осцилляторов в определенной мере моделирует слой возбужденной магнитоактивной плазмы (в котором собственные колебания описываются уравнением $\epsilon_{xx} = 0$ — ср. с (11)). Такой плазменный слой, в свою очередь, до некоторой степени моделирует электронный поток в гиротроне [2].

$$\delta = h - (\omega - n\omega_0)/v_{\parallel}. \quad (20)$$

В данном случае (11) есть квадратное уравнение с решениями

$$\delta_{\pm} = \delta_0 \pm \sqrt{D}, \quad (21)$$

где

$$\delta_0 = -\alpha/2, \quad D = \delta_0^2 - \beta. \quad (22)$$

Пусть $\text{Im } \omega = 0$. Тогда, если $D > 0$, то согласно (21) собственные волны потока обладают амплитудами, неизменными по длине. Если же $D < 0$, то у одной из волн амплитуда экспоненциально убывает, а у другой—экспоненциально нарастает. Последнее может иметь место только при $\beta > 0$, т. е. для осцилляторов, собственная частота которых убывает с ростом их энергии: $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp} < 0$. Экспоненциальный рост самосогласованных колебаний ансамбля таких осцилляторов есть проявление эффекта отрицательной массы [1, 6–8] — эффекта, аналогичного притяжению сгустков в прямолинейном электронном потоке, пронизывающем плазму с диэлектрической проницаемостью $\epsilon < 0$ и тангенциальной неустойчивостью в гидродинамике (см., например, [4]).

Собственная частота резонатора, пронизываемого потоком электронов-осцилляторов. Условия самовозбуждения автоколебаний. Если электронный поток на входе в резонатор не модулирован, то самосогласованная система уравнений (2)—(4), (7), 9) имеет нетривиальное решение при

$$\omega - \omega_s - i\omega_s/2Q_s = -I, \quad (23)$$

где

$$I = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_h/\epsilon_h) \omega d h; \quad (24)$$

$$\omega = \pi\omega_s(d/S) E_s, h E_s, -h. \quad (25)$$

Фактор возбуждения резонатора электронным потоком (24) с учетом (10), (17) можно записать следующим образом:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [K d h / (\delta^2 + \alpha\delta + \beta)], \quad (26)$$

где $K = (\alpha\delta + \beta)\omega$, или

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K d \delta}{(\delta - \delta_+)(\delta - \delta_-)} = \frac{1}{2\sqrt{D}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{K}{\delta - \delta_+} - \frac{K}{\delta - \delta_-} \right) d\delta. \quad (27)$$

Как следует из (23), электромагнитные колебания в резонаторе могут быть незатухающими ($\text{Im } \omega \leq 0$) лишь при достаточно большой плотности электронного потока N или при достаточно высокой добротности резонатора Q . Стартовые условия, определяемые соотношением (23), если положить в нем $\text{Im } \omega = 0$, могут быть записаны в виде «баланса активных и реактивных мощностей»:

$$\omega_s/2Q_s = \text{Im } I; \quad (28)$$

$$\omega - \omega_s = -\text{Re } I. \quad (29)$$

В дальнейшем будем анализировать только первое из этих соотношений, имея в виду, что второму можно всегда удовлетворить подбором свободного параметра—расстройки $\omega_s - n\omega_0$.

Необходимо заметить, что выражение для восприимчивости электронного потока (16) получено [1] в предположении о том, что поле, действующее на электрон, экспоненциально убывает при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом, в (27) можно производить интегрирование по действительным δ лишь при условии, что $\text{Im } \omega$ — отрицательная величина, настолько большая, что полюса подынтегрального выражения $\delta = \delta_+$ и $\delta = \delta_-$ располагаются в нижней части плоскости δ . Чтобы функция I сохраняла аналитичность при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$, необходимо контур интегрирования по δ смещать в комплексной плоскости так, чтобы он по-прежнему огибал особенности подынтегрального выражения сверху (по существу здесь, так же как в [4] и в известной работе Ландау [9], использован вариант преобразования Лапласа—см., например, [10]).

Влияние кулоновского взаимодействия между электронами на самовозбуждение генератора. Естественно предположить, что взаимодействие собственного поля резонатора с собственными волнами электронного потока существенно зависит от того, обладают ли эти волны на частоте самовозбуждения генератора действительными (при кулоновском расталкивании электронных сгустков, $D > 0$) или комплексносопряженными (при кулоновском «притяжении» электронных сгустков, $D < 0$) постоянными распространения. Контур интегрирования, соответствующие этим двум случаям при $\text{Im } \omega = 0$, изображены на рис. 2 (ср. с рис. 5 из [4]). Таким образом, $\text{Re } I$ определяется формулой (27), где интегрирование производится по действительной оси δ (в случае $D > 0$ интеграл берется в смысле главного значения), а выражения для $\text{Im } I$ имеют вид

$$\text{при } D > 0 \quad (\sqrt{D} = |\sqrt{D}|) \\ \text{Im } I = -(\pi/2\sqrt{D}) [K(\delta_+) - K(\delta_-)], \quad (30)$$

$$\text{при } D < 0 \quad (\sqrt{D} = i|\sqrt{D}|) \\ \text{Im } I = -\pi \text{Re}[K(\delta_+)/\sqrt{D}]. \quad (31)$$

