Том XXVIII, № 3 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538 566.2

О БАЛАНСЕ ЭНЕРГИЙ В ПРОЦЕССАХ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. В. Владимиров, В. Н. Цытович

Показано, что для переходного излучения, возникающего при пересечении зарядом с произвольной скоростью границы раздела двух непоглощающих сред, соблюдается баланс энергий.

1. Рассмотрим переходное излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела двух непоглощающих сред. Известно, что работа поля переходного излучения над зарядом не равна энергии, излученной зарядом, так как в балансе энергий существенную роль играет изменение собственной энергии заряда в среде — так называемая макроскопическая перенормировка массы [1]. Этот баланс энергий был доказан только для случая ультрарелятивистских скоростей частицы, когда вклад в поле излучения дают электромагнитные волны с частотами

$$\omega \gg \omega_{pe}, \tag{1}$$

где $\omega_{pe} = (4\pi n e^2/m_e)^{1/2}$ — плазменная частота, и, следовательно, для любых сред можно использовать плазменную формулу для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_{pe}^2/\omega^2). \tag{2}$$

В этих условиях энергия переходного излучения W^r, например при влете частицы из вакуума в среду, равна

$$W^r = \frac{1}{3}\,\frac{q^2\omega_{pe}}{c}\,\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}, \tag{3}$$

где q — заряд частицы, $\mathscr{E}$ — ее энергия, M — масса. В том же приближении было получено, что изменение собственной энергии ΔW^q при пересечении зарядом границы раздела вакуум — среда составляет

$$\Delta W^q = -(q^2\omega_{pe}/c)\,(\mathscr{E}/Mc^2). \tag{4}$$

По соображениям баланса энергий, при влете частицы в среду поле должно совершать над частицей работу

$$W^f = -(\Delta W^q + W^r) = \frac{2}{3}\,\frac{q^2\omega_{pe}}{c}\,\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \tag{5}$$

Так как $W^f > 0$, то, излучая, частица получает дополнительную энергию W^f, а не теряет ее. Таким образом, влетая в среду, частица может ускоряться. Рассматривая же движение с постоянной скоростью (как это обычно и делается), мы должны предположить, что либо частица формально обладает бесконечно большой массой, либо ее скорость поддерживается внешними источниками. Тогда работа (5) совершается над внешними источниками. Непосредственный расчет W^f [1] показывает, что работа, совершаемая полем, как раз равна (5), т. е. баланс энергий для ультрарелятивистских частиц $\mathscr{E} \gg Mc^2$ действительно соблюдается.

Приведенный пример показывает физическую нетривиальность проблемы баланса энергий при переходном излучении.

В общем случае произвольных скоростей частицы (т. е. включая и нерелятивистские скорости) вопрос о балансе энергий до сих пор не рассматривался. Причиной является тот факт, что для нерелятивистских частиц нельзя использовать плазменную формулу (2), поскольку максимальный вклад в энергию излучения уже не приходится на интервал (1), и, следовательно, соотношения (3), (4) и (5) не справедливы. Для произвольных же $\varepsilon(\omega)$ задача намного усложняется, так как требуется проведение более сложного интегрирования по углам в выражении для мощности излучения (частица уже излучает почти одинаково во всем телесном угле, а не только в направлении, близком в основном к направлению скорости частицы, что имело место при $\mathscr{E} \gg Mc^2$), не говоря уже об интегрировании по частотам, которое для произвольных $\varepsilon(\omega)$ выполнить нельзя. Помимо этого, сравнимый вклад в работу дают члены, связанные с полями, локализованными у границы (для $\mathscr{E} \gg Mc^2$ они относительно малы). И, наконец, в общем случае необходимо учесть энергию излучения и работу полей поверхностных волн, которые хотя и являются малыми по сравнению с (3), (4) и (5) для ультрарелятивистских частиц, но будут того же порядка, что и W^r, ΔW^q и W^f для нерелятивистских частиц.

