

УДК 538.56-519 25

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСЦИЛЛЯТОРА,
ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО
РЕЗОНАНСНЫМ ШУМОМ**

О. В. Музычук

Рассмотрена колебательная система, параметрически возбуждаемая шумовой накачкой с резонансным спектром мощности, максимум которого приходится на основную параметрическую частоту, а ширина может быть произвольной. Для двух типов накачки — гауссова шума и случайного телеграфного процесса — получен ряд точных результатов для вероятностных характеристик выходного колебания. Обсуждается возможность аппроксимации гауссова параметрического воздействия телеграфным процессом.

При анализе динамических систем, подверженных интенсивным и не дельта-коррелированным случайным воздействиям, корреляционные функции таких воздействий обычно предполагаются экспоненциальными. Это обусловлено тем, что такой вид функций корреляции характерен для «точно решаемых» моделей случайных воздействий, таких, как телеграфный процесс, обобщенный телеграфный процесс, гауссов-марковский процесс (см. [1] и библиографию).

В настоящей работе исследованы вероятностные характеристики гармонического осциллятора с параметрической накачкой, имеющей резонансный спектр мощности (при этом огибающая спектра экспоненциально коррелирована). Предполагается, что максимум спектра приходится на основную параметрическую частоту, а ширина его может быть произвольной. Рассмотрено два вида накачки: гауссов шум и телеграфный случайный процесс. Полученные ниже точные результаты для среднеквадратичных характеристик и вероятностного распределения огибающей выходного сигнала представляют интерес для ряда задач статистической радиофизики и теории колебаний стохастических систем [1, 2].

1. Рассмотрим колебательную систему, описываемую стохастическим уравнением

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \Omega^2[1 + \xi(t)]y = \Omega^2x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — пока произвольный входной сигнал, $\xi(t)$ — параметрическая накачка, которую представим в виде*

$$\xi(t) = \alpha(t) \sin 2\Omega t. \tag{2}$$

Огибающую $\alpha(t)$ определим вспомогательным уравнением

$$\dot{\alpha} + \Pi\alpha = \eta(t), \tag{3}$$

* Используемый ниже подход допускает также представление параметрического воздействия в виде

$$\xi(t) = \alpha(t) \sin 2\Omega t + \beta(t) \cos 2\Omega t, \tag{2a}$$

где огибающая $\beta(t)$ описывается уравнением, подобным (3).

где $\eta(t)$ — гауссов шум с нулевым средним и корреляционной функцией вида

$$\langle \eta(t)\eta(t-\tau) \rangle = D_\eta \delta(\tau), \quad D_\eta = 2\pi \langle \alpha^2 \rangle.$$

Введем синус- и косинус-огигающие входного процесса и выходного колебания:

$$x(t) = x_s \sin \Omega t + x_c \cos \Omega t, \quad y(t) = u \sin \Omega t + v \cos \Omega t.$$

Используя обычное предположение об относительной медленности всех огибающих и выполнив усреднение по периоду колебаний, приходим к уравнениям для $u(t)$ и $v(t)$:

$$u' + u = -(Q/2)\alpha(t)u + Qx_c(t), \quad v' + v = (Q/2)\alpha(t)v - Qx_s(t). \quad (4)$$

Здесь и ниже дифференцирование проводится по безразмерному времени $\theta = ht$, $Q = \Omega/2h$ — добротность «невозмущенной» системы.

На основании (3), (4) нетрудно получить цепочку кинетических уравнений для среднего значения произвольной функции огибающей выходного колебания $\psi(u, v)$. Поскольку для накачки, задаваемой уравнением (3), процессы $u(t)$ и $v(t)$ статистически независимы, ограничимся ниже отысканием вероятностных характеристик огибающей $u(t)$. Заметим, что, как показывает анализ, полученные ниже результаты для средней интенсивности выходного колебания справедливы и в случае более естественной модели шумовой накачки (2а).

Используя методику, изложенную в [3, 4], для $\langle \psi(u) \rangle$ получим следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle' + \left\langle u \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle + \frac{Q}{2} \langle \psi_1 \rangle &= Q \left\langle x_c \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle, \\ \langle \psi_1 \rangle' + \nu \langle \psi_1 \rangle + \left\langle u \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \right\rangle + \frac{Q}{2} \left(\langle \alpha^2 \rangle \left\langle \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \psi \right\rangle + \langle \psi_2 \rangle \right) &= \\ &= Q \left\langle x_c \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \right\rangle, \quad (5) \\ \dots &\dots \\ \langle \psi_k \rangle' + k\nu \langle \psi_k \rangle + \left\langle u \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \right\rangle + \frac{Q}{2} \left(\langle \alpha^2 \rangle \left\langle \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \psi_{k-1} \right\rangle + \right. &+ \\ \left. + \langle \psi_{k+1} \rangle \right) &= Q \langle x_c \partial \psi_k / \partial u \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где $\nu = \Pi/h$ — относительная ширина спектра процесса $\alpha(t)$, а вспомогательные переменные связаны с совместными кумулянтами накачки и определенных функций огибающей, а именно [4, 5]:

