ные по формуле (1) с учетом поглощения в ионосфере. Экспериментальные значения $m(x)$, полученные для двух дней наблюдения 13.01.82 г. (крестики) и 2.04.81 г. (точки), определялись по формуле

$$m(x_i) = [E_{\max}(x_{i+1}) - E_{\min}(x_i)] / [E_{\max}(x_{i+1}) + E_{\min}(x_i)], \tag{4}$$

где $E_{\max}(x_{i+1})$ — величина $(i+1)$-го максимума, $E_{\min}(x_i)$ — величина i-го минимума (кривая $1—s=0$; $2—s=10^{-5}$; $3—s=5\cdot10^{-5}$; $4—s=10^{-4}$).

Из рисунка видно, что наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных значений наблюдается при величине параметра $s=10^{-5}$ для 2.04.81 г. и $s=5\cdot10^{-5}$ для 13.01.82 г. Полученные оценки ν, равные соответственно 1260 c^{-1} и 3140 c^{-1}, находятся в хорошем согласии с данными для эффективной частоты соударений F-области ионосферы, приведенными в [7].

Таким образом, учет поглощения в ионосфере позволяет устранить различие в теоретической и экспериментальной дистанционных зависимостях амплитуды поля $E(x)$ вблизи границы мертвой зоны и оценить эффективную частоту соударений F-области ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блиох П. В., Галушко В. Г., Ямпольский Ю. М Препринт ИРЭ АН УССР № 194. — Харьков, 1982.
2. Чернов Ю. А., Жильцов А. У. — Геомагнетизм и аэрономия, 1982, 22, № 3, с. 508.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973, с. 158.
4. Орлов Ю. И., Демин А. В. В кн: Распространение декаметровых радиоволн. — М.: ИЗМИРАН, 1983.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
6. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere. — Cambridge: Gambridge Univ. Press, 1961, p. 185.
7. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. — М: Наука, 1972, с. 347.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 апреля 1984 г.

УДК 538.56

О БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. И. Тихонов, А. И. Федоров

Одной из основных задач математической статистики является оценка неизвестной функции распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины ξ по независимой выборке $x_N=\{x_1, x_2, .. , x_N\}$ конечного объема N. При традиционном методе решения такой задачи [1—3] из совокупности конкретных наблюденных значений x_N подсчитывают число n значений, которые по величине меньше x'. В качестве оценки $F(x)$ в точке x' принимают значение

$$F^*(x') = n/N. \tag{1}$$

Такой метод оценки имеет два недостатка: 1) не учитываются предварительные (априорные) сведения о характере случайной величины ξ, которыми обычно располагает наблюдатель до получения выборки, и 2) невозможно заранее определить требуемый объем выборки N для получения оценки $F(x)$ с заданной дисперсией ошибки. Этот недостаток устраняется при байесовском подходе к решению задачи. Он изложен в [4].

Примем, что ξ — непрерывная случайная величина, и на основании физических представлений о ней зададимся некоторой априорной плотностью вероятности $P_{pr}(F)$ для $F(x')$, где $0\leqslant F(x')\leqslant 1$. Пусть проведено N независимых наблюдений, в результате которых в n случаях оказалось, что $x_i<x'$, причем случайная величина n равномерно распределена, т. е. $P(n)=1/N$. Тогда апостериорная плотность вероятности будет определяться биномиальным законом·

$$P_{ps}(F)=P(F|N)=CP_{pr}(F)L(F), \tag{2}$$

где $L(F) = F^n(1-F)^{N-n}$ — функция правдоподобия, C — постоянная, не зависящая от F и определяемая из условия нормировки плотности вероятности к единице:

$$C = \left[\int_0^1 P_{pr}(F)L(F)dF\right]^{-1}. \tag{3}$$

В частном случае, когда априорная информация о значении $F(x')$ «отсутствует», т. е. $P_{pr}(F)$ полагается равномерной в интервале [0, 1], получим [4]

$$P_{ps}(F) = F^n(1-F)^{N-n}/B(n+1,\ N-n+1), \tag{4}$$

где $B(x, y)$ — бета-функция [5], причем (4) представляет собой частный вид бета-распределения с параметрами n и N.

Зная апостериорную плотность вероятности, можно получить оценку $F(x')$ по разным критериям. Рассмотрим два наиболее распространенных метода оценки: по математическому ожиданию и по максимуму апостериорной плотности вероятности [6].

С использованием (4) получаем оценку по математическому ожиданию апостериорной плотности вероятности

$$F^* = \int_0^1 F P_{ps}(F)\,dF = (n+1)/(N+2). \tag{5}$$

Апостериорная дисперсия такой оценки равна

$$D_{F^*} = \int_0^1 (F-F^*)^2 P_{ps}(F)\,dF = (nN+N-n^2+1)/(N^3+7N^2+16N+12). \tag{6}$$

В отсутствие наблюдений ($N=0$, $n=0$) из (5) и (6) имеем $F^* = 0{,}5$ и $D_{F^*} = 1/12$. Эти данные соответствуют принятой равномерной априорной плотности вероятности $P_{pr}(F)=1$ при $0 \leqslant F \leqslant 1$.

