ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1985*

УДК 621.372.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПЛАВНОНЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А. М. Радин

Решена двумерная скалярная задача о распространении волн в волноводе с плавнонерегулярными импедансными стенками при скачкообразном изменении граничного условия на одной из стенок. Получены явные формулы для поля и коэффициентов трансформации мод, обсуждаются условия их применимости. Результаты могут быть использованы при изучении распространения волн в природном волноводе Земля — ионосфера при наличии переходов типа суша — вода.

В течение последних лет интенсивно развивалась техника построения решений в случае волноводов с плавно меняющимися вдоль оси свойствами [1–9]. Расчёты таких волноводов по существу основаны на идее локальности. В данной работе эта техника применяется к тому случаю, когда в волноводе имеется скачкообразное изменение краевого условия импедансного типа. Оказалось, что теорию такого волновода тоже можно построить, и в основе такого построения лежат те же соображения локальности. Рассмотрим двумерную скалярную задачу для уравнения Гельмгольца со следующими краевыми условиями (рис. 1). На верхней стенке волновода поле удовлетворяет импедансному граничному условию всюду с импедансом W_0, а на нижней стенке имеется скачок граничного условия. На одной

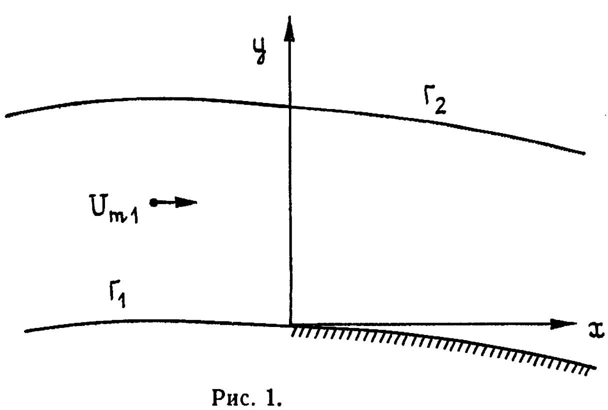

Рис. 1.

половине нижней стенки поле удовлетворяет граничному условию с импедансом W_1, а на другой ее половине — с импедансом W_2. Все импедансы считаются медленно меняющимися функциями продольной координаты. Из области $x < 0$ на границу $x = 0$ набегает одна из нормальных волн этой области. Требуется определить поле в таком волноводе. Отраженное от неоднородности и прошедшее ее поля ищутся в виде суперпозиций нормальных волн областей $x<0$ и $x>0$.

В окрестности границы $x=0$ эти разложения сшиваются с решением эталонной задачи, допускающей явное решение методом Винера—Хопфа [11]. При этом определяются амплитуды отражённых и прошедших волн. Результаты работы можно использовать при изучении распространения волн, например, в природном волноводе Земля—ионосфера при наличии переходов суша—вода и в других задачах, адекватных данной модели.

Определим нормальные волны областей $x<0$ и $x>0$. Пусть слабоизогнутые кривые Γ_1 и Γ_2 — границы стенок волновода (рис. 1). Уравнения стенок $y=f_1(\varepsilon x)$ и $y=f_2(\varepsilon x)$, где f_1 и f_2 — гладкие функции. Малый параметр ε характеризует степень искривлённости стенок волновода. Поле $U(x,y)$ удовлетворяет внутри волновода уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)U=0 \tag{1}$$

и граничным условиям на стенках

$$U'+W_0U=0, \quad y=f_2(\varepsilon x), \quad -\infty<x<\infty; \tag{2}$$

$$U'+W_1U=0, \quad y=f_1(\varepsilon x), \quad x<0 \tag{3}$$

$$U'+W_2U=0, \quad y=f_1(\varepsilon x), \quad x>0, \tag{4}$$

где штрих означает производную по нормали, импедансы $W_i(\varepsilon x)$ $(i=0, 1, 2)$ — медленно меняющиеся гладкие функции. Нормальные волны ищутся в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра ε [4]