$$\langle \psi_k \rangle = \left\langle \alpha, \dots, \alpha, \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right)^k \psi(u) \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Цепочка (5) содержит всю информацию об одномомментных характеристиках процесса $u(t)$ *. Ограничение конечной системой из первых $(n+1)$ -го уравнений эквивалентно, как известно [6], замене гауссова

* Цепочка для $\langle \psi(v) \rangle$ отличается от (5) заменой операторов $u(\partial/\partial u)$ на $(-v(\partial/\partial v))$ и $x_c(\partial/\partial u)$ на $(-x_s(\partial/\partial v))$.

шума $\alpha(t)$ на суперпозицию из n статистически независимых телеграфных процессов с пуассоновской статистикой переключений.

2. Пусть входной сигнал $x(t)$ представляет собой широкополосный гауссов шум. Положив в (5) $\psi(u) = u^2 \equiv I$, получим цепочку уравнений для отыскания средней интенсивности выходного колебания (поскольку, как легко видеть, $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \langle I \rangle$). Ограничившись нахождением стационарного значения $\langle I \rangle$, придем к следующей системе алгебраических уравнений:

$$2\langle I \rangle + \langle I_1 \rangle = 2\langle I \rangle_0, \quad (6)$$

$$(k + 2\tau)\langle I_k \rangle + \langle I_{k+1} \rangle + 2k\mu\tau\langle I_{k-1} \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\tau = \nu^{-1}$ — относительное время корреляции накачки, $\mu = (1/2)Q^2 \times \langle \alpha^2 \rangle \tau$ — эффективная спектральная мощность огибающей накачки, $\langle I \rangle_0 = (\Omega/2)QD_x$ — средняя интенсивность выходного колебания в отсутствие параметрического воздействия. Вспомогательные переменные представляют собой совместные кумулянты $\langle I_k \rangle = \langle \alpha, |^k I \rangle$.

Решение систем, подобных (6), представимо цепными дробями, а именно:

$$\langle I \rangle = \frac{\langle I \rangle_0}{1 - \frac{\mu}{1 + 2\tau} - \frac{4\mu\tau}{2 + 2\tau} - \frac{6\mu\tau}{3 + 2\tau} - \dots} \quad (7)$$

Общий член (начиная с третьего) дроби (7) имеет вид $2k\mu\tau(k + 2\tau)^{-1}$, $k = 2, 3, \dots$. Отметим, что в рассматриваемом случае удается найти точное решение стохастической системы (3), (4) и непосредственным усреднением:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle I \rangle_0 \int_0^\infty \exp[(\mu - 1)\theta - 2\tau\mu(1 - e^{-\theta/2\tau})] d\theta = \\ &= \langle I \rangle_0 (1 - \mu)^{-1} {}_1F_1(1, 1 + 2\tau - 2\tau\mu; -2\tau\mu), \end{aligned} \quad (7a)$$

где ${}_1F_1(u, v; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Как можно убедиться, формула (7) не что иное, как разложение последней в цепную дробь.

Зависимость средней интенсивности от эффективной мощности накачки показана на рис. 1, а зависимость $\langle I \rangle$ от времени корреляции τ при фиксированных значениях μ — на рис. 2. Как видно из рисунков, с ростом τ склонность системы к параметрическому возбуждению падает. Отметим также, что зависимость средней интенсивности от величин μ и τ наиболее сильная вблизи порога устойчивости.

Как следует из полученных результатов, порог среднеквадратичной устойчивости системы не зависит от времени корреляции накачки и совпадает с хорошо известным для случая широкополосной накачки результатом $\mu_{\text{пор}} = 1$ (хотя, как видно из рис. 1, при $\tau > 1$ в области $\mu \leq 1$ средняя интенсивность еще весьма незначительна). В то же время, если в цепочке (6) ограничиться несколькими первыми уравнениями, то получился бы качественно иной результат. В частности, ограничиваясь двумя уравнениями, находим

$$\langle I \rangle = \langle I \rangle_0 [1 - \mu(1 + 2\tau)^{-1}]^{-1}, \quad (8)$$

откуда

$$\mu_{\text{пор}} = 1 + 2\tau \quad (9)$$

(на объяснении этого факта остановимся ниже).

