

УДК 53 072:51:530 18

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О САМОВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ В СЛОЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

В. И. Кляцкин, Е. В. Ярощук

Рассматривается задача о нормальном падении плоской монохроматической волны на слой нелинейной среды конечной толщины, диэлектрическая проницаемость которой определяется интенсивностью волнового поля. Установлено обобщаемое и на трехмерные задачи свойство инвариантности распределения интенсивности поля внутри среды по отношению к изменению толщины слоя и интенсивности падающей волны. Для простейших типов нелинейности численно изучается поле на границе слоя и распределение интенсивности внутри слоя. Прослеживается переход к полупространству.

1. Задача о падении монохроматической волны на слой среды $L_0 \leq x \leq L$, диэлектрическая проницаемость которой определяется интенсивностью волнового поля, представляет большой интерес, и ее исследованию посвящено большое число работ (библиографию вопроса см., например, в [1]). В простейшем одномерном случае (нормальное падение волны на слоисто-неоднородную среду), который и будет рассматриваться в данной работе, волновое поле в среде описывается нелинейным уравнением Гельмгольца

$$(d^2/dx^2)U(x) + k^2[1 + \varepsilon(x, J(x))]U(x) = 0, \quad J(x) = |U(x)|^2, \quad (1)$$

с условиями непрерывности поля и производной на границах слоя. Если на слой падает волна $U_0(x) = v \exp[ik(L-x)]$, решение задачи (1) можно представить в виде $U(x) = vu(x)$, где $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(d^2/dx^2)u(x) + k^2[1 + \varepsilon(x, J(x))]u(x) = 0, \quad J(x) = \omega|u|^2, \quad \omega = |v|^2, \quad (1a)$$

с краевыми условиями

$$u'(L) = -ik[2 - u(L)], \quad u'(L_0) = -iku(L_0) \quad (u'(x) = du/dx). \quad (2)$$

Коэффициент отражения волны от слоя при этом определяется равенством $\rho = u(L) - 1$. В общем случае величина $\varepsilon(x, J(x))$ комплексна, т. е. $\varepsilon(x, J(x)) = \varepsilon_1(x, J) + i\gamma(x, J)$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$, а γ описывает поглощение волны.

В работе [2] краевая нелинейная задача (1a), (2) с помощью метода «погружения» сведена к задаче с начальными условиями по параметрам «погружения»: L — положению правой границы слоя (на которую падает волна) и ω — интенсивности падающей волны. При этом значение поля на границе (или коэффициент отражения) описывается замкнутым квазилинейным уравнением ($k=1$, $u(L) = u_L(\omega)$)

$$[(\partial/\partial L) - \omega b(L, \omega) \partial/\partial \omega] u_L(\omega) = 2i[u_L(\omega) - 1] + (i/2)\varepsilon(L, J_L)u_L, \quad (3)$$

$$u_{L_0}(\omega) = 1,$$

где

$$b(L, \omega) = a(L, \omega) + a^*(L, \omega), \quad a(L, \omega) = i + (i/2)\varepsilon(L, J_L)u_L(\omega), \\ J_L = \omega |u_L(\omega)|^2,$$

а поле внутри слоя среды удовлетворяет уже линейному уравнению

$$[(\partial/\partial L) - b(L, \omega)\omega(\partial/\partial\omega)]u(x; L, \omega) = a(L, \omega)u(x; L, \omega), \quad (4) \\ u(x; x, \omega) = u_x(\omega).$$

При $\omega = 0$ уравнения (3), (4) вырождаются в соответствующие соотношения линейной задачи (см., например, [3]).

Следствием (4) является уравнение для интенсивности поля внутри слоя среды

$$[(\partial/\partial L) - b(L, \omega)\omega(\partial/\partial\omega)]J(x; L, \omega) = 0, \quad J(x; x, \omega) = J_x(\omega). \quad (5)$$

В случае, когда $\varepsilon(x, J) \equiv \varepsilon(J)$, можно совершить предельный переход $L_0 \rightarrow -\infty$, соответствующий падению волны на полупространство $x < L$, и уравнения (3), (5) принимают вид ($\xi = L - x$)

$$b(\omega)\omega(du/d\omega) = 2i[1 - u(\omega)] - (i/2)\varepsilon(J)u^2(\omega); \quad (6)$$

$$(\partial/\partial\xi)J(\xi, \omega) = b(\omega)\omega(\partial/\partial\omega)J(\xi, \omega), \quad J(0, \omega) = J(\omega), \quad (6a)$$

