

УДК 534 015, 537.86.519

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА В ОДНОМЕРНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

С. П. Кузнецов, А. С. Пиковский

Установлены универсальные закономерности подобия пространственных структур, которые возникают при переходе к хаосу в ограниченной или полубесконечной среде из диссипативно связанных элементов. При этом каждый индивидуальный элемент — нелинейная система, способная демонстрировать фейгенбаумовскую последовательность бифуркаций удвоения периода. Приведены результаты численных расчетов, которые подтвердили установленные закономерности и позволили найти функции и константы, фигурирующие в соотношениях подобия.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание привлекает исследование возможных путей перехода нелинейных динамических систем от периодического движения к хаотическому [1]. Один из типичных сценариев возникновения хаоса в диссипативных системах связан с существованием иерархии бифуркаций удвоения периода, подчиняющейся законам подобия фейгенбаума [2]. Этот сценарий наблюдался во многих экспериментах, относящихся к гидродинамике [3], акустике [4], оптике [5], электронике [6, 7], химической кинетике [8]. В данной статье мы исследуем переход к хаосу в протяженной среде, представляющей собой дискретный или непрерывный набор связанных элементов, каждый из которых в отдельности есть нелинейная диссипативная система, способная демонстрировать фейгенбаумовскую последовательность бифуркаций удвоения периода. Приведем несколько примеров таких ситуаций.

1) Простейшая динамическая система, претерпевающая при изменении параметра переход к хаосу через удвоения периода, — это одномерное рекуррентное отображение:

$$u_{n+1} = f(u_n, \lambda), \text{ например, } u_{n+1} = \lambda(1 - 2u_n^2). \quad (1)$$

Здесь n — дискретное время, λ — параметр. Отображение (1) используется, в частности, для описания динамики биологических популяций [9], при этом переменная u_n имеет смысл отклонения численности популяции от некоторого уровня. Если рассмотреть пространственно-распределенную популяцию при наличии диффузии организмов и зависимости плотности населения от пространственных координат, то приходим к системе интересующего нас типа.

2) Кинетика химических реакций описывается нелинейными уравнениями вида

$$\partial v_i(\mathbf{r}, t) / \partial t = b_i(v_1, v_2, \dots, v_k, t) + D_i \nabla^2 v_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

где v_i — концентрации реагирующих компонент, D_i — коэффициенты диффузии. Для пространственно-однородного режима соотношения (2) превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений,

в которой возможен переход к хаосу через бифуркации удвоения периода. В общей ситуации, когда концентрации v_i зависят от пространственных координат, можно мысленно разбить объем системы на небольшие ячейки, в пределах которых решение практически однородно. Следовательно, мы имеем совокупность точечных систем, которые способны демонстрировать удвоения периода и связаны друг с другом благодаря диффузии.

3) Ряд радиотехнических и биологических систем (см. примеры в [10–12]) описывается уравнением с запаздыванием:

$$\varepsilon dv/dt + v = f(v(t - T), \lambda). \quad (3)$$

Пусть n и ξ — соответственно целая и дробная части числа $t/(T + \varepsilon/2)$. Введем обозначение $v(t) = v_n(\xi)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (3) сводится к системе несвязанных отображений $v_{n+1}(\xi) = f(v_n(\xi), \lambda)$. При каждом фиксированном ξ имеем отображение типа (1), которое демонстрирует бифуркации удвоения периода при изменении параметра λ . Учет слагаемого $\varepsilon dv/dt$ в (3) можно рассматривать как введение связи между этими отображениями. Роль пространственной координаты в данном случае играет величина ξ .

4) Распределенный джозефсоновский контакт, находящийся в периодическом внешнем поле, описывается неавтономным уравнением синус—Гордон [13]:

$$\partial^2 v / \partial t^2 - \partial^2 v / \partial x^2 + \gamma \partial v / \partial t + \sin v = A \cos \omega t. \quad (4)$$

Уравнение пространственно-однородных колебаний совпадает с уравнением для точечного джозефсоновского контакта, при численном исследовании которого обнаружен переход к хаосу через удвоения периода [14]. Распределенный контакт может рассматриваться как континуум взаимодействующих точечных систем. К аналогичным уравнениям приводит задача о динамике кристалла (решетка из нелинейных осцилляторов), находящегося в интенсивном звуковом или оптическом поле.

Приведенные примеры показывают, что речь идет о широком классе распределенных систем, заслуживающем специального рассмотрения. Исходным пунктом исследования может служить тот факт, что, согласно теории Фейгенбаума, несвязанные точечные системы демонстрируют при удвоениях периода универсальные свойства. Поэтому введение связи также должно приводить к универсальным закономерностям. Мы устанавливаем эти закономерности для распределенных систем с диссипативной связью между составляющими элементами, т. е. с такой связью, которая стремится выровнять мгновенные состояния элементов. Среди приведенных выше примеров диссипативному характеру связи соответствуют системы (1), (2), (3).