Задачей настоящей работы является установление баланса энергий для частиц произвольных скоростей v при пересечении границы раздела двух непоглощающих сред с произвольными $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ в случае, когда условие Вавилова—Черенкова не выполнено в обоих средах ($\beta = v/c$):

$$\beta^2\varepsilon_1(\omega) < 1, \quad \beta^2\varepsilon_2(\omega) < 1. \tag{6}$$

Мы покажем, что хотя отдельно работа сил, интенсивность и изменение энергии собственного поля частицы для произвольных $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ не вычисляются в явном виде, их сумма может быть приведена к виду, из которого следует соблюдение баланса энергий. При этом существенным оказывается учет членов, содержащих $\partial\varepsilon(\omega)/\partial\omega$, в выражении для изменения энергии собственного поля частицы (они малы по параметру $Mc^2/\mathscr{E}$ для ультрарелятивистских частиц). Оказывается возможным выразить вклад этих членов через соотношения, не содержащие $\partial\varepsilon(\omega)/\partial\omega$. Наконец, будет показано, что работа поля излучения поверхностных волн над частицей равна энергии, излученной в виде поверхностных волн.

2. Рассмотрим частицу с зарядом q, пересекающую с постоянной скоростью $v = v_z$ плоскую границу раздела $z = 0$ двух непоглощающих сред *1* и *2*, диэлектрические проницаемости которых есть $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Полное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удобно разделить на «собственное поле» $\mathbf{E}^q$, $\mathbf{H}^q$ и «свободное поле» $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{H}^r$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^q + \mathbf{E}^r, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^q + \mathbf{H}^r. \tag{7}$$

Собственное поле $\mathbf{E}^q$, $\mathbf{H}^q$ здесь по определению соответствует тому значению, которое было бы, если среда *1* либо среда *2* занимала бы все пространство. Отметим, что вблизи границы (на расстояниях порядка длины формирования переходного излучения [1]) это разделение полного поля представляет собой формальную операцию. На больших расстояниях от границы, однако, такое разделение не формально, поскольку полное поле фактически разделено на собственное поле частицы и поле переходного излучения. Запишем выражения для z-компоненты E^q и E^r собственного и свободного поля [1]:

$$E^q_{1,2,\omega,\varkappa}(z) = -\frac{4\pi i q}{(2\pi)^3\omega} a^q_{1,2}(\omega, \xi) \exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right); \tag{8}$$

$$E^r_{1,2,\omega,\varkappa}(z) = \frac{4\pi i q}{(2\pi)^3\omega} a^r_{1,2}(\omega, \xi) \exp\left[\mp i\frac{\omega}{v}z\sqrt{\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega) - \xi}\right], \tag{9}$$

где $E_{\omega,\varkappa}(z) = (2\pi)^{-3}\int E(\boldsymbol{r}, t)\exp(i\omega t - i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}_\perp)\,dt d\boldsymbol{r}_\perp$ — фурье-компонента поля по времени и $\boldsymbol{r}_\perp$, $\boldsymbol{\varkappa}$ — волновой вектор, лежащий в плоскости, параллельной границе, $\xi = \varkappa^2 v^2/\omega^2$, а амплитуды собственного $a^q_{1,2}(\omega, \xi)$ и свободного $a^r_{1,2}(\omega, \xi)$ поля в средах *1* и *2* равны

$$a^q_{1,2}(\omega, \xi) = [1-\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega)]/\varepsilon_{1,2}(\omega)[1-\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega)+\xi]; \tag{10}$$

$$a^r_1(\omega, \xi) = \frac{-\xi}{\varepsilon_1(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi} + \varepsilon_2(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}} \times$$
$$\times\left[\frac{1-\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}}{1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi} - \frac{(\varepsilon_2(\omega)/\varepsilon_1(\omega)) - \sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}}{1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi}\right]; \tag{11}$$

$$a^r_2(\omega, \xi) = \frac{\xi}{\varepsilon_1(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi} + \varepsilon_2(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}} \times$$
$$\times\left[\frac{1+\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}{1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi} - \frac{(\varepsilon_1(\omega)/\varepsilon_2(\omega)) + \sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}{1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi}\right]. \tag{12}$$

Для установления баланса энергий нам нужно учесть следующие величины: работу свободных полей W^{fr}, энергию переходного излучения W^r, изменение энергии собственного поля заряда ΔW^q, работу собственного поля W^{fq}, а также энергию переходного излучения W^r_s и работу полей W^f_s поверхностных волн. Следует заметить, что, поскольку работа совершается на расстояниях, меньших длины формирования переходного излучения, деление работы полного поля W^f на работу свободных полей W^{fr} и работу собственного поля W^{fq} весьма условно в силу условности разделения полного поля вблизи границы.