где $b(\omega) = (1/2)[\varepsilon(J)u(\omega) + \varepsilon^*(J)u^*(\omega)]$. Естественно считать, что начальным условием для функции $u(\omega)$ является решение линейной задачи

$$u(0) = 2/(1 + \alpha), \quad \alpha = [1 + \varepsilon(0)]^{1/2}, \quad \text{Im } \alpha > 0, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Уравнения (6), (6a) подробно изучались в работе [4] для простейших типов нелинейности, характерных для задач нелинейной оптики, физики ионосферы и плазмы. Представляет определенный интерес получить решение задачи для слоя среды конечной толщины, на которой можно проследить переход к полупространству. Это и делается в настоящей работе.

2. Уравнения в частных производных первого порядка, как хорошо известно, эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если ввести характеристические кривые $\omega_L = \omega(L, \omega_0)$ согласно равенству (L_0 без ограничения общности можно положить равным нулю)

$$d\omega_L/dL = -b(L, \omega_L)\omega_L, \quad \omega_{L=0} = \omega_0, \quad (7)$$

то поле на границе слоя $u_L(\omega)$ будет описываться уравнением

$$du_L/dL = 2i[u_L - 1] + (i/2)\varepsilon(L, J_L)u_L^2, \quad u_0 = 1, \quad (8)$$

совпадающим по внешнему виду с уравнением линейной задачи, а уравнение (5) переходит в равенство

$$(d/d_L)J(x; L, \omega_L) = 0, \quad J(x; x, \omega_x) = J_x(\omega_x),$$

и, следовательно, интенсивность поля внутри среды остается постоянной на характеристике, т. е.

$$J(x; L, \omega_L) \equiv J_x(\omega_x). \quad (9)$$

Таким образом, интенсивность волны в слое среды полностью определяется решением задачи (7), (8), т. е. значением поля на границе слоя. Если мы знаем динамику характеристик ω_L в зависимости от L

и распределение интенсивности волны внутри среды для какой-либо фиксированной толщины слоя $J(x; L, \omega_L)$, то для любой другой толщины слоя $L_1 \leq L$ поведение интенсивности внутри среды остается без изменения, но соответствует уже интенсивности падающей волны ω_{L_1} , т. е. $J(x; L_1, \omega_{L_1}) \equiv J(x; L, \omega_L)$. Следовательно, равенство (9) является свойством инвариантности распределения интенсивности волнового поля внутри среды по отношению к изменению толщины слоя и интенсивности падающей волны.

Отметим, что в силу (9) $J(0; L, \omega_L) \equiv \omega_0$. Учитывая, что поле на границе слоя $x = 0$ определяет комплексный коэффициент прохождения волны $T_L = u(0; L, \omega)$, для квадрата модуля коэффициента прохождения получаем равенство $|T_L|^2 = \omega_0/\omega_L$, которое раскрывает физический смысл характеристики $\omega_L = \omega(L, \omega_0)$. Таким образом, величина $|T_L|^2$ описывается уравнением

$$(d/dL) |T_L|^2 = b(L, \omega_L) |T_L|^2, \quad |T_0|^2 = 1. \quad (10)$$

При наличии затухания в среде и при увеличении толщины слоя L интенсивность волны на границе $x = 0$ (и, следовательно, величина $|T_L|^2$) должна уменьшаться. Поэтому ясно, что для достаточно больших L величина ω_L при фиксированном значении ω_0 должна расти с увеличением L .

Если $\varepsilon(L, J_L) \equiv \varepsilon(J_L)$, то, исключая переменную L из (8) и (7), мы переходим к уравнению, совпадающему с (6), решение которого определяет $u_L = u_L(\omega_L)$. Таким образом, в этом случае зависимость u_L от толщины слоя входит только через зависимость ω_L . Если характеристические кривые не пересекаются, то непрерывное возрастание значений ω_L при фиксированном L соответствует непрерывному возрастанию соответствующих значений ω_0 . Учитывая, что при увеличении толщины слоя L при фиксированном значении ω_L область соответствующих значений ω_0 сжимается к значению $\omega_0 = 0$, которому соответствует характеристическая кривая $\omega_L = 0$ (случай линейной задачи), можно, очевидно, считать начальным условием для уравнения (6) при $L \rightarrow \infty$ решение линейной задачи, что и предполагалось в [4].