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n A_n(\xi,\eta)\exp[i\Phi(\xi)/\varepsilon] \tag{5}$$

в координатах ξ и η:

$$\xi=\varepsilon x, \quad \eta=\frac{1}{h}[y-f_1(\xi)], \quad h=f_2(\xi)-f_1(\xi),$$

где A_n и Φ — неизвестные функции. Подстановка разложения (5) в уравнение (1) порождает рекуррентную систему уравнений для определения A_n и Φ:

$$LA_0=0,$$

$$LA_1=-2ih^2A_0'\Phi'-ih^2A_0\Phi''+2ih(f_1'+h'\eta)\Phi'(\partial/\partial\eta)A_0,$$

$$LA_n=-2ih^2A_{n-1}'\Phi'-ih^2A_{n-1}\Phi''-h^2A_{n-2}''+$$

$$+2h(f_1'+h'\eta)(\partial/\partial\eta)(i\Phi'A_{n-1}+A_{n-2}')-(f_1'+h'\eta)^2\times$$

$$\times(\partial^2/\partial\eta^2)A_{n-2}+(hf_2''-2f_1'h'-2(h')^2)(\partial/\partial\eta)A_{n-2},$$

где

$$L=\partial^2/\partial\eta^2+(kh)^2-(h\Phi')^2$$

$(n=2,3,\dots)$. Штрих означает производную по ξ. Решая эти уравнения с граничными условиями (2)—(4), получаем нормальные волны

$$U_{mn}=\mathrm{const}\left[\cos(p_{mn}\eta)+\frac{z_n}{p_{mn}}\sin(p_{mn}\eta)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\int_0^{\xi}\left[\varphi_{mn}(t)+\frac{i}{\varepsilon}q_{mn}(t)\right]dt\right\}+O(\varepsilon), \tag{6}$$

где $n = 1$ или 2 для областей $\xi < 0$ и $\xi > 0$ соответственно $(m = 1, 2, \ldots)$, $z_n = hW_n$,

$$\varphi_{mn} = -\left\{\left(\frac{q'_{mn}}{q_{mn}} + \frac{h'}{h} - \frac{p'_{mn}}{p_{mn}}\right) Q_{mn} + \frac{1}{2}(p^4_{mn})' + \right.$$

$$+ 2z_0 z_n \left(\frac{h'}{h} - \frac{p'_{mn}}{p_{mn}}\right)(z_0 + z_n + z_0 z_n) + \left(\frac{z_n^2}{h^2}\right)' h^2 (p^2_{mn} + z_0 + z_0^2) +$$

$$\left. + 2p^2_{mn} h \left[z_0^2 \left(\frac{z_n}{h}\right)' - \frac{z_n^2}{h^2} f' - \frac{h'}{h^2} z_0 z_n\right]\right\} \frac{1}{Q_{mn}},$$

$$q_{mn} = \left[k^2 - \left(\frac{p_{mn}}{h}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$Q_{mn} = \frac{p^2_{mn}(p^2_{mn} - z_0 z_n)}{p^4_{mn} + p^2_{mn}(z_0^2 + z_n^2) + z_0^2 z_n^2 + (z_0 + z_n)(p^2_{mn} + z_0 z_n)},$$

p_{mn} — корни двух трансцендентных уравнений,

$$f(p_{mn}, z_n) = p_{mn}(z_0 + z_n)\cos p_{mn} - (p^2_{mn} - z_0 z_n)\sin p_{mn} = 0. \qquad (7)$$

Под корнем квадратным для волн, распространяющихся в направлении $\xi > 0$, понимается та его ветвь, у которой $\operatorname{Re} q_{mn} > 0$, а при $\operatorname{Re} q_{mn} = 0$ $\operatorname{Im} q_{mn} > 0$, так как зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$ и опущена. Для волн, распространяющихся в направлении $\xi < 0$, знаки неравенств заменяются на противоположные. На этом задача построения нормальных волн областей $\xi \gtrless 0$ считается законченной.

