ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 3 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538 56:519.25

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННОМ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В. Н. Столяров

Получено обобщенное трехпараметрическое распределение амплитуд колебаний для динамической системы как «мягкого», так и «жесткого» режима возбуждения при параметрическом воздействии шума Проанализирована связь трехпараметрического распределения с другими типами распределений

Изучение статистических характеристик динамических систем, подверженных воздействию случайных сил, представляет интерес при решении широкого круга проблем прикладного характера.

Для анализа как линейных, так и нелинейных колебательных систем при воздействии на них широкополосных шумов применяется математический аппарат марковских процессов и, в частности, уравнение Фоккера—Планка Эффективность метода уравнения Фоккера—Планка заключается в том, что в случае решения уравнения находится плотность вероятности распределения искомой функции для заданного стохастического дифференциального уравнения.

Настоящая работа посвящена исследованию плотности вероятности амплитуды колебаний в нелинейной стохастической динамической системе с одной степенью свободы, работающей как в «мягком», так и в «жестком» режимах возбуждения при параметрическом воздействии шума.

Рассмотрим уравнение автоколебательной системы, которое при аппроксимации элемента обратной связи полиномом пятой степени и при параметрическом воздействии шума может быть представлено в виде

$$\ddot{x} + (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4)\dot{x} + (\omega_0^2 - \Delta\omega^2 \xi(t)/\sigma)x = 0, \quad (1)$$

где x — мгновенное значение колебаний, λ_1—λ_5 — коэффициенты полинома, $\xi(t)$ — флуктуации, воздействующие параметрически на динамическую систему, σ — среднеквадратическое значение флуктуаций $\xi(t)$, ω_0 — угловая частота, $\Delta\omega$ — девиация частоты.

Флуктуации $\xi(t)$ полагаем гауссовым дельта-коррелированным процессом $\langle\xi(t)\xi(t-\tau)\rangle = \sigma^2\delta(\tau)$ с нулевым средним значением $\langle\xi(t)\rangle = 0$.

Коэффициент λ_1 характеризует линейное затухание. Если коэффициент $\lambda_3 > 0$ при $\lambda_1 < 0$, уравнение (1) является уравнением автоколебательной системы с «мягким», если $\lambda_3 < 0$ при $\lambda_1 > 0$, — с «жестким» режимом возбуждения. Без учета флуктуационного члена уравнение (1) встречается в теории ламповых генераторов [1].

Выполняя известными методами [2] (путем замены переменных: $x(t) = A\cos\Phi$, $\Phi = \omega_0(t) + \varphi$) переход от мгновенных значений к эквивалентным медленно меняющимся, получим следующие «укороченные» уравнения для амплитуды и фазы колебаний:

$$\dot{A} = A\left[-\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_3}{8}A^2 - \frac{\lambda_5}{16}A^4\right] - \frac{\Delta\omega^2}{\omega_0} A \cos\Phi \sin\Phi \frac{\xi(t)}{\sigma}; \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\Delta\omega^2}{\omega_0}\frac{\xi(t)}{2\sigma} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega_0}\cos 2\Phi \frac{\xi(t)}{2\sigma}, \quad (3)$$

где A и φ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебаний соответственно.

Используя стандартные методы [2], можно получить уравнение Фоккера—Планка для совместной плотности вероятности амплитуды и фазы колебаний

$$\dot{W}(A, \varphi) = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\langle G\rangle + \frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2} A \frac{3}{32}\frac{S(\xi, 2\omega_0)}{\sigma^2}\right] W\right\} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\langle H\rangle W\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left\{\left[\frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2} A^2 \frac{S(\xi, 2\omega_0)}{32\sigma^2}\right] W\right\} + \quad (4)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{\left[\frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2}\frac{\tau_{кор}}{4} + \frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2}\frac{S(\xi, 2\omega_0)}{32\sigma^2}\right] W\right\},$$

где $W(A, \varphi)$ — совместная плотность вероятности амплитуды и фазы, $\langle G\rangle$ и $\langle H\rangle$ — правые части уравнений (2) и (3) без учета флуктуационных членов, $S(\xi, 2\omega_0)$ — спектральная плотность шума $\xi(t)$ на частоте $2\omega_0$, $\tau_{кор}$ — время корреляции шума $\xi(t)$.

В случае статистической независимости вероятностных характеристик амплитуды и фазы из уравнения (4) можно получить одномерное уравнение Фоккера—Планка для амплитуды колебаний

$$\dot{W}(A) = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\langle G\rangle + \frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2} A \frac{3}{32}\frac{S(\xi, 2\omega_0)}{\sigma^2}\right] W(A)\right\} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left\{\left[\frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2} A^2 \frac{S(\xi, 2\omega_0)}{32\sigma^2}\right] W(A)\right\}. \quad (5)$$

Стационарное решение уравнения (5) имеет вид

$$W(A) = CA^{-4\lambda_1 B^{-1}+1}\exp\left(-\frac{\lambda_3}{B}A^2 - \frac{\lambda_5}{8B}A^4\right), \quad (6)$$

где $B = (\Delta\omega^4/\omega_0^2)S(\xi, 2\omega_0)(4\sigma^2)^{-1}$, λ_1, λ_3, λ_5 — коэффициенты полинома уравнения (1).