В разд. 2 вводится простейшая модель, адекватно передающая искомые закономерности. Имея в виду, что диссипативная связь обеспечивает устойчивость пространственно-однородного режима вплоть до точки перехода к хаосу, мы выводим в разд. 3 уравнение ренорм-группы для оператора эволюции системы на классе состояний, близких к однородному. Его решение дает универсальный фактор $\beta = \sqrt{2}$, характеризующий преобразование пространственного масштаба состояний при удвоениях временного периода. Основываясь на этом результате, мы формулируем в разд. 4 гипотезы подобия для пространственных структур, которые возникают при последовательных бифуркациях удвоения периода в полубесконечной и ограниченной системах, а также для соответствующих бифуркационных значений параметров. Эти гипотезы подтверждаются численными данными, которые приво-

дятся в разд. 5. Для простоты мы ограничиваемся случаем одной пространственной координаты, однако аналогичный подход может быть развит и для случая двух или трех измерений.

2. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

Построим простейшую модель распределенной системы рассматриваемого класса. Согласно теории Фейгенбаума, вблизи точки перехода к хаосу каждый элемент (ячейку) среды можно описать с помощью одномерного отображения типа (1) независимо от размерности фазового пространства элемента. Соответственно в качестве модели среды из несвязанных элементов можно использовать систему несвязанных отображений (1). Следующий шаг состоит во введении связи. Относительно ее характера сделаем такие предположения.

1) Связь между элементами симметрична.

2) Связь не влияет на динамику пространственно-однородного решения, т. е. при равенстве мгновенных состояний элементов связь равна нулю.

3) Связь локальна, т. е. убывает достаточно быстро с ростом расстояния между элементами.

4) Связь носит диссипативный характер и способствует выравниванию мгновенных состояний элементов.

Для описания динамики распределенной системы в этой ситуации будем использовать следующее уравнение:

$$u_{n+1}(x) = \hat{F}[u_n(x)] = \hat{m}f(u_n(x), \lambda). \quad (5)$$

Здесь x — пространственная координата, $f(u, \lambda)$ — нелинейная функция, демонстрирующая в (1) переход к хаосу через удвоения периода, \hat{m} — линейный оператор, описывающий связь.

В случае дискретной переменной x оператор \hat{m} можно в общем случае записать в виде

$$\hat{m}u(x) = \sum_j c_j u(x-j), \quad (6)$$

а при непрерывном x — в виде

$$\hat{m}u(x) = \int c(y) u(x-y) dy. \quad (7)$$

Сформулированные выше свойства связи накладывают на оператор \hat{m} следующие требования:

1) Симметрия: $c_j = c_{-j}$, $c(y) = c(-y)$.

2) Нормировка: $\sum_j c_j = 1$, $\int c(y) dy = 1$.

3) Локальность: сумма $\sum_j j^2 c_j = \Delta^2$ или интеграл $\int y^2 c(y) dy = \Delta^2$ конечны. Величина Δ определяет пространственный масштаб, связанный с оператором \hat{m} , — характерную длину диффузии за один шаг дискретного времени.

4) Диссипативность: спектр $m(k) = e^{-ikh} \hat{m} e^{ikh}$ по модулю меньше единицы.

Из (1) — (4) однозначно следует вид спектра $m(k)$ в области малых волновых чисел:

$$m(k) = 1 - (k\Delta)^2/2. \quad (8)$$

Как мы полагаем, уравнение (5) позволяет количественно описывать поведение распределенных систем вблизи точки перехода к хаосу через бифуркации удвоения периода независимо от конкретного вида уравнений динамики составляющих элементов и способа введения связи между ними—необходимо лишь, чтобы связь удовлетворяла указанным выше требованиям. В пользу этого говорят результаты ренорм-группового анализа, излагаемые ниже. Наиболее нетривиальным является условие диссипативности связи. Впрочем для некоторых систем его выполнение можно установить аналитически. Так, например, для радиотехнических систем с запаздыванием, в которых сигнал последовательно проходит через безынерционный элемент и линейное инерционное звено, уравнения естественным образом записываются в виде (5) [12]. В частности, уравнение (3) сводится к (5), если перейти к переменным n, ξ (см. выше)*. Другой пример — уравнения химической кинетики (2). Как показано в [15], в случае равных коэффициентов диффузии $D_1 = D_2 = \dots = D$ однородное возмущение пространственно-однородного решения всегда нарастает быстрее (затухает медленнее) неоднородных. Таким образом, связь способствует выравниванию состояний пространственно-разделенных элементов системы и является диссипативной.

3. СООТНОШЕНИЕ ПОДОБИЯ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Поскольку диссипативная связь обеспечивает затухание сильно-неоднородных возмущений, рассмотрим слабонеоднородные состояния в системе (5). Мы выведем соотношения подобия, которым удовлетворяет динамика этих состояний при последовательных бифуркациях удвоения периода. Следуя идее Фейгенбаума [2], будем искать ренормализационное уравнение для оператора $\hat{F} = \hat{m}f$.