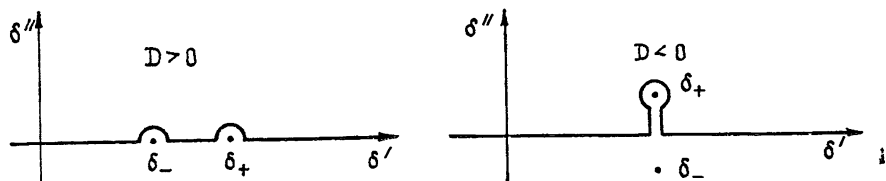


Рис. 2. Варианты контура интегрирования в комплексной плоскости $\delta = \delta' + i\delta''$ в условиях расталкивания ($D > 0$) и «притяжения» ($D < 0$) электронных сгустков.

Полагая плотность электронного потока не слишком высокой ($D \rightarrow 0$), разложим (30) и (31) в ряды по степеням D . Учитывая, что

$$K(\delta_{\pm}) = K_0 \pm \sqrt{D} K'_0 + (1/2)(\sqrt{D})^2 K''_0 \pm (1/6)(\sqrt{D})^3 K'''_0 + \dots,$$

где $K_0 = K(\delta_0)$, а штрих обозначает дифференцирование по δ_0 , на основании как (30), так и (31) приходим к общему по форме выражению:

$$\text{Im } I \approx -\pi (K'_0 + (D/6) K'''_0). \quad (32)$$

При $N \rightarrow 0$ $K'_0 \rightarrow (\alpha\omega + \beta\omega')_{\delta=0}$. Соответствующее предельное выражение для I легко получить непосредственно из соотношения (24),

если в знаменателе под интегралом положить $\varepsilon = 1$. Заметим, что условие $\delta = 0$ эквивалентно резонансному условию $\omega - h\nu_{\parallel} = n\omega_0$.

Поскольку в (32) член с K_0''' можно учитывать лишь как поправку к основному члену с K_0' , то условия самовозбуждения генератора наиболее облегчены при таких расстройках резонанса, когда K_0' принимает экстремальное значение (минимальное или максимальное в зависимости от знака $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}$). Поскольку в такой экстремальной точке производная $K_0''' = (K_0')''$ противоположна по знаку K_0' , то, как следует из (32), приращение $\text{Im } I$ противоположно по знаку D . Таким образом, кулоновское расталкивание электронных сгустков ($D > 0$) затрудняет, а кулоновское «притяжение» электронных сгустков (т. е. неустойчивость отрицательной массы, $D < 0$) облегчает самовозбуждение генератора*. Последнее согласуется с результатами численных расчетов [2] (см. также рис. 3).

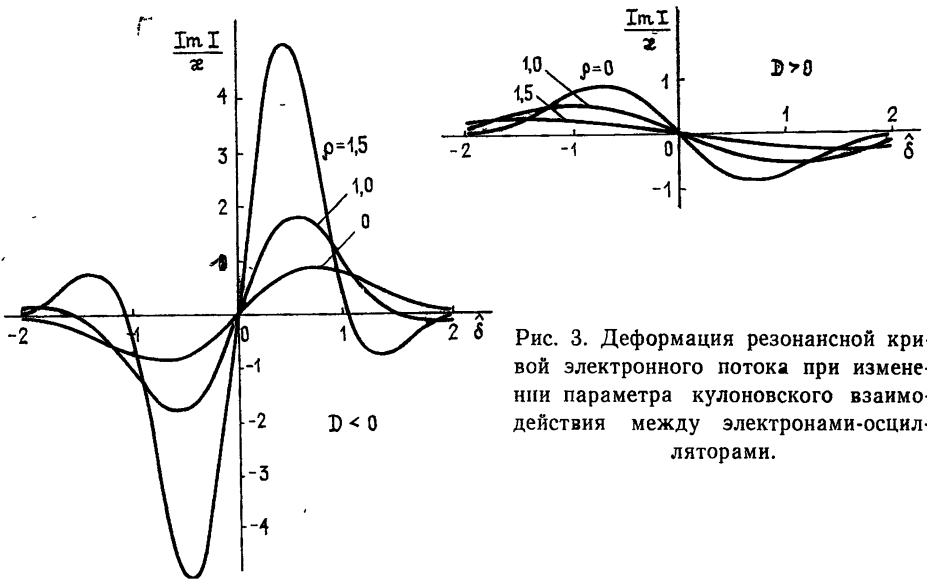


Рис. 3. Деформация резонансной кривой электронного потока при изменении параметра кулоновского взаимодействия между электронами-осцилляторами.