Если величина $b(\omega_L)$ для достаточно больших ω_L растет с ростом ω_L , то для любого ω_0 существует такое конечное значение толщины слоя $L(\omega_0)$, что $\omega_L = \infty$. И, наоборот, для любой конечной величины L существует такое предельное значение ω_0 , что соответствующей ему $\omega_L = \infty$, а изменению величины ω_0 в области $0 \leq \omega_0 \leq \tilde{\omega}_0$ соответствует непрерывное изменение значения $0 \leq \omega_L < \infty$. При увеличении толщины слоя величина $\tilde{\omega}_0 \rightarrow 0$. Ниже, на конкретных примерах, мы убедимся, что в ряде случаев такая ситуация действительно имеет место.

Введем, как и в работе [4], действительную и мнимую части волнового поля $u_L(\omega) = R(L, \omega) + iS(L, \omega)$. Тогда уравнения (7) и (8) примут вид

$$d\omega_L/dL = [\gamma R + \varepsilon_1 S] \omega_L, \quad \omega_{L=0} = \omega_0,$$

$$dR/dL = -[2S + \varepsilon_1 RS + (1/2)\gamma(R^2 - S^2)], \quad R(0) = 1, \quad (11)$$

$$dS/dL = 2(R - 1) + (1/2)\varepsilon_1(R^2 - S^2) - \gamma RS, \quad S(0) = 0.$$

При этом $J_L = \omega_L[R^2 + S^2]$, а квадрат модуля коэффициента отражения волны от слоя определяется выражением $|\rho|^2 = (R - 1)^2 + S^2$. При $\gamma = 0$ из (10а), (11) следует равенство $|\rho|^2 + |T|^2 = 1$, соответствующее сохранению потока энергии.

Решить аналитически систему уравнений (11) в общем случае не представляется возможным. Нас интересует, когда и каким образом решение задачи (11) переходит в решение задачи о падении волны на полупространство для простейших типов нелинейности, рассмотренных в [4]. При этом необходимо считать, что в среде имеется поглощение, т. е. величина γ может быть хоть и малой величиной, но отличной от нуля. Такой анализ проводился численным методом на основе численной схемы Рунге—Кутты—Фельберга пятого порядка точности с помощью подпрограммы RKF 45, приведенной в [5].

Перейдем к результатам численных экспериментов. Мы ограничились изучением поведения решения в зависимости от интенсивности падающей волны $\omega \leq 2$.

3. Прежде всего рассматривался простейший случай, когда $\varepsilon_1(J) = J$. Для такого типа нелинейности все характеристики ω_L являются гладкими функциями толщины слоя L , не пересекающиеся и не касающиеся друг друга ни в какой точке. Поэтому для любого значения интенсивности падающего поля ω и при любой толщине слоя

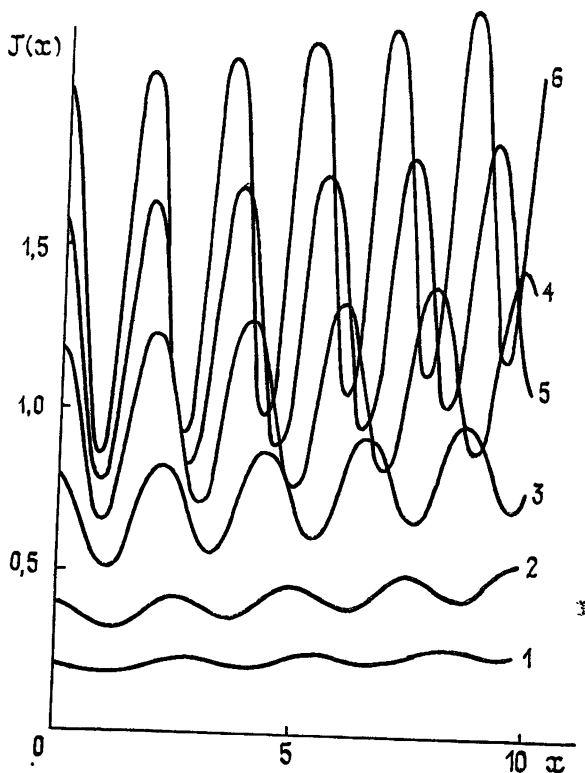


Рис. 1 Распределение интенсивности волны $J(x)$ внутри слоя при $\varepsilon_1(J) = J$, $\gamma = 0,05$, $L = 10$.
Кривая 1 соответствует $\omega = 0,32$, 2—0,61, 3—1,23,
4—1,76, 5—2,58, 6—2,95