Пусть имеется слабонеоднородное состояние

$$u(x) = u_0 + \varepsilon u_1(x), \quad (9)$$

где $\varepsilon \ll 1$, u_0 не зависит от x . Действие оператора $\hat{m}f$ на это состояние приводит с точностью до ε^2 к выражению

$$\hat{m}f[u(x)] \approx f(u_0) + \varepsilon f'(u_0) \hat{m}u_1(x) \approx f[\hat{m}u(x)]. \quad (10)$$

Из (10) следуют два факта: 1) в результате действия оператора вновь получается слабонеоднородное состояние, 2) операции \hat{m} и f на данном классе состояний коммутативны. Следовательно, двукратное применение оператора \hat{F} дает оператор того же общего вида:

$$\hat{F}^2 u(x) = \hat{m}f[\hat{m}f u(x)] = \hat{m}^2 f^2[u(x)]. \quad (11)$$

Введем операции изменения масштаба функций $u(x)$:

$$\hat{S}_1 u(x) = \alpha^{-1} u(x), \quad \hat{S}_2 u(x) = u(\beta x), \quad \hat{S} = \hat{S}_1 \hat{S}_2, \quad (12)$$

где α и β — некоторые константы. Выполним в (11) преобразование масштаба \hat{S} и обозначим полученный в результате оператор через \hat{F}_1 : $\hat{F}_1 = \hat{S}^{-1} \hat{F} \hat{S}$. Ту же самую процедуру можно применить к оператору

* Условие симметрии оператора \hat{m} выполняется в этом случае лишь для малых k : $m(k) \sim 1 - (\varepsilon k)^2/2$, однако этого достаточно для применимости нашей теории.

\hat{F}_1 и т. д. В результате приходим к рекуррентному операторному уравнению:

$$\hat{F}_n = \hat{S}^{-1} \hat{F}_{n-1} \hat{F}_{n-1} \hat{S}. \quad (13)$$

Согласно (11), мы можем переписать \hat{F}_n в виде

$$\hat{F}_n = \hat{M}_n g_n, \quad (14)$$

где

$$\hat{M}_n = \hat{S}_2^{-1} \hat{M}_{n-1}^2 \hat{S}_2 = \hat{S}_2^{-n} \hat{m}^N \hat{S}_2^n; \quad (15)$$

$$g_n = \hat{S}_1^{-1} g_{n-1}^2 \hat{S}_1 = \hat{S}_1^{-n} f^N \hat{S}_1^n \quad (16)$$

и введено обозначение $N = 2^n$. Согласно [2], если параметр λ в $f(u, \lambda)$ равен своему критическому значению λ_c^0 , а $\alpha = -2,5029$ — константа Фейгенбаума, то последовательность g_n стремится к универсальной функции $g(x)$. Рассмотрим теперь предельное поведение последовательности операторов \hat{M}_n . Записывая (15) в спектральном представлении, имеем

$$M_n(k) = [m(k\beta^{-n})]^N. \quad (17)$$

Если $\beta > 1$, то при $n \rightarrow \infty$ вид $M_n(k)$ определяется поведением $m(k)$ в области малых k , т. е. выражением (8). Логарифмируя (17), получаем

$$\ln M_n(k) = - (1/2) \Delta^2 k^2 2^n \beta^{-2n}.$$

Отсюда ясно, что регулярный предел при $n \rightarrow \infty$ существует, если положить $\beta = \sqrt{2}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(k) = \exp(- (1/2) \Delta^2 k^2)$.

Суммируя, заключаем, что последовательность \hat{F}_n сходится (при $\lambda = \lambda_c^0$ и указанном выборе констант α и β) к универсальному оператору

$$\hat{G} = \exp\left(\frac{1}{2} \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g,$$

который не зависит от конкретного затравочного оператора $\hat{F} = \hat{m}f$ и является неподвижной точкой ренормализационного преобразования

$$\hat{G} = \hat{S}^{-1} \hat{G} \hat{S}.$$

Отсюда следует, что при последовательных бифуркациях удвоения периода оператор эволюции системы за период остается с точностью до выбора масштабов одним и тем же (для достаточно больших n). Связанный с этим оператором характерный пространственный масштаб увеличивается при удвоении периода в $\beta = \sqrt{2}$ раз.

В заключение раздела обсудим следствия полученного соотношения подобия для перехода к хаосу в безграничной однородной среде. Пусть в точечной системе бифуркационные значения параметра накапливаются к критической величине λ_c^0 . В безграничной среде при $\lambda < \lambda_c^0$ устойчивым будет однородное состояние, претерпевающее те же самые бифуркации удвоения временного периода. При $\lambda > \lambda_c^0$ возникают стохастические во времени и в пространстве колебания. Увели-

чению временного масштаба вдвое соответствует увеличение пространственного масштаба—корреляционного радиуса r_c в β раз. Так как удвоению временного масштаба отвечает уменьшение $\lambda - \lambda_c^0$ в $\delta = 4,6692$ раз [2], то находим критический индекс для радиуса корреляции

$$r_c \sim (\lambda - \lambda_c)^{-\nu}, \quad \nu = \log \beta / \log \delta = 0,2249. \quad (18)$$

4. ГИПОТЕЗЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМ

4.1. *Бесконечная среда с локальной неоднородностью.* Задача о поведении бесконечной среды с локальной неоднородностью возникает, например, в следующих случаях: 1) имеется локальное возмущение параметра λ , 2) имеется полубесконечная среда $0 \leq x < \infty$ с граничным условием, скажем, вида $u(0) = u_0$, 3) в безграничной системе имеется решение с фазовой дислокацией. (Под фазовой дислокацией мы понимаем следующее. Пусть отображение (1) имеет при некотором λ устойчивый цикл периода 2 (u_1, u_2) . Тогда система (5) имеет устойчивое решение с временным периодом 2 такое, что $u_{2i}(\infty) = u_1$, $u_{2i}(-\infty) = u_2$, $u_{2i+1}(\infty) = u_2$, $u_{2i+1}(-\infty) = u_1$. Хотя такое решение не может возникнуть само по себе из устойчивого пространственно-однородного режима, его можно реализовать, приготовив надлежащим образом начальные условия.)