При больших значениях параметра кулоновского взаимодействия D проявляются эффекты, дополнительные к тем, которые следуют из (32). В качестве примера рассмотрим моду с гауссовым распределением высокочастотного поля $E_s = B \exp[-(2z/L)^2]$ и, соответственно, со спектральной плотностью

$$\omega = \omega_s(d/S) (B^2 L^2 / 16) \exp[-2(hL/4)^2].$$

Предположим, что неизохронность электронов-осцилляторов, определяемая произведением $(d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp})L$, достаточно велика, $\beta L \gg \alpha$. Тогда $K \approx \beta\omega$ и согласно (30) и (31) при $D > 0$

* Эти эффекты подобны имеющим место при взаимодействии потоков электронов-осцилляторов (например, электронов, вращающихся в магнитном поле) с бегущими электромагнитными волнами (см., например, литературу, цитированную в обзоре [4]). Устройства последнего рода можно моделировать системой типа изображенной на рис. 1, но с заменой резонатора на волновод, образованный бесконечными параллельными плоскостями. Здесь постоянная распространения волны смещена относительно ее «холодного» значения на $h-h_0 = 4\pi(\chi_h/\varepsilon_h)g$, где g — геометрический фактор. При большой неизохронности осцилляторов ($\beta \gg \alpha\delta$) это уравнение согласно (16)—(20) сводится к уравнению ЛБВ $(h-h_0)(\delta^2 + \beta) = g\beta$, из которого следует, что при одной и той же величине $|\beta|$ инкремент нарастающей волны $\text{Im } h$ в случае $\beta < 0$ (т. е. при $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp} > 0$) меньше, чем при $\beta > 0$ (т. е. при $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp} \leq 0$).

$$\operatorname{Im} I = (\kappa/2\rho) \{ \exp[-(\hat{\delta} + \rho)^2] - \exp[-(\hat{\delta} - \rho)^2] \},$$

при $D < 0$

$$\operatorname{Im} I = (\kappa/\rho) \exp(\rho^2 - \hat{\delta}^2) \sin 2\rho\hat{\delta},$$

где

$$\kappa = \frac{\pi}{32\sqrt{2}} \omega_s \frac{dL^3}{S} |\beta| B^2, \quad \rho = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|D|}{2}},$$

$$\hat{\delta} = (\omega - n\omega_0 + \delta_0 v_{\parallel}) (L/v_{\parallel} 2\sqrt{2}).$$

При исчезающе малом кулоновском взаимодействии ($\rho \rightarrow 0$) выражения для $\operatorname{Im} I$ имеют асимптотику $\operatorname{Im} I \rightarrow -2\kappa\hat{\delta} \exp(-\hat{\delta}^2) \operatorname{sgn} D$. С ростом $|D|$, а следовательно, и параметра ρ : а) при кулоновском расталкивании электронных сгустков (рис. 3, $D > 0$) экстремумы резонансной кривой

$\operatorname{Im} I(\hat{\delta})$ раздвигаются между собой, и она превращается в сочетание изолированных друг от друга зон, в каждой из которых поле резонатора взаимодействует с какой-либо одной из волн электронного потока (несущей либо положительную, либо отрицательную энергию); б) при кулоновском притяжении электронных сгустков (рис. 3, $D < 0$) экстремумы резонансной кривой сближаются, а ее крылья приобретают знакопеременные осцилляции. С ростом неизохронности осцилляторов (производной $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}$, входящей в κ и ρ) максимальное значение $\operatorname{Im} I$ растет: а) при $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp} > 0$ как $\sqrt{N d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}}$; б) при $d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp} < 0$ как $\sqrt{N |d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}|} \exp(\mu N |d\omega_0/d\mathcal{E}_{\perp}|)$, где μ — положительная константа.

В заключение отметим, что описанная здесь методика учета собственного (кулоновского) поля электронного потока может быть распространена и на более сложные теоретические модели высокочастотных генераторов, основанных на индуцированном излучении возбужденных классических электронов-осцилляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 9—10, с. 1414.
2. Кураев А. А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ — Минск: Наука и техника, 1979.
3. Гиротрон. / Ред. А. В. Гапонов-Грехов — Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
4. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. — В сб.: Нелинейные волны — М.: Наука, 1979, с. 68.
5. Петелин М. И., Юлпатов В. К. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 2, с. 290.
6. Братман В. Л. — ЖТФ, 1976, 46, № 10, с. 2030.
7. Nielsen C. E., Sessler A. M. — Rev. Sci. Instrum., 1959, 30, № 2, p. 80.
8. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. — Атомная энергия, 1959, 7, № 6, с. 549.
9. Ландау Л. Д. — ЖЭТФ, 1946, 16, № 7, с. 574.
10. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1965.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
30 декабря 1983 г.,
после доработки
19 июня 1984 г.

EXCITATION OF A CAVITY BY A STATIONARY FLOW OF EXCITED CLASSICAL OSCILLATORS: SPACE CHARGE EFFECTS

M. I. Petelin

For UHF autooscillators based on the stimulated bremsstrahlung radiation of classical electron oscillators a version of the Laplace transformation method is used to investigate the self-excitation of electromagnetic modes with account of the Coulomb interaction of particles.