Выражение для работы свободных полей над зарядом имеет вид [1]

$$W^{fr} = \frac{q^2}{\pi v}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_0^\infty d\xi\, \mathrm{Re}\left[\frac{a^r_2(\omega, \xi)}{1-\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}} - \frac{a^r_1(\omega, \xi)}{1+\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}\right]. \tag{13}$$

Свободные поля не всегда описывают поле излучения. Они соответствуют полю излучения только при $\xi < \beta^2\varepsilon(\omega)$ и, следовательно, той области частот, для которой $\varepsilon(\omega) > 0$. Но работа свободного поля и в случае $\xi > \beta^2\varepsilon(\omega)$ не равна нулю (хотя при $\mathscr{E} \gg Mc^2$ ею можно пренебречь). Такие поля локализованы у границы, что связано либо с полным внутренним отражением волн в одной из сред, либо с поверхностными волнами, либо с полем изображения. В частности, если $\beta \to 0$ или при $\xi \gg \beta^2\varepsilon(\omega)$, из (11) и (12) получим поле квазистатического изображения. Выражение (13) описывает поэтому и работу полей изображения над зарядом, которая не связана ни с поверхностными волнами, ни с волнами, испытавшими полное внутреннее отражение от границы раздела.

Энергия объемных волн, излученных в среду *1* и в среду *2*, имеет вид

$$W^r = \frac{q^2}{\pi v}\int_0^\infty d\omega \int_0^{\beta^2\varepsilon_1(\omega)} \frac{d\xi}{\xi}\, \varepsilon_1(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}\,|a_1^r(\omega,\xi)|^2 + \frac{q^2}{\pi v}\int_0^\infty d\omega \int_0^{\beta^2\varepsilon_2(\omega)} \frac{d\xi}{\xi}\, \varepsilon_2(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}\,|a_2^r(\omega,\xi)|^2, \tag{14}$$

а энергия излученных поверхностных волн есть

$$W_s^r = \frac{2q^2}{c}\beta^2 \int\limits_{-\varepsilon_{1,2}(\omega)>\varepsilon_{2,1}(\omega)>0} d\omega\, \frac{|\varepsilon_1(\omega)\,\varepsilon_2(\omega)|}{\sqrt{|\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)|}} \times \frac{|\varepsilon_1(\omega)-\varepsilon_2(\omega)|\,(1+\beta^2\,|\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)|)}{(|\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)|+\beta^2\varepsilon_1^2(\omega))\,(|\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)|+\beta^2\varepsilon_2^2(\omega))}. \tag{15}$$

Выражение для энергии собственного поля W^q в среде *1* или среде *2* имеет вид

$$W^q = \frac{1}{8\pi}\int dr\left[(H_{1,2}^q)^2 + 2\int_{-\infty}^{t} E_{1,2}^q\,\frac{\partial D_{1,2}^q}{\partial t}\,dt\right]. \tag{16}$$

После подстановки выражения (8) в (16) получим

$$W_{1,2}^q = \pi^2 v\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\varkappa \left[\frac{4\pi q}{(2\pi)^3\,\omega}\,a_{1,2}^q(\omega,\xi)\right]^2 \times \left\{\varepsilon_{1,2}(\omega)\left[1+\xi\,\frac{1+\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega)}{(1-\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega))^2}\right] + \omega\,\frac{\partial\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\partial\omega}\left[1+\frac{\xi}{(1-\beta^2\varepsilon_{1,2}(\omega))^2}\right]\right\}. \tag{17}$$