Перейдем к решению задачи (1)—(4), которое ищется в виде суперпозиции отраженных от скачка $\xi = 0$ и прошедших его нормальных волн

$$U = \begin{cases} U_{m1} + \sum\limits_{s=1}^{\infty} x_s U_{s1}, & \xi < 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} y_s U_{s2}, & \xi > 0 \end{cases}, \qquad (8)$$

где U_{sn} $(n = 1, 2)$ — нормальные волны областей $\xi \gtrless 0$, определяемые формулами (6), (7) с учётом направления распространения, U_{m1} — набегающая из области $\xi < 0$ нормальная волна с фиксированным номером m, x_s, y_s — неизвестные коэффициенты, которые необходимо искать в виде разложений

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} x_{sk}\,\varepsilon^k, \quad y_s = \sum_{k=0}^{\infty} y_{sk}\,\varepsilon^k. \qquad (9)$$

Из формул (5)—(7) следует, что главные члены в разложениях по ε нормальных волн частичных областей волновода локально имеют такую же структуру, как и у соответствующего плоскопараллельного волновода ($h = \mathrm{const}$). Это свойство локальности поля, широко применяемое ранее рядом авторов для расчета плавнонерегулярных волноводов без скачка граничных условий [1–9], позволяет вычислить коэффициенты x_{sk} и y_{sk} в последовательных порядках по ε и в данной задаче. Для этого необходимо знать поле в окрестности скачка.

Будем искать U из (8) в малой окрестности линии $x=0$ в виде интеграла с неизвестной плотностью $g(\alpha)$ [10]:

$$U = U^0_{m1} + \int_{-\infty}^{\infty} \{a \cos [a(\eta - 1)] - z_0 \sin [a(\eta - 1)]\} \frac{g(\alpha)}{f(a, z_2)} e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (10)$$

где $a=h(k^2-\alpha^2)^{1/2}$, f — функция, определенная в уравнении (7), U^0_{m1} — поле волны U_{m1} в окрестности $x=0$, которое имеет вид

$$U^0_{m1} = c_m \left[\cos(p_{m1}\eta) + \frac{z_1}{p_{m1}} \sin(p_{m1}\eta)\right] \exp(iq_{m1}x), \quad (11)$$

где c_m — некоторая константа. Подстановка показывает, что поле (10) удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2), а условия (3), (4) дают для определения $g(\alpha)$ функциональные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a, z_1)}{f(a, z_2)} g(\alpha) \exp(i\alpha x)\, d\alpha = 0, \quad x < 0; \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \exp(i\alpha x)\, d\alpha = c_m (z_1 - z_2) \exp(iq_{m1}x), \quad x > 0. \quad (13)$$

Для решения этих уравнений представим отношение функций в (12) в виде, требуемом методом Винера—Хопфа [11]:

$$\frac{f(a, z_1)}{f(a, z_2)} = \frac{f(kh, z_1)\, b_1(\alpha)\, b_1(-\alpha)}{f(kh, z_2)\, b_2(\alpha)\, b_2(-\alpha)}, \quad (14)$$

где

$$b_j(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{q_{nj}}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{q_{nj}}\right) \quad (j = 1, 2)$$

— функции, аналитические и не имеющие нулей в верхней полуплоскости α, $b_j(-\alpha)$ обладают аналогичными свойствами в нижней полуплоскости. Путем стандартных преобразований получаем

$$g(\alpha) = \frac{c_m}{2\pi i} \frac{z_1 - z_2}{\alpha - q_{m1}} \frac{b_1(q_{m1})\, b_2(\alpha)}{b_2(q_{m1})\, b_1(\alpha)}. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (10) после проведения интегрирования дает поле U в окрестности скачка в виде суперпозиции нормальных волн, расходящихся от скачка:

$$U = \begin{cases} U^0_{m1} + d_m \sum\limits_{s=1}^{\infty} r_{s1} \left[\cos(p_{s1}\eta) + \dfrac{z_1}{p_{s1}} \sin(p_{s1}\eta)\right] \exp(-iq_{s1}x), & x < 0 \\ d_m \sum\limits_{s=1}^{\infty} r_{s2} \left[\cos(p_{s2}\eta) + \dfrac{z_2}{p_{s2}} \sin(p_{s2}\eta)\right] \exp(iq_{s2}x), & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