Как будет показано ниже, конкретный тип и размер локальной неоднородности не играют роли. Единственное условие, выполнение которого предполагается, состоит в том, что переход к хаосу происходит не в области неоднородности, а определяется асимптотикой решения вдали от нее.

Асимптотически при $x \rightarrow \infty$ решение однородно. Поэтому удвоения периода происходят при тех же значениях параметра, что и в точечной системе. Однако возникающее при n -й бифуркации решение с временным периодом 2^n становится однородным только на некотором характерном расстоянии ξ_n от локальной неоднородности. Мы будем называть область, в которой решение отличается от однородного, хвостом порядка n , а величину ξ_n — длиной хвоста.

Результаты предыдущего раздела позволяют предложить гипотезу подобия хвостов. Для упрощения ее формулировки предположим сначала, что значение параметра равно критическому $\lambda = \lambda_c^0$. Будем описывать форму хвоста порядка n , характеризующегося временным периодом $N = 2^n$, величиной

$$S(x, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u_i(x) - u_{i+N/2}(x)]^2, \quad (19)$$

которая равна сумме интенсивностей спектральных компонент, появляющихся при n -й бифуркации удвоения. Согласно [16], в точечной системе величина $S(n)$ убывает с ростом n по универсальному закону

$$S(n) = \gamma S(n+1), \quad \ln S(n) = \text{const} - n \ln \gamma, \quad \gamma \simeq 10,48.$$

В распределенной системе S зависит и от n , и от x . Согласно результатам предыдущего раздела, следует предположить, что форма хвостов порядка n и $n+1$ подобна, а их длины связаны соотношением $\xi_{n+1} = \beta \xi_n$, т. е.

$$S(n, x) = \gamma S(n+1, \beta x) \quad \text{или} \quad \ln S(n, x) = \text{const} - n \ln \gamma + \theta(\beta^{-n} x / \Delta). \quad (20)$$

Функция $\theta(y)$ должна быть универсальной, по крайней мере при больших y . Действительно, состояние в этой области является слабоне-

однородным, и форма хвоста определяется универсальным оператором \hat{G} .

Соотношение подобия обобщается на случай $\lambda \neq \lambda_c^0$ следующим образом: если величина $S(n, x)$ вычислена при некотором λ_1 , то в правой части формулы (20) должна стоять величина $S(n+1, \beta x)$ для $\lambda = \lambda_c^0 + (\lambda_1 - \lambda_c^0) \delta^{-1}$. Закономерности подобия должны быть справедливы и за критической точкой. Если ввести величину $s(\lambda, k)$ — суммарную интенсивность широкополосной части спектра, то соотношение подобия, аналогичное (20), имеет вид

$$s(\lambda - \lambda_c^0 x) = \gamma s((\lambda - \lambda_c^0)/\delta, \beta x). \quad (21)$$

Очевидно, вдали от локальной неоднородности реализуется статистически однородный хаотический режим. Из (21) можно заключить, что однородность нарушается на расстоянии порядка радиуса корреляции (18).

4.2. Система ограниченной длины. Рассмотрим теперь систему конечной длины L . Для простоты рассуждений будем считать, что у левой границы $x=0$ имеется локальная неоднородность (например, $u(0)$ фиксировано), а на правой границе $x=L$ заданы свободные граничные условия. Эту конфигурацию можно рассматривать как половину симметричной системы длины $2L$ с неоднородностями на обеих границах*.

Структура бифуркаций в такой системе следующая. Если длина велика по сравнению с диффузионной длиной Δ , то при первых бифуркациях удвоения вблизи левой границы образуются хвосты, а около правой границы решение практически однородно. Поэтому точки бифуркации и пространственная конфигурация решения такие же, как в полубесконечной системе с локальной неоднородностью. С увеличением номера бифуркации n длина хвоста растет пропорционально β^n , так что при некотором n она сравнивается с длиной системы: $\xi_n \sim L$. При этом возникает взаимодействие хвоста с правой границей, что приводит к возмущению бифуркационных значений параметра λ_n . Согласно гипотезе подобия (20), форма хвоста универсальна. Поэтому можно ожидать, что и возмущение точек бифуркации тоже универсально и определяется, грубо говоря, значением хвоста на правой границе. Исходя из этого, сформулируем гипотезу подобия для бифуркационных значений параметра:

$$\lambda_n^0 - \lambda_n = \delta^{-n} K_0 \varphi(\beta^{-n} L / \Delta). \quad (22)$$

Здесь λ_c^0 и K_0 — константы в формуле Фейгенбаума для точечной системы ($\lambda_n^0 = \lambda_c^0 - K_0 \delta^{-n}$), φ — универсальная функция. Поскольку в бесконечной системе бифуркации происходят при тех же значениях параметра, что и в точечной, то $\varphi(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

При дальнейшем увеличении n о хвостах как таковых говорить уже трудно, так как их длина превосходит длину системы. У задачи остается единственный существенный пространственный масштаб L , поэтому пространственное распределение вновь возникающих при больших n спектральных компонент становится фиксированным, не зависящим от n . В этой области система эквивалентна сосредоточенной, так что бифуркации удвоения накапливаются к некоторому критическому значению λ_c по обычному закону Фейгенбаума:

$$\lambda_c - \lambda_n = K \delta^{-n}. \quad (23)$$

* К подобной ограниченной системе сводится, в частности, описанная во Введении система с запаздыванием (3) [12].