имеется единственное решение. На рис. 1 представлен пример распределения интенсивности волнового поля внутри тонкого слоя среды $L = 10$ для разных значений интенсивности падающей волны ω и $\gamma = 0,05$. Характерно наличие осцилляций, тем больших, чем больше параметр ω , что обусловлено интерференцией прямой и отраженной от границы $x = 0$ волн. При увеличении толщины слоя амплитуда осцилляций уменьшается, и в предельном случае падения волны

на полупространство кривые переходят в монотонно затухающие кривые. На расстояниях примерно $\xi = L - x \approx 60$ от границы слоя (при $L = 100$), на которую падает волна, решение задачи переходит в решение линейной задачи. На рис. 2 представлены зависимости поведения интенсивности поля на границе J_L и квадрата модуля коэффициента отражения $|\rho|^2$ от параметра ω для слоев разной толщины. Для достаточно тонкого слоя наблюдаются сильные колебания в зависимости от ω , которые исчезают при переходе к полупространству.

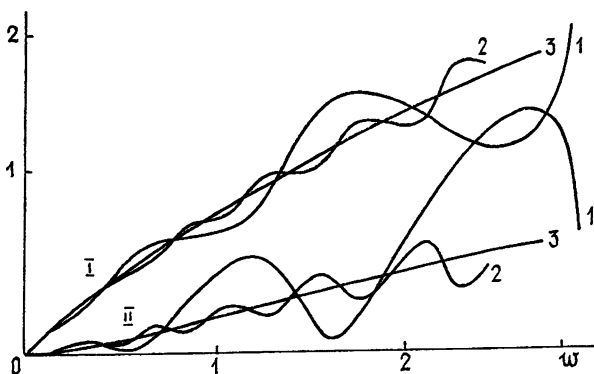


Рис. 2 Зависимости величин J_L (I) и $10 |\rho|^2$ (II) от ω при $\varepsilon_1(J) = J$, $\gamma = 0,05$.
Кривые 1 соответствуют $L = 10$, 2 — $L = 30$, 3 — $L = 100$

Далее рассматривался случай $\varepsilon_1(J) = -J$. Для такого типа нелинейности картина существенно зависит от параметра γ . Так, при $\gamma \geq 0,05$ характеристики, как и в предыдущем случае, нигде не пересекаются и переход к задаче о падении волны на полупространство осуществляется практически при $L \sim 70$. При меньших значениях параметра γ характеристики начинают пересекаться и в точке пересечения значения J_L и $|\rho|^2$ на разных характеристиках не совпадают. Подробно рассматривался случай $\gamma = 0,01$.

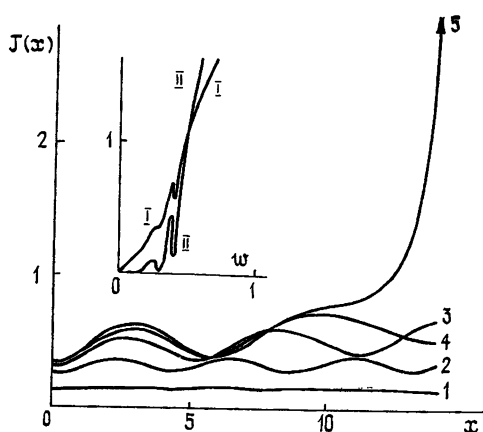


Рис. 3 Распределение интенсивности волны $J(x)$ внутри слоя при $\varepsilon_1(J) = -J$, $\gamma = 0,01$, $L = 14, 15$.

Кривая 1 соответствует $\omega = 0,14$, 2—0,29, 3—0,40, 4—0,40, 5—2,13 ($J_L = 3,75$). На врезке — зависимости J_L (I) и $5 |\rho|^2$ (II) от ω .

именно поле на границе слоя непрерывно в точке $\omega_{кр}$, а его производные терпят разрыв. При наличии малого затухания непрерывны и производные поля. Существование же пересечения характеристик при наличии малого затухания свидетельствует о том, что для слоя конечной толщины имеется неоднозначность как для поля на границе слоя, так и внутри среды.

В качестве примера на рис. 3 представлено для слоя толщиной $L = 14,15$ решение задачи в виде распределения интенсивности поля внутри слоя. Кривые 3 и 4 соответствуют характеристикам, пересекающимся при данной толщине слоя и ограничивающим другие пересекающиеся характеристики. Кривая 5 соответствует одной из «ближайших» характеристик, уже не пересекающихся с другими. Эта характеристика уходит на бесконечность практически при данной толщине слоя. На врезке рис. 3 изображено поведение поля на границе слоя в зависимости от ω . Эти кривые были получены путем последовательного соединения конечных точек решения системы (11) в той последовательности, в которой выбирались точки ω_0 (начальные значения ω_0 выбирались по возрастанию). Из рисунка видно наличие неоднозначности в окрестности $\omega = 0,40$, что свидетельствует о существовании разрыва, например модуля коэффициента отражения, и о гистерезисе при изменении ω как в сторону увеличения, так и уменьшения.