Подставив же (10) в (17), получаем для изменения энергии собственного поля выражение

$$\Delta W^q = \frac{q^2}{2\pi v}\int_0^\infty d\omega\int_0^\infty d\xi \times \left[\frac{(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega))^2+\xi\,(1+\beta^2\varepsilon_2(\omega))}{\varepsilon_2(\omega)\,(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2} - \frac{(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega))^2+\xi\,(1+\beta^2\varepsilon_1(\omega))}{\varepsilon_1(\omega)\,(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2} + \omega\,\frac{\partial\varepsilon_2(\omega)}{\partial\omega}\,\frac{(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_2^2(\omega)\,(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2} - \omega\,\frac{\partial\varepsilon_1(\omega)}{\partial\omega}\,\frac{(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_1^2(\omega)\,(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2}\right]. \tag{18}$$

Для работы собственного поля W^{fq} имеем

$$W^{fq} = \int d\mathbf{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, (j^q E^q) = (2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \times$$

$$\times \int d\omega\, d\omega'\, d\varkappa\, j^q_{\omega,\varkappa}(z)\, E^q_{\omega',-\varkappa}(z) \exp\left[-i(\omega+\omega')t\right], \tag{19}$$

где $E^q_{\omega,\varkappa}(z)$ определяется соотношением (8), а

$$j^q_{\omega,\varkappa}(z) = q(2\pi)^{-3} e^{i\omega z/v} \tag{20}$$

есть фурье-компонента плотности тока заряженной частицы, спроектированной на направление ее движения. При наличии границы раздела $z=0$ при интегрировании по $z<0$ мы должны подставить $E^q_{1,\omega,\varkappa}(z)$, а при интегрировании по $z>0$ — соответственно $E^q_{2,\omega,\varkappa}(z)$. Получаем

$$W^{fq} = -\frac{q^2}{4\pi v} \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \times$$

$$\times \int d\omega\, d\omega' \left[\frac{\omega}{\omega+\omega'}\left(a^q_1(\omega,\xi) - a^q_2(\omega,\xi)\right)\right] \exp\{-i(\omega+\omega')t\}. \tag{21}$$

Симметризуя подынтегральное выражение по ω и ω' и учитывая, что после интегрирования по t возникает $\delta(\omega+\omega')$ (т. е. $\omega\to\omega'$ при $\xi=\mathrm{const}$), раскрывая соответствующую неопределенность и переходя к интегрированию по положительным частотам, получим

$$W^{fq} = -\frac{q^2}{2\pi v} \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\infty} d\omega \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega a^q_1(\omega,\xi) - \omega a^q_2(\omega,\xi)\right). \tag{22}$$

Подставив выражение для $a^q_{1,2}(\omega,\xi)$ из (10), имеем

$$W^{fq} = \frac{q^2}{2\pi v} \int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} d\xi \left[\frac{1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2} - \frac{1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_1(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2} + \right.$$

$$\left. + \omega \frac{\partial\varepsilon_1(\omega)}{\partial\omega} \frac{(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_1^2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2} - \omega \frac{\partial\varepsilon_2(\omega)}{\partial\omega} \frac{(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_2^2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2}\right]. \tag{23}$$

Уже из (22) видно, что работа W^{fq} равна нулю. Этот факт позволяет нам избавиться от членов, содержащих $\partial\varepsilon(\omega)/\partial\omega$, в выражении для изменения энергии собственного поля частицы (18). Действительно, складывая (18) и (23), получаем

$$\Delta W^q = \frac{q^2}{\pi v} \int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} d\xi \left[\frac{(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega))^2+\xi}{\varepsilon_1(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2}\right]. \tag{24}$$

В получившемся выражении выпали члены, пропорциональные $\partial\varepsilon(\omega)/\partial\omega$. Следует отметить, что, в отличие от работы собственного поля W^{fq}, изменение энергии собственного поля ΔW^q имеет прямой физический смысл — это разность энергий собственного поля частицы, вычисленного на расстояниях, много бо́льших длины формирования переходного излучения, когда собственное поле частицы наблюдаемо в «чистом» виде.