Соотношение (23) можно согласовать с (22), если предположить, что при $z \rightarrow 0$ $\varphi(z) \rightarrow -Az^{-\kappa} + B$, где $\kappa = 1/\nu = 4,4463$. Константы κ , A , B универсальны, поскольку универсальна функция φ . Подставляя это выражение в (2), получим связь λ_c и K с λ_c^0 и K_0 :

$$\lambda_c = \lambda_c^0 + AK_0(L/\Delta)^{-\kappa}; \quad (24)$$

$$K = BK_0. \quad (25)$$

Система ведет себя как сосредоточенная и в закритической области $\lambda > \lambda_c$ до тех пор, пока даваемый формулой (18) корреляционный радиус превосходит длину системы. При этом динамика во времени является хаотической, а пространственное распределение остается фиксированным. При дальнейшем увеличении параметра λ наступает ситуация, когда $r_c < L$. Тогда картина пространственного распределения компонент движения становится такой же, как в безграничной среде с локальной неоднородностью: имеется область, удаленная от закрепленной границы, в которой интенсивность шумовой компоненты не зависит от x , и область вблизи от нее, в которой интенсивность шумовой компоненты падает.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проверки гипотез подобия численно была подробно исследована следующая дискретная система:

$$u_{n+1}(x) = \lambda[1 - 2u_n^2(x)] + D[u_{n+1}(x-1) - 2u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x+1)]. \quad (26)$$

Уравнение (26) является частным случаем уравнения (5), в котором $f(u, \lambda) = \lambda(1 - 2u^2)$, а фурье-образ ядра линейного оператора \hat{m} есть

$$m(k) = [1 + 2D(1 - \cos k)]^{-1} = 1 - Dk^2 + O(k^4), \quad (27)$$

так что диффузионная длина $\Delta = \sqrt{2D}$. Длина системы составляла $L = 100$, граничные условия задавались следующими:

$$u(0) = 0, \quad u(L+1) = u(L). \quad (28)$$

При различных значениях D в пределах 0,5—1000 были найдены бифуркационные значения параметра λ для циклов периода 1, 2, 4, ..., 256. Вычислялись также величины $S(n, x)$, определенные формулой (19), которые характеризуют интенсивности компонент движения с временным периодом 2^n в точке x .

На рис. 1 приведены распределения интенсивностей $S(n, x)$ по длине системы для $D = 1, 20, 1000$. Значение λ выбиралось в каждом из этих случаев таким, чтобы реализовался устойчивый цикл периода 512. При $D = 1$ хорошо видно увеличение длины хвоста с ростом n . Взаимодействие хвоста с правой границей для $n \leq 9$ мало, и форма хвостов практически такая же, как в полубесконечной системе. В случае $D = 20$ длина хвоста становится сравнимой с длиной системы при $n \approx 4$. Область $n = 4 \div 6$ является переходной к новому режиму, когда распределение $S(n, x)$ становится не зависящим от n . При $D = 1000$ уже для $n \geq 2$ распределение $S(n, x)$ не меняется при увеличении n .

Ясно, что для проверки подобия хвостов в полубесконечной системе (формула (20)) следует использовать результаты расчетов для малых D . На рис. 2 представлена зависимость величины $\ln[S(n, x)/S_0(n)]$ от координаты $y = xD^{-1/2}\beta^{-n}$; здесь $S_0(n)$ относится к точечной системе. Как видно из рис. 2, при больших n точки, отвечающие различным n и D , приближаются к одной и той же кривой,

которая является графиком универсальной функции $\theta(y)$. Скорость сходимости можно увеличить, если сдвинуть точку, относительно которой производится изменение масштаба, т. е. использовать переменную $y = (x + x_*)D^{-1/2}\beta^n$, x_* порядка 1.

На рис. 3 приведена зависимость от n и D величины отношения интенсивностей компонент периода 2^n и 2^{n+1} на правой границе системы: $q(n, D) = S(n, L)/S(n+1, L)$. На графике ясно видны три области 1, 2, 3. В области 1 решение вблизи границы практически однородно, и величина близка к универсальной константе γ . Область 2 соответствует взаимодействию хвоста с границей, здесь наблюдается отклонение величины q от γ . Наконец, в области 3 система ведет себя как сосредоточенная, и q вновь близко к γ .

Обратимся теперь к закономерностям подобия для бифуркационных значений параметра λ . Начнем с проверки соотношения (25).

Критические значения λ_c определялись для различных D путем экстраполяции найденных численно бифуркационных значений параметра λ . Полученные данные изображены графически на рис. 4. Как и ожидалось, согласно (25), точки располагаются вдоль прямой, угол наклона которой определяется константой κ . Заметим, что соответствие с (25) можно улучшить, если использовать вместо L величину $L_{эфф} = L + \Delta x_*$, т. е. учесть упоминавшийся выше сдвиг центра подобия хвостов относительно начала координат. Зная, что для отображения (1) значение константы $K_0 = 0,22$, по данным рис. 4 можно определить универсальную константу $A \approx 880$.