Для рассматриваемого типа нелинейности любая характеристическая кривая уходит на бесконечность при конечной толщине слоя. При толщине слоя ~ 33 самая нижняя из семейства пересекающихся характеристик уходит на бесконечность, и решение задачи становится единственным и гладким для любой толщины слоя и интенсивности падающей волны. Переход к задаче о падении волны на полупространство осуществляется практически при $L = 150$. Вблизи границы образуется тонкий слой, где $\tilde{\epsilon}_1 = 1 - J(x) < 0$, в соответствии с результатами работы [4]. Вне его $\tilde{\epsilon}_1 > 0$ и решение быстро выходит на решение линейной задачи.

Далее рассматривалась задача с нелинейностью вида $\epsilon_1(J) = -2e^{-J}$ при $\gamma = 0,18$. Для соответствующей задачи о падении волны на полупространство в этом случае существует критическое значение интенсивности падающей волны $\omega_{кр} = 0,69$, при котором поле на границе среды терпит разрыв [4]. Для данного типа нелинейности пучок пересекающихся характеристик появляется при толщине слоя порядка $L \sim 6$, значение характеристик ω_L в точке пересечения совпадает с величиной $\omega_{кр}$. При этом появляется разрыв в поведении поля на границе слоя. При дальнейшем увеличении толщины слоя этот пучок уходит в сторону больших значений ω_L , а взамен появляется новый пучок характеристик, пересечение которых по-прежнему происходит при достижении значения $\omega_{кр}$. Значение поля на границе слоя для толщины слоя $L = 10$ совпадает с соответствующим значением в задаче о падении волны на полупространство при $\omega \leq 2$, рассчитанным в работе [4].

4. Уравнения погружения (11) удобны также и для численного анализа задачи о распространении волн в нелинейной среде при наличии пространственной неоднородности. В качестве примера такой задачи рассматривалась зависимость $\epsilon_1(x, J)$ вида ($\gamma = 0$)

$$\epsilon_1(x, J) = -1 + \alpha(x - L_0) + J,$$

где параметр L_0 выбирался из соображения эквивалентности данной задачи задаче о падении волны на полупространство (т. е. модуль коэффициента отражения $|\rho| = 1$). Уравнения (11) численно интегрировались по L до значения $L = L_0$. Отметим, что в отсутствие нелинейной зависимости у ϵ_1 (т. е. при $\omega = 0$) решение линейной задачи (1а), (2) имеет вид

$$u(\eta) = 2[Ai(0) - iAi'(0)]^{-1} Ai(\eta) \quad (\eta = \alpha^{1/3}(L_0 - x)),$$

где $Ai(x)$ — функция Эйри, и, следовательно, интенсивность волны достаточно быстро затухает в глубь среды. При наличии нелинейности

распределение поля внутри среды искажается и при достижении достаточно большого значения интенсивности падающей волны $\omega_{кр}$ появляется неоднозначность как в значении поля на границе, так и в его распределении внутри слоя. Например, при $L_0 = 6$ и $\alpha = 1$