Найдя постоянную C из условия нормировки, получим следующее трехпараметрическое распределение:

$$W(A) = A^{\nu-1}\exp\left(-\frac{A^4 - 2pA^2}{4\sigma^4}\right)\left[2^{\nu 4-1}\sigma^{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times \exp\left(\frac{p^2}{8\sigma^4}\right) D_{-\nu/2}\left(-\frac{p}{\sqrt{2}\sigma^2}\right)\right]^{-1}, \quad (7)$$

где

$$\nu = -\frac{4\lambda_1}{B} + 2, \quad p = -\frac{4\lambda_3}{\lambda_5}, \quad \sigma = \sqrt[4]{\frac{2B}{\lambda_5}}, \quad \left(-\frac{p}{\sqrt{2}\sigma^2}\right) = \frac{2\lambda_3}{\sqrt{B\lambda_5}}, \quad (8)$$

$\Gamma(\nu/2)$ — гамма-функция, $D_{-\nu/2}(-p/\sqrt{2}\sigma^2)$ — функция параболического цилиндра, ν, p, σ — параметры распределения.

Выясним количество максимумов в кривой плотности вероятности, описываемой уравнением (7), и их выражения через параметры распределения. Приравняв нулю производную от плотности вероятности, получим биквадратное уравнение

$$A^4 - pA^2 - \sigma^4(\nu - 1) = 0, \tag{9}$$

из которого следует, что трехпараметрическое распределение (7) имеет один максимум при

$$A_{\max} = \sqrt{p/2 + \sqrt{p^2/4 + \sigma^4(\nu - 1)}}. \tag{10}$$

Из выражения (10) видно, что в устойчивой области ($p < 0$) при $\nu \to 1$, когда трехпараметрическое распределение стремится к одностороннему нормальному закону, $A_{\max} \to 0$. В области автоколебаний ($p > 0$) при $\sigma \to 0$ (т. е. когда колебательная система (1) находится глубоко в области автоколебаний и воздействие шума пренебрежимо мало) $A_{\max} \to \sqrt{p}$.

Исследуем асимптотическое поведение трехпараметрического распределения при изменении параметров ν, p, и σ. Влияние параметров p и σ целесообразно исследовать в форме отношения $(-p/\sqrt{2}\sigma^2)$, входящего в функцию параболического цилиндра.

1. При $\nu = 2$ распределение (7) переходит в распределение томсоновского генератора [3]:

$$W(A) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}\,\sigma^2} \, \frac{\exp[-(p-A^2)^2/4\sigma^4]}{[1 + \mathrm{erf}\,(p/2\sigma^2)]}. \tag{11}$$

Этим распределением описываются флуктуации амплитуды в ламповом автогенераторе «мягкого» режима возбуждения при аддитивном воздействии шума.

2. В выражении для плотности вероятности (7) положим, что $-p/\sqrt{2}\sigma^2 > 0$ и $|p|/\sqrt{2}\sigma^2 \gg 1$. Это является условием недовозбужденной системы (1). Асимптотическое разложение функции $D_l(z)$ при $|z| \gg 1$ и $|z| \gg l$ имеет следующий вид [4]:

$$D_l(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) z^l \left[1 - \frac{l(l-1)}{2z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4\cdot z^4} - \ldots\right], \tag{12}$$

$$|\arg z| < 3\pi/4.$$

Если ограничиться первым членом асимптотического разложения, т. е. положить

$$D_{-\nu/2}\left(\frac{|p|}{\sqrt{2}\,\sigma^2}\right) \approx \left[\exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma^4}\right)\right]\left(\frac{|p|}{\sqrt{2}\,\sigma^2}\right)^{-\nu/2}, \tag{13}$$

а также пренебречь A^4 по сравнению с $2pA^2$, то распределение (7) определится выражением

$$W(A) = \frac{|p|^{\nu/2} A^{\nu-1}}{2^{\nu/2-1}\sigma^{2\nu}\,\Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{|p|}{2\sigma^4} A^2\right). \tag{14}$$

Полученное распределение является распределением Накагами.