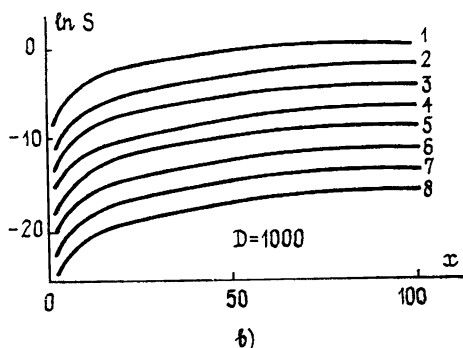
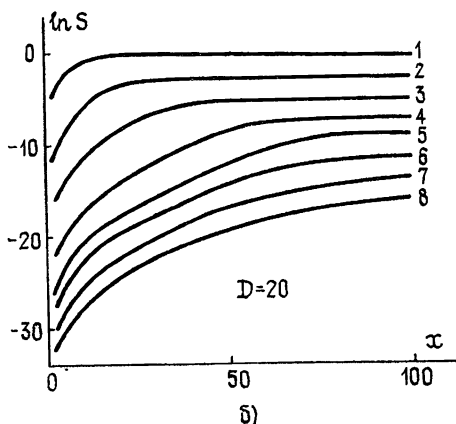
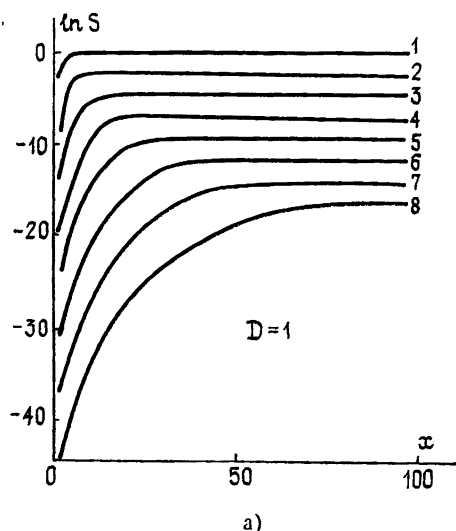


Рис. 1.

Наглядное представление о структуре бифуркаций в ограниченной системе дает рис. 5, на котором изображен график зависимости отношения $d = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) / (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ от n и D . Здесь видны те же области, что и на рис. 3: 1 — бифуркационные точки такие же, как в безграничной системе, 2 — область взаимодействия хвоста с границей; здесь отклонения d от константы Фейгенбаума δ самые большие,

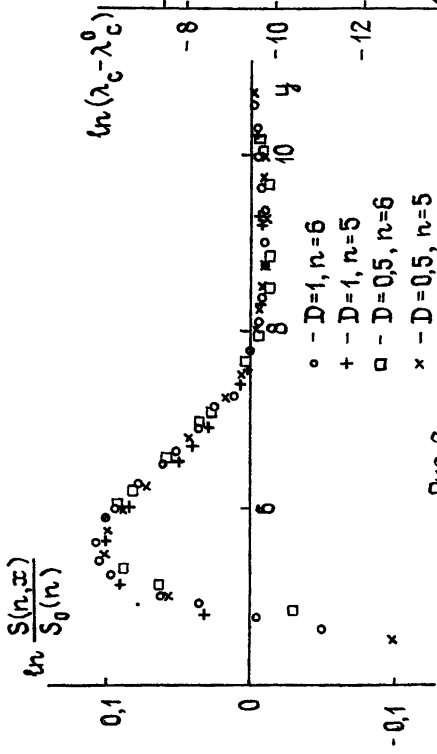


Рис. 2.

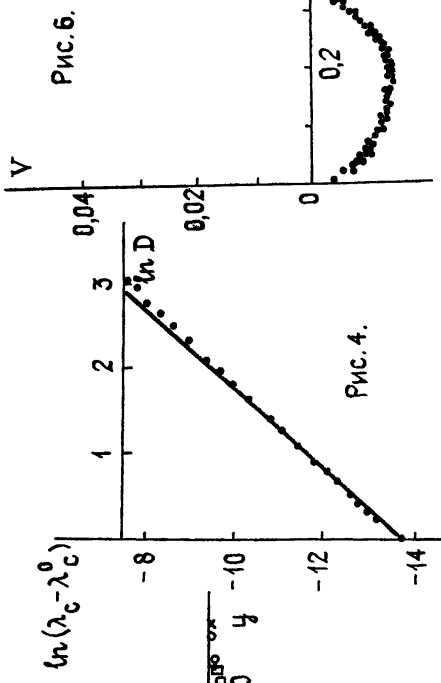


Рис. 4.