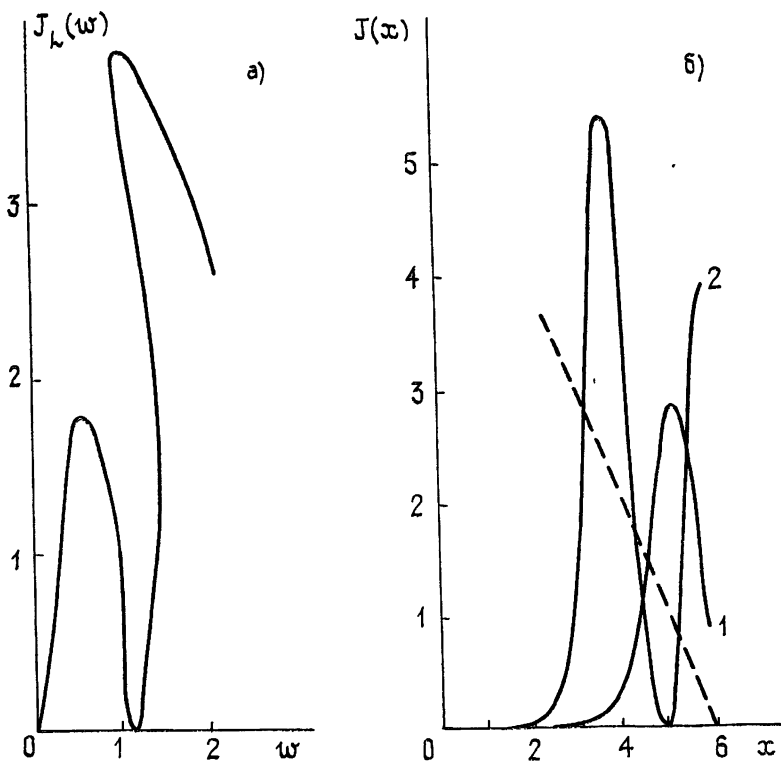


Рис. 4. Зависимость J_L от ω (а) и распределение интенсивности волны

$J(x)$ (б) внутри слоя при $\varepsilon_1(x, J) = x - 6 + J$, $\gamma = 0$.

Кривая 1 соответствует $\omega = 0,98$, 2 — $\omega = 0,97$ нижней и, соответственно, верхней ветвям рис 4а

таким критическим значением является $\omega_{кр} = 0,97$. На рис. 4а изображена зависимость интенсивности поля на границе от ω , а на рис. 4б — распределение интенсивности волны внутри среды, отвечающее двум возможным значениям поля на границе слоя при $\omega \approx \omega_{кр}$. Из рисунка видно, что для данного значения ω поле проникает относительно далеко в глубь среды. Пунктирная линия на рис. 4б отвечает зависимости $\alpha(L_0 - x)$, и, следовательно, значениям $J(x)$, находящимся выше этой прямой, отвечают области положительного значения диэлектрической проницаемости внутри среды.

При уменьшении параметра α , т. е. пространственного градиента диэлектрической проницаемости, степень неоднозначности повышается. Так, на рис. 5а изображена зависимость интенсивности поля на границе от ω при $\varepsilon_1(x, J) = -1 + 0,1(x - 35) + J$. Неоднозначность возникает уже при $\omega_{кр} = 0,08$. На рис. 5б изображено распределение интенсивности волны внутри среды для значений интенсивности падающей волны ω , отмеченных на рис. 5а крестиком. Пунктирной линией нанесена прямая $0,1(35 - x)$, разделяющая всю область на слои с положительным и отрицательным значениями $\varepsilon = 1 + \varepsilon_1$.

5. Свойство инвариантности распределения интенсивности волнового поля внутри слоя среды, полученное выше для одномерной задачи, легко обобщается и на случай трехмерной задачи, для которой волновое поле описывается нелинейным уравнением Гельмгольца

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 [1 + \varepsilon(\mathbf{r}, I(\mathbf{r}))] U(\mathbf{r}) = 0, \quad I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2, \quad (12)$$

с условиями непрерывности поля $U(\mathbf{r})$ и $\partial U(\mathbf{r})/\partial x$ на границах слоя.