Если частица влетает из вакуума в среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, описываемой формулой (2), то в общем случае произвольных скоростей выражение (24) можно проинтегрировать по ξ и по ω, в итоге имеем

$$\Delta W^q = -\frac{q^2}{v}\omega_{pe}\left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-1}\right]. \tag{25}$$

В ультрарелятивистском пределе

$$\Delta W^q = -\frac{q^2\omega_{pe}}{c}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}, \tag{26}$$

что совпадает с (4). В нерелятивистском пределе

$$\Delta W^q = -\frac{1}{3}\frac{q^2}{c}\beta^2\omega_{pe}. \tag{27}$$

3. Рассмотрим эффекты, связанные со свободным полем. Вычислить непосредственно выражения (13) и (14) трудно, однако их сумма довольно легко представляется в виде, аналогичном (24). Складывая (13) и (14) до интегрирования по частотам и углам, нужно иметь в виду, что на всем интервале частот ω возможны различные знаковые соотношения между $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, отвечающие различным физическим ситуациям. На всем частотном интервале могут реализоваться следующие неравенства: $\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0$, $\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$, $\varepsilon_1(\omega)>-\varepsilon_2(\omega)>0$, $\varepsilon_2(\omega)>-\varepsilon_1(\omega)>0$, $-\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0$, $-\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$, $\varepsilon_1(\omega)\leqslant 0$, $\varepsilon_2(\omega)\leqslant 0$.

Рассмотрим частотный интервал, на котором $\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0$. Имеем

$$\begin{aligned}
W^r + W^{fr} = {} & \frac{q^2}{\pi v}\int\limits_{\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0} d\omega \int\limits_0^{\beta^2\varepsilon_2(\omega)} d\xi\left\{\frac{\varepsilon_2(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}}{\xi}[a_2^r(\omega,\xi)]^2 + \right.\\
& + \frac{\varepsilon_1(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}{\xi}[a_1^r(\omega,\xi)]^2 + \left[\frac{a_2^r(\omega,\xi)}{1-\sqrt{\beta^2\varepsilon_2(\omega)-\xi}} - \right.\\
& \left.\left. - \frac{a_1^r(\omega,\xi)}{1+\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}\right]\right\} + \frac{q^2}{\pi v}\int\limits_{\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0} d\omega\int\limits_{\beta^2\varepsilon_2(\omega)}^{\beta^2\varepsilon_1(\omega)} d\xi\left\{\frac{\varepsilon_1(\omega)\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}{\xi}\times\right.\\
& \times |a_1^r(\omega,\xi)|^2 + \operatorname{Re}\left[\frac{a_2^r(\omega,\xi)}{1-i(\omega/|\omega|)\sqrt{\xi-\beta^2\varepsilon_2(\omega)}} - \left.\frac{a_1^r(\omega,\xi)}{1+\sqrt{\beta^2\varepsilon_1(\omega)-\xi}}\right]\right\} + \\
& + \frac{q^2}{\pi v}\int\limits_{\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0} d\omega\int\limits_{\beta^2\varepsilon_1(\omega)}^{\infty} d\xi\operatorname{Re}\left[\frac{a_2^r(\omega,\xi)}{1-i(\omega/|\omega|)\sqrt{\xi-\beta^2\varepsilon_2(\omega)}} - \right.
\end{aligned} \tag{28}$$

$$- \frac{a_1^r(\omega, \xi)}{1 + i(\omega/|\omega|)\sqrt{\xi - \beta^2\varepsilon_1(\omega)}}\Bigg].$$