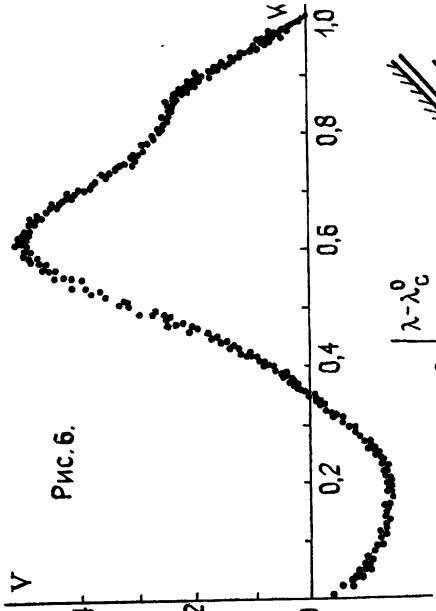


Рис. 6.

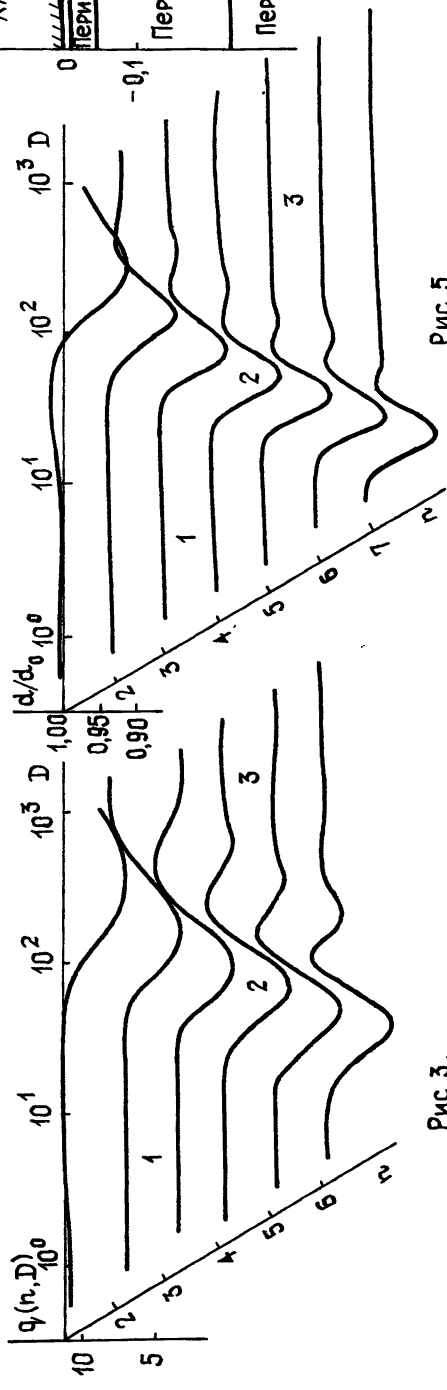


Рис. 3.

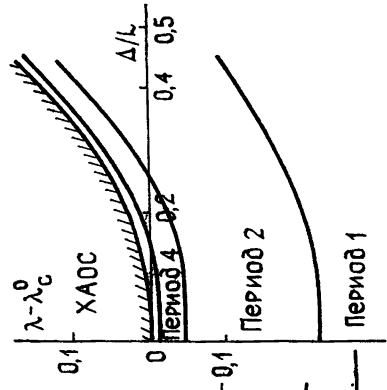


Рис. 7.

Рис. 5.

З — область, в которой система эквивалентна сосредоточенной, а бифуркационные точки удовлетворяют формуле (23).

Для проверки соотношения подобия (22) построим график

$$V = \Phi(W), \quad (29)$$

где

$$W = ((\lambda_c - \lambda_c^0)/(\lambda_c - \lambda_n^0))^{2/\kappa}, \quad V = (\lambda_c - \lambda_n - \lambda_c^0 + \lambda_n^0)/(\lambda_c - \lambda_n^0),$$

и величины, отмеченные индексом «0», относятся к точечной системе. Функция $\Phi(W)$ связана с универсальной функцией $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = 1 - Az^{-\kappa} + (1 + Az^{-\kappa})\Phi[(1 + z^{\kappa}A^{-1})^{-2/\kappa}], \quad (30)$$

поэтому результаты расчета бифуркационных значений параметра λ_n для различных D и n , будучи представлены графически в координатах V, W , должны лечь на одну кривую. Как видно из рис. 6, это действительно так. Используя (22), (30) и рис. 6, можно определить универсальную константу B в (25): $B = 1 - (2/\kappa)\Phi'(1) \approx 1,08$. Зная функцию $\Phi(W)$, нетрудно построить картину областей различных динамических режимов на плоскости физических параметров (λ, L) . Из сказанного выше ясно, что эта картина будет универсальной, если использовать нормированные переменные $(\lambda - \lambda_c^0)K_0^{-1}$ и Δ/L . Картина областей на плоскости параметров изображена на рис. 7. Отметим, что она обладает свойством масштабной инвариантности, т. е. переходит в себя при изменении масштаба по оси $\lambda - \lambda_c^0$ в δ раз и по оси Δ/L в $\sqrt[2]{\delta}$ раз.