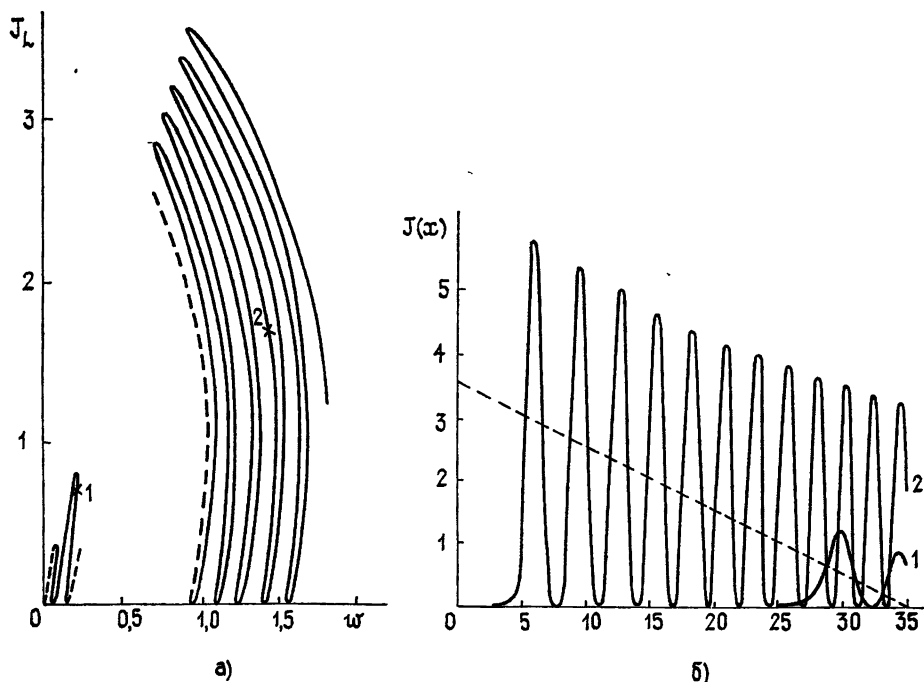


Рис. 5. Зависимость J_L от ω (а) и распределение интенсивности волны $J(x)$ внутри слоя (б) при $\varepsilon_1(x, J) = 0,1(x-35) + J, \gamma = 0$.
Кривая 1 соответствует $\omega = 0,22$, 2 — $\omega = 1,42$

Если на слой среды справа (из области $x > L$) падает заданное поле $U_0(x, \mathbf{p})$ ($\mathbf{p} = \{y, z\}$), то оно на границе слоя в плоскости $x = L$ индуцирует распределение источников $\tilde{f}(\mathbf{p}_0)$, такое, что

$$U_0(x, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}_0 g(L - x, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0) f(\mathbf{p}_0), \quad f(\mathbf{p}) = 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{p}})^{1/2} U_0(L, \mathbf{p}),$$

где функция $g(\mathbf{r}) = -(1/4)\pi r \exp(ikr)$ — функция Грина в свободном пространстве, а оператор $(k^2 + \Delta_{\mathbf{p}})^{1/2}$ является интегральным оператором, ядро которого определяется функцией $g(\mathbf{r})$ [6]. В этом случае решение задачи (12) имеет структуру

$$U(x, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}_0 G(x, \mathbf{p}; L, \mathbf{p}_0) f(\mathbf{p}_0),$$

где функция $G(x, \mathbf{p}; L, \mathbf{p}_0)$ — аналог функции Грина — как функция параметра L удовлетворяет уравнениям «погружения» [2]

$$(W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1) f^*(\mathbf{p}_2)):$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{a}_{\mathbf{p}_0} \right) G(x, \mathbf{p}; L, \mathbf{p}_0) = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 b(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \frac{\delta}{\delta W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)} G(x, \mathbf{p}; L, \mathbf{p}_0), \quad (13)$$

$$G(x, \mathbf{p}; x, \mathbf{p}_0) = H(x; \mathbf{p}, \mathbf{p}_0);$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i(k^2 + \Delta_{p_0})^{1/2} - i(k^2 + \Delta_p)^{1/2} \right] H(L; p, p_0) = -\delta(p - p_0) -$$

$$- k^2 \int d\rho_1 H(L; p, \rho_1) \varepsilon(L, \rho_1; I_L(\rho_1)) H(L; \rho_1, p_0) +$$

$$+ k^2 \int d\rho_1 d\rho_2 W(\rho_1, \rho_2) \hat{b}(\rho_1, \rho_2) \frac{\delta}{\delta W(\rho_1, \rho_2)} H(L; \rho_1, p_0),$$

$$H(0; p, p_0) = g(0, p - p_0). \quad (14)$$

Здесь операторы $\hat{a}_p$ и $\hat{b}(\rho_1, \rho_2)$ определяются равенствами

$$\hat{a}_{p_0} G(x, p; L, p_0) = i(k^2 + \Delta_{p_0})^{1/2} G(x, p; L, p_0) -$$

$$- k^2 \int d\rho_1 G(x, p; L, \rho_1) \varepsilon(L, \rho_1; I_L(\rho_1)) H(L, \rho_1, p_0),$$

$$\hat{b}(\rho_1, \rho_2) = \hat{a}_{\rho_1} + \hat{a}_{\rho_2}^*,$$

а интенсивность поля на границе слоя $I_L(p)$ описывается формулой

$$I_L(p) = \int d\rho_1 d\rho_2 H(L; p, \rho_1) H^*(L; p, \rho_2) W(\rho_1, \rho_2).$$

Здесь функция $H(L; p, p_0) = G(L, p; L, p_0)$ — поле на границе $x=L$.