В этом выражении первый интеграл есть сумма, во-первых, полной энергии волн, излученных зарядом в среду *2*, во-вторых, энергии волн, излученных в среду *1* и не испытавших полного внутреннего отражения от среды *2*, и, наконец, работы над зарядом, производимой всеми этими волнами. Второй интеграл в (28) представляет собой сумму энергии волн, испытавших полное внутреннее отражение от среды *2* и ушедших в среду *1*, и работы над зарядом, производимой этими волнами. Третий интеграл (28) есть работа полей, локализованных у границы, т. е. работа полей изображения над зарядом, так как поверхностные волны в этом случае распространяться не могут в силу принятых условий $\varepsilon_1(\omega)>0$, $\varepsilon_2(\omega)>0$. Вычисление дает

$$W^r + W^{fr} = \frac{q^2}{\pi v}\int\limits_{\varepsilon_1(\omega)>\varepsilon_2(\omega)>0} d\omega \int\limits_0^\infty d\xi \Bigg[\frac{\xi}{\varepsilon_1(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2} - \frac{\xi}{\varepsilon_2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2}\Bigg]. \tag{29}$$

Случай $\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$ аналогичен первому с заменой $\varepsilon_1(\omega)$ на $\varepsilon_2(\omega)$, v на $-v$. Поэтому в этом случае получается соотношение (29), в котором интегрирование проводится по частотному интервалу, соответствующему условию $\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$. Для частотного интервала, где $\varepsilon_2(\omega)<0$, излучение объемных волн возможно только в среду *1*. Если $\varepsilon_1(\omega)>-\varepsilon_2(\omega)>0$, то мы получим выражение (29) с областью интегрирования по частотам, определяемой этим неравенством, в котором просуммированы энергия, излученная зарядом в среду *1*, работа полей излучения над зарядом и работа полей, локализованных у границы. Делая замену $\varepsilon_1(\omega)$ на $\varepsilon_2(\omega)$, v на $-v$, убеждаемся, что и в случае $\varepsilon_2(\omega)>-\varepsilon_1(\omega)>0$ подынтегральное выражение имеет тот же вид, что и в (29). В случае $-\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$ необходимо уже учитывать возможность излучения поверхностных волн. Поверхностным волнам соответствует обращение в нуль поверхностного импеданса $\zeta(\omega,\xi)$, где

$$\zeta(\omega,\xi) = \varepsilon_2(\omega)\sqrt{\xi-\beta^2\varepsilon_1(\omega)} + \varepsilon_1(\omega)\sqrt{\xi-\beta^2\varepsilon_2(\omega)}, \tag{30}$$

который фигурирует в знаменателях выражений для амплитуд (11) и (12). Поэтому при интегрировании по ξ считаем, что $\zeta(\omega,\xi)$ имеет бесконечно малую мнимую часть, и воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\zeta(\omega,\xi)} = P\left(\frac{1}{\zeta(\omega,\xi)}\right) - i\pi(\omega/|\omega|)\,\delta(\zeta(\omega,\xi)), \tag{31}$$

где $P(1/\zeta)$ — символ главного значения. Вычисляя сперва интеграл в смысле главного значения, получаем выражение (29) с областью интегрирования по частотам, определяемой неравенством $-\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0$, в котором просуммированы энергия излученных в среду *1* волн, работа над зарядом, производимая этими волнами, и работа полей, локализованных у границы. Далее, выделяя член с δ-функцией, который соответствует работе полей поверхностных волн, имеем

$$W_s^f = -\frac{q^2}{v} \int\limits_{-\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0} d\omega \int\limits_0^\infty d\xi\, (\omega/|\omega|)\, \delta(\zeta(\omega, \xi)) \times$$

$$\times \operatorname{Im}\left[\frac{a_2^r(\omega, \xi)\zeta(\omega, \xi)}{1 - i(\omega/|\omega|)\sqrt{\xi - \beta^2 \varepsilon_2(\omega)}} - \frac{a_1^r(\omega, \xi)\zeta(\omega, \xi)}{1 + i(\omega/|\omega|)\sqrt{\xi - \beta^2 \varepsilon_1(\omega)}}\right]. \quad (32)$$

Интегрируя это выражение по ξ, получим

$$W_s^f = -\frac{2q^2}{c}\beta^2 \int\limits_{-\varepsilon_2(\omega)>\varepsilon_1(\omega)>0} d\omega \frac{|\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_2(\omega)|}{\sqrt{|\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)|}} \times$$

$$\times \frac{|\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2(\omega)|\,(1 + \beta^2 |\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)|)}{(|\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)| + \beta^2 \varepsilon_1^2(\omega))\,(|\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)| + \beta^2 \varepsilon_2^2(\omega))}, \quad (33)$$