где

$$d_m = \frac{c_m kh (z_2 - z_1)\, b_1(q_{m1})}{f(kh, z_2)\, b_2(q_{m1})}, \quad r_{s1} = \frac{(p_{s1}^2 + z_0^2) \sin p_{s1}}{(q_{s1} + q_{m1})(z_0 + z_1)\, b_2(q_{s1})\, p_{s1}}, \quad (17)$$

$$r_{s2} = \frac{(p_{s2}^2 + z_0^2) \sin p_{s2}}{(q_{m1} - q_{s2})(z_0 + z_2)\, b_1(q_{s2})\, p_{s2}}.$$

Сравнивая разложения (16), (9) и (8), находим, что

$$x_{s0} = d_m r_{s1}, \quad y_{s0} = d_m r_{s2}, \tag{18}$$

где величины, входящие в (17), (18), нужно брать при $x = 0$. Вычисления в следующих порядках по ε проводятся по аналогичной схеме, однако они технически более сложны. Таким образом, поле в волноводе определяется формулой (8) с известными коэффициентами (18) и нормальными волнами, определяемыми формулой (6) для произвольных ξ и η. Построенное решение будет правильно описывать поле на расстояниях по оси x, на которых обеспечивается плавнонерегулярность, т. е. порядка $1/\varepsilon$. Границы применимости формул по числу распространяющихся мод связаны с локальными свойствами применяемых разложений [1–9], поэтому номер набегающей моды m не должен быть слишком большим. Более точно эти условия можно установить путем вычисления поправок к полю в следующих порядках по ε, которые носят довольно сложный интегральный характер и сильно зависят от конкретно рассматриваемого волновода.

Автор благодарен В. М. Бабичу за предложение рассмотреть данную задачу и конструктивную критику результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
2. Кацнеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — М.: изд. АН СССР, 1961.
3. Маслов В. П. — ДАН СССР, 1958, **123**, № 4, с. 631.
4. Покровский В. Л., Улинич Ф. Р., Саввиных С. К. — Радиотехника и электроника, 1959, **4**, № 2, с. 161.
5. Bretherton F. P. — Proc. Roy. Soc., 1968, **A-302**, p. 555.
6. Weinberg H., Burridge R. — J. Acoust. Soc. Am., 1974, **55**, № 1, p. 63.
7. Rosenfeld G., Keller J. B. — J. Acoust. Soc. Am., 1975, **57**, № 5, p. 1094.
8. Нейштадт А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 2, с. 218.
9. Молотков И. А., Старков А. С. — ДАН СССР, 1980, **254**, № 2, с. 327.
10. Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1958, **1**, № 3, с. 64.
11. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1962.

Ленинградский технологический институт холодильной промышленности

Поступила в редакцию 9 декабря 1983 г.

WAVE PROPAGATION IN THE SMOOTH-IRREGULAR WAVEGUIDE WITHIN THE SPASMODIC CHANGE OF BOUNDARY CONDITIONS

A. M. Radin

The scalar two-dimensional Helmholtz's equation on waves propagation in the smooth-irregular waveguide with the spasmodic change of formulas have been obtained boundary condition on the one of the borders has been solved for field and modes coefficients of transformation Conditions of applications of the formulas are discussed. Results can be used studies in studies of waves propagation in the natural earth—celestial sphere waveguide while crossing the earth—sea and other process adequate at the present model.