Кроме модели (26) с граничными условиями (28) нами были исследованы численно еще несколько дискретных систем типа (5), отличающихся конкретным выбором функции $f(u, \lambda)$, оператора t и граничных условий. В частности, изучался случай периодических граничных условий, но с введенной локальной неоднородностью параметра λ , а также система с граничными условиями $u_{n+1}(0) = u_n(1)$, $u_n(L+1) = u_n(L)$, что соответствует фазовой дислокации. Во всех этих случаях получены результаты, аналогичные описанным выше и подтверждающие предложенные соотношения подобия и универсальность функций $\theta(y)$ и $\varphi(z)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся на значении изложенных выше результатов с точки зрения общей проблемы перехода к хаосу в распределенных системах. Прежде всего, отметим принципиальный момент, вытекающий из наших результатов и не имеющий аналога для сосредоточенных систем. Это наблюдаемое в окрестности точки перехода к хаосу изменение пространственной конфигурации структур, возникающих в среде после последовательных бифуркаций, и существование определенных законов подобия этих структур.

Использованный нами подход важен в методологическом плане — он позволяет проводить конструирование распределенной среды из связанных точечных систем, обладающих известными универсальными свойствами. К настоящему времени в литературе описано несколько различных типов универсального критического поведения ([², 17–20] и др.). Приписывая индивидуальным элементам какой-либо из этих типов универсального поведения, можно построить из таких элементов распределенные системы с разнообразным поведением вблизи точки перехода к хаосу. Заметим, что в каждом случае один из возможных способов введения связи между элементами — диссипативный. При этом наш подход, по существу, остаётся в силе. Действительно, из вы-

вода соотношения (15) вытекает, что масштабный фактор β зависит лишь от фактора преобразования времени в ренормализационном уравнении. Пусть временной масштаб увеличивается при ренормализации в μ раз, тогда $\beta = \sqrt{\mu}$. Отсюда следует, например, что если мы переходим в область хаоса путем изменения некоторого параметра Λ , характеризуемого масштабным фактором δ_Λ , то пространственный масштаб структур в диссипативной среде (в закритической области — радиус корреляции) будет изменяться по степенному закону $r_c \sim (\Lambda - \Lambda_c)^{-\chi}$, где $\chi = \log \beta / \log \delta_\Lambda$.

В заключение мы хотим отметить, что наша работа не исчерпывает проблемы перехода к хаосу в среде из связанных систем, демонстрирующих удвоения периода, поскольку диссипативная связь не является единственно возможной. В работе [21] было показано, что после большого числа удвоений периода произвольная связь, задаваемая гладкими функциями переменных, определяющих состояния элементов, сводится к комбинации двух универсальных типов связи. Эти типы обладают различными трансформационными свойствами по отношению к ренормализационному преобразованию. Один из них соответствует рассмотренной в данной статье диссипативной связи и приводит к описанным выше закономерностям подобия. Другой же делает возможной неустойчивость однородного состояния безграничной системы уже при $\lambda < \lambda_c$, что существенно усложняет общую картину перехода к хаосу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eckmann J. P. — *Rev. Mod. Phys.*, 1981, **53**, p. 643.
2. Фейгенбаум М. — *УФН*, 1983, **141**, № 2, с. 343.
3. Giglio M., Musazzi S., Perini U. — *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, p. 243.
4. Lauterborn W., Gramer E. — *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, p. 1445.
5. Gibbs H. M. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, p. 473.
6. Анищенко В. С., Астахов В. В. — *Радиотехника и электроника*, 1983, **28**, с. 1109.
7. Testa J., Perez J., Jeffries C. — *Chys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, p. 714.
8. Simoyi R. H., Wolf A., Swinney H. L. — *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**, p. 245.
9. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. *Устойчивость биологических сообществ.* — М.: Наука, 1978.
10. Farmer J. D. — *Physica*, 1982, **D4**, p. 366.
11. Кузнецов С. П. — *Изв. вузов — Радиофизика*, 1982, **25**, № 12, с. 1410.
12. Кузнецов С. П. — *Изв. вузов — Радиофизика*, 1982, **25**, № 11, с. 1364.
13. Bishop A. R. et al. — *Physica*, 1983, **D7**, p. 259.
14. Huberman B. A., Crutchfield J. P., Packard N. H. — *Appl. Phys. Lett.*, 1980, **37**, p. 750.
15. Pikovsky A. S. — *Z. Phys.*, 1984, **B55**, p. 149.
16. Nauenberg M., Rudnik J. — *Phys. Rev.*, 1981, **B24**, p. 493.
17. Pomeau Y., Manneville D. — *Comm. Math. Phys.*, 1980, **77**, p. 189.
18. Chang S., Wortis M., Wright J. — *Phys. Rev.*, 1981, **A24**, p. 2669.
19. Zisook A. B. — *Phys. Rev.*, 1981, **A24**, p. 1640.
20. Rand D. et al. — *Phys. Rev., Lett.*, 1982, **49**, p. 132.
21. Кузнецов С. П. — *Письма в ЖТФ*, 1983, **9**, с. 94.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 января 1984 г.

UNIVERSALITY OF PERIOD DOUBLING BIFURCATIONS IN ONE-DIMENSIONAL DISSIPATIVE MEDIA

S. P. Kuznetsov, A. S. Pikovskij

Universal scaling laws are stated for spatial structures arising during transition to chaos in a medium with one boundary or in a medium of finite length, when this medium consists of dissipatively coupled elements and each individual element in Feigenbaum period-doubling system. The results of numerical calculations are presented. This results confirmed the scaling laws and allowed one to find universal functions and constants in scaling relations.