что равно по величине и противоположно по знаку энергии излучения поверхностных волн (15). Тем самым доказан баланс энергий для поверхностных волн

$$W_s^r + W_s^f = 0. \quad (34)$$

Этот баланс энергий поверхностных волн интересен тем, что может быть использован для расчета энергии переходного излучения поверхностных волн (в более сложных случаях) по работе полей поверхностных волн над зарядом, расчет которой проводится обычно значительно проще. Тот же результат получится и в случае $-\varepsilon_1(\omega) > \varepsilon_2(\omega) > 0$, но при этом интегрирование по ω будет распространяться на область частот, соответствующую этому неравенству. Наконец, при $\varepsilon_1(\omega) \leqslant 0$ и $\varepsilon_2(\omega) \leqslant 0$ всякое излучение объемных и поверхностных волн отсутствует, и вклад в баланс возникает только от работы полей, локализованных у границы. Этот вклад описывается выражением, аналогичным (29), с интегрированием по частотному интервалу, определяемому неравенствами $\varepsilon_1(\omega) \leqslant 0$ и $\varepsilon_2(\omega) \leqslant 0$.

Таким образом, для всех возможных соотношений между $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, определяющих в совокупности весь частотный интервал, подынтегральное выражение одинаково, т. е. для произвольных $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ можно написать

$$W^r + W^{fr} = \frac{q^2}{\pi v} \int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_0^\infty d\xi \left[\frac{\xi}{\varepsilon_1(\omega)(1 - \beta^2 \varepsilon_1(\omega) + \xi)^2} - \frac{\xi}{\varepsilon_2(\omega)(1 - \beta^2 \varepsilon_2(\omega) + \xi)^2}\right]. \quad (35)$$

В случае движения частицы из вакуума в среду, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид (2), из выражения (35) получаем

$$W^r + W^{fr} = \frac{q^2 \omega_{pe}}{v}\left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}\right], \quad (36)$$

т. е. выражение (25) с противоположным знаком. Соответственно и в двух предельных случаях получим выражения (26) и (27) с противоположными знаками.

4. Рассмотрим теперь баланс энергий при переходном излучении. Складывая (25) и (35), получаем

$$\Delta W^q + W^f + W^r =$$
$$= \frac{q^2}{2\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{0}^{\infty} d\xi \left[\frac{(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega))^2}{\varepsilon_2(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_2(\omega)+\xi)^2} - \frac{(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega))^2}{\varepsilon_1(\omega)(1-\beta^2\varepsilon_1(\omega)+\xi)^2} \right]. \tag{37}$$

Интегрируя по ξ и по ω, имеем

$$\Delta W^q + W^f + W^r = 0. \tag{38}$$

При подсчете (38) использовалось соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right) = 0, \tag{39}$$

которое следует из аналитических свойств функции $\varepsilon(\omega)$ [3]. К балансу энергий (38) можно добавить баланс энергий для поверхностных волн (34).

5. Таким образом, строго показано выполнение баланса энергий при переходном излучении для непоглощающих сред. Это позволяет находить энергию переходного излучения по изменению энергии собственного поля заряда и работе сил для объемных волн, что в ряде случаев сложных конфигураций может оказаться значительно проще, чем прямой расчет мощности излучения. Для поверхностных волн расчет работы сил позволяет непосредственно определить мощность излучения.

Авторы приносят глубокую признательность В. Л. Гинзбургу за дискуссии в ходе выполнения работы и обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Гинзбург В Л, Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние — М: Наука, 1984.
2. Гинзбург В Л., Цытович В Н. — ЖЭТФ, 1973, **65**, вып. 5, с 1818.
3. Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1962, **42**, вып. 2, с 457.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 января 1984 г.

ENERGY BALANCE IN THE PROCESSES OF TRANSITION RADIATION

S. V. Vladimirov, V. N. Tsytovich

The energy balance observance for transitional radiation from a charged particle moving with an arbitrary velocity across the interface between two nondissipative media is showen.