За оценку $F(x')$ по максимуму апостериорной плотности вероятности принимается значение F_m, максимизирующее апостериорную плотность вероятности, т. е. определяемое из уравнения

$$dP_{ps}(F)/dF = 0.$$

Подставив сюда выражение (4), получим оценку, совпадающую с (1):

$$F_m = n/N. \tag{7}$$

Дисперсия такой оценки равна

$$D_{F_m} = \int_0^1 (F-F_m)^2 P_{ps}(F)\,dF = D_{F^*} + \Delta, \tag{8}$$

где дисперсия D_{F^*} определена выражением (6), а

$$\Delta = (N+3)(N-2n)^2/(N^3+7N^2+16N+12) \geqslant 0. \tag{9}$$

Здесь знак равенства имеет место при $n=N/2$

Оценка (7) совпадает с традиционной оценкой (1) Дисперсия такой оценки (8) больше дисперсии оценки (6) на величину Δ. Поэтому применение данного метода оценки при малом объеме выборки нецелесообразно.

Определим требуемый объем выборки N при заданной допустимой наибольшей дисперсии ошибки определения $F(x)$. С использованием формулы (6) найдем значение n_0, при котором дисперсия оценки максимальна:

$$\frac{d}{dn} D_{F^*}\Big|_{n=n_0} = 0.$$

Отсюда получим $n_0=N/2$. Поэтому

$$D_{F^*\max} = D_{F^*}(n_0) = (N^2+4N+4)^2/4(N^3+7N^2+16N+14). \tag{10}$$

Это выражение позволяет определить требуемый объем выборки N по заданной максимальной дисперсии оценки $F(x)$.

Заметим, что оценка (5) и ее дисперсия (6) получены для функции распределения $F(x')$ в фиксированной точке x'. Рассмотрим более общую задачу оценки $F(x)$ во всем интервале возможных значений x от $-\infty$ до ∞, причем $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $F(x) \to 1$ при $x \to \infty$ Пусть объем выборки фиксирован.

Когда $n = 0$, что соответствует $x \to -\infty$, из (4)—(6) имеем

$$\begin{gathered} P_{ps}(F) = (N+1)(1-F)^N, \quad F^* = (N+2)^{-1}, \\ D_{F^*} = (N+1)(N^3+7N^2+16N+12)^{-1}. \end{gathered} \tag{11}$$

Плотность вероятности (11) изображена на рис. 1 В данном случае при достаточно больших N оценка F^* и ее дисперсия D_{F^*} близки к нулю.

В другом предельном случае, когда $n \to N$ (что соответствует $x \to \infty$), формулы (4)—(6) примут соответственно вид

$$P_{ps}(F)=(N+1)F^N, \quad F^*=1-(N+2)^{-1},$$
$$D_{F*}=(N+1)\ (N^3+7N^2+16N+12)^{-1}. \tag{12}$$

Эта плотность вероятности, соответствующая $n/N=1$, также представлена на рис. 1. Она симметрична предыдущей плотности вероятности ($n/N=0$) относительно вертикальной прямой $F=0{,}5$.

Апостериорные плотности вероятности для промежуточных значений x оказываются одномодальными. Качественный характер этих плотностей вероятностей для $n/N=0{,}2$; $0{,}3$ и $0{,}5$ при $N=10$ показан на рис. 1.

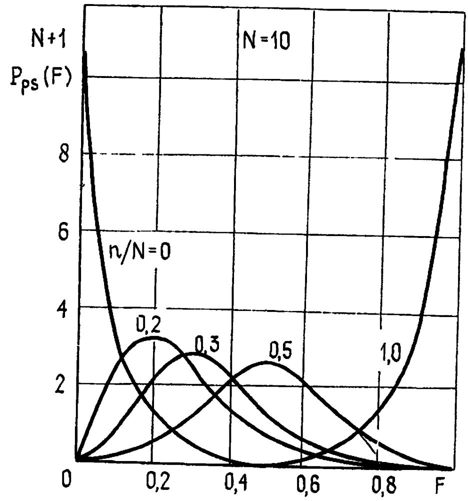

Рис. 1.

В тех случаях, когда нет оснований для соглашения о равномерной априорной плотности вероятности, процедура получения оценок $F(x)$ может оказаться более сложной. Она будет сравнительно простой, если априорное и апостериорное распределения принадлежат к одному и тому же семейству. В частности, это имеет место, когда для обоих распределений зависимость от F имеет вид $F^a(1-F)^b$, где a и b — постоянные. Как видно из (2), при априорном распределении такого вида параметры апостериорного распределения определяются путем простого прибавления к параметрам априорного распределения соответствующих чисел, полученных в результате эксперимента.

Распределения, обладающие таким свойством, называются самосопряженными и самовоспроизводящими относительно процедуры выбора. К числу таких сопряженных семейств относится семейство бета-распределений (4). В качестве дополнительного преимущества использования бета-распределения следует указать, что им охватываются разнообразные по виду плотности вероятности [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В Курс теории вероятностей. Учебник для университетов. 5-е изд. — М.: Наука, 1969.
2. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика Учебн. пособие для вузов. — М.: Наука, 1979.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. / Пер с англ. — М.: Мир, 1975.
4. Schreiber F. — AEÜ, 1981, 35, № 12, S. 473.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
6. Тихонов В. И Статистическая радиотехника — М.: Радио и связь, 1982.
7. Ховард Р. А. — ТИИЭР, 1970, 58, № 5, с. 32.

Поступила в редакцию
20 декабря 1983 г.

УДК 621.372.823

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОДНО-ЩЕЛЕВЫХ ЛИНИЙ НА МНОГОСЛОЙНОЙ ПОДЛОЖКЕ

А. М. Лерер, В. С. Михалевский, А. С. Цюпко

Для техники СВЧ характерно продвижение в область все более высоких частот Одним из наиболее перспективных типов линий передачи миллиметрового диапазона является волноводно-щелевая линия (ВЩЛ). На ее основе созданы различные устройства: фильтры, антенны, переключатели, направленные ответвители [1–3] и т. д.