Следствием уравнения (13) является уравнение для интенсивности поля внутри среды

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial L} - \int d\rho_1 d\rho_2 W(\rho_1, \rho_2) \hat{b}(\rho_1, \rho_2) \frac{\delta}{\delta W(\rho_1, \rho_2)} \right\} I(x; L, p) = 0. \quad (15)$$

Далее будем действовать аналогично случаю одномерной задачи. Уравнения с вариационными производными (13), (14) эквивалентны системе интегродифференциальных уравнений. Если ввести характеристическую поверхность согласно равенству

$$(\partial/\partial L) W_L(\rho_1, \rho_2) = -\hat{b}(\rho_1, \rho_2) W_L(\rho_1, \rho_2), \quad W_{L=0}(\rho_1, \rho_2) = W_0(\rho_1, \rho_2), \quad (16)$$

т. е.

$$[(\partial/\partial L) + i(k^2 + \Delta_{\rho_1})^{1/2} - i(k^2 + \Delta_{\rho_2})^{1/2}] W_L(\rho_1, \rho_2) =$$

$$= k^2 \int d\rho' [W_L(\rho', \rho_2) \varepsilon(L, \rho'; I_L(\rho')) H(L; \rho', \rho_1) +$$

$$+ W_L(\rho_1, \rho') \varepsilon^*(L, \rho'; I_L(\rho')) H^*(L; \rho', \rho_2)],$$

то поле на границе слоя будет описываться уравнением

$$[(\partial/\partial L) - i(k^2 + \Delta_{p_0})^{1/2} - i(k^2 + \Delta_p)^{1/2}] H(L; p, p_0) = -\delta(p - p_0) -$$

$$- k^2 \int d\rho_1 H(L; p, \rho_1) \varepsilon(L, \rho_1; I_L(\rho_1)) H(L; \rho_1, p_0), \quad H(0; p, p_0) = g(0, p - p_0),$$

совпадающим по внешнему виду с уравнением линейной задачи [7].

Таким образом, вместо уравнения с вариационной производной (14) для поля на границе слоя мы имеем систему интегродифференциальных уравнений. Уравнение (15) при этом принимает вид

$$(\partial/\partial L) I(x; L, p) = 0, \quad I(x; x, p) = I_x(p),$$

$$I(x, L; \rho; W_L) = I_x(\rho; W_x) = \int d\rho_1 d\rho_2 H(x; \rho, \rho_1) H^*(x; \rho, \rho_2) W_x(\rho_1, \rho_2). \quad (17)$$

Равенство (17) выражает свойство инвариантности распределения интенсивности волнового поля внутри слоя среды, аналогичное одномерной задаче: при изменении толщины слоя в сторону уменьшения имеем

$$I(x; L_1, \rho; W_{L_1}) = I(x; L, \rho; W_L) \quad (L_1 \leq L),$$

т. е. распределение интенсивности остается тем же самым, но уже для распределения источников на границе слоя $W_{L_1}(\rho_1; \rho_2)$, соответствующего эволюции характеристической поверхности $W_L(\rho_1, \rho_2)$ от L к L_1 .

Если пренебречь обратным рассеянием, то $H(L; \rho, \rho_0) = g(0, \rho - \rho_0)$ [2] и распределение интенсивности поля внутри среды описывается только динамикой характеристической поверхности, т. е. уравнением (16).

В заключение данного раздела отметим, что полученное свойство инвариантности распределения интенсивности волнового поля внутри среды является следствием интегрируемости уравнения для интенсивности по методу погружения и того факта, что диэлектрическая проницаемость определяется именно интенсивностью волнового поля (не зависит от фазы волны).

Авторы признательны В. Ф. Козлову за полезное обсуждение вопросов численного решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда — М.: Наука, 1975
2. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — ЖЭТФ, 1980, 79, с. 817.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
4. Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В. — ЖЭТФ, 1982, 82, с. 386
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
6. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. — Акуст. журн., 1982, 28, с. 310.
7. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. — ДАН СССР, 1980, 250, с. 1112.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
31 января 1984 г.

NUMERICAL SOLUTION ON ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF SELF-ACTION OF WAVE IN NONLINEAR MEDIUM LAYER

V. I. Klyatskin, E. V. Yaroshchouk

The problem of normal incidence of a plane monochromatic wave on finite thickness layer with a nonlinear medium which permittivity is determined by the intensity of the wave field is considered. A property is established generalized also over three-dimensional problems of invariance of the distribution of the wave field intensity inside the medium under the variation of the thickness of the layer and intensity. The field at the boundary of the layer and the distribution of the intensity within the layer are studied numerically for the simplest types of nonlinearity. The transition to a half-space is traced.