При $\nu = 2$ распределение (14), как известно, переходит в распределение Рэлея:

$$W(A) = |p| \sigma^{-4} A \exp(-pA^2/2\sigma^4), \tag{15}$$

а при $\nu = 1$ — в односторонний нормальный закон:

$$W(A) = \sqrt{2/\pi} |p|^{1/2} \sigma^{-2} \exp(-|p| A^2 2\sigma^{-4}). \tag{16}$$

3. Рассмотрим поведение распределения (7) в области автоколебаний. В этом случае должно выполняться условие $p/\sqrt{2}\sigma^2 \gg 1$. Представим распределение (7) в виде

$$W(A) = A^{\nu-1} \exp\left[-\frac{(A+\sqrt{p})^2 (A-\sqrt{p})^2}{4\sigma^4}\right] \left[2^{\nu/4-1} \sigma^\nu \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp - (p^2/8\sigma^4)\, D_{-\nu/2}\left(-p/\sqrt{2}\sigma^2\right)\right]^{-1}. \tag{17}$$

Известно [3], что в области автоколебаний распределение амплитуд сосредоточено вблизи математического ожидания, т. е. $A \sim \sqrt{p}$. С учетом этого условия распределение (17) примет следующую форму:

$$W(A) \approx (\sqrt{p})^{\nu-1} \exp\left[-\frac{p(A-\sqrt{p})^2}{\sigma^4}\right] \times$$
$$\times \left[2^{\nu/4-1} \sigma^\nu \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{8\sigma^4}\right) D_{-\nu/2}\left(-\frac{p}{\sqrt{2}\sigma^2}\right)\right]^{-1}. \tag{18}$$

Воспользуемся асимптотическим выражением для функции параболического цилиндра [4]:

$$D_l(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) z^l \left[1 - \frac{l(l-1)}{2z^2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4\cdot z^4} - \ldots\right] -$$
$$- \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-l)} \exp(-jl\pi) \exp\left(\frac{z^2}{4}\right) \times$$
$$\times \left[1 + \frac{(l+1)(l+2)}{2z^2} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2\cdot 4\cdot z^4} + \ldots\right],$$
$$\pi/4 < \arg z < 5\pi/4. \tag{19}$$

При $\arg z = \pi$ и $|z| \gg 1$ первым слагаемым в выражении (19) можно пренебречь, а во втором слагаемом ограничиться первым членом разложения. Тогда асимптотическое разложение (19) будет иметь вид

$$D_{-\nu/2}\left(-\frac{p}{\sqrt{2}\sigma^2}\right) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu/2)} \exp\left(\frac{p^2}{8\sigma^4}\right) \left|\frac{p}{\sqrt{2}\sigma^2}\right|^{\nu/2-1}. \tag{20}$$

Подставив полученное выражение в (18), будем иметь

$$W(A) = \sqrt{p/\pi}\, \sigma^{-2} \exp\left[-(p/\sigma^4)(A-\sqrt{p})^2\right]. \tag{21}$$

Таким образом, в области автоколебаний распределение (7) стремится к нормальному закону (21).

Подводя итог, попытаемся проследить трансформацию распределения (7) при подходе динамической системы (1) к области автоколебаний. Когда система (1) далека от порога самовозбуждения и не обладает резонансными свойствами, распределение амплитуд (7) стремится к одностороннему нормальному закону (16). При подходе к области автоколебаний спектр сигнала на выходе системы становится узкополосным и распределение (7) переходит в распределение Рэлея. При дальнейшем подходе к области автоколебаний, на границе самовозбуждения и в области автоколебаний с малой амплитудой распределение амплитуд описывается трехпараметрическим распределением (7). В области автоколебаний с большой амплитудой трехпараметрическое распределение (7) стремится к нормальному закону (21). Картина трансформации трехпараметрического распределения в другие типы распределений представлена на рис. 1, где цифры обозначают: *1* — односторонний нормальный закон (16), *2* — распределение Накагами (14), *3* — распределение Рэлея (15), *4*, *5* — трехпараметрическое распределение (7), *6* — нормальное распределение (21).

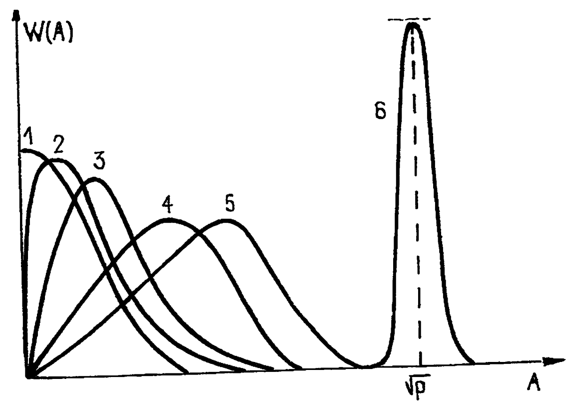

Рис. 1.

Из изложенного выше ясно, что трехпараметрическое распределение обобщает основные законы распределений, которыми описываются флуктуации амплитуды в динамических колебательных системах при воздействии на них широкополосных шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А, Витт А. А, Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
2. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961. — 557 с
3 Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966. —404 с.
4 Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.

Поступила в редакцию
26 декабря 1983 г.

ON ONE GENERALIZED THREE-PARAMETER DISTRIBUTION

V. N. Stolyarov

A generalized three-parameter distribution of the amplitude is received for a dynamic system both of the «soft» and the «hard» regimes of a excitation under the parametric action of the noise. A relation between the three-parameter distribution and other distributions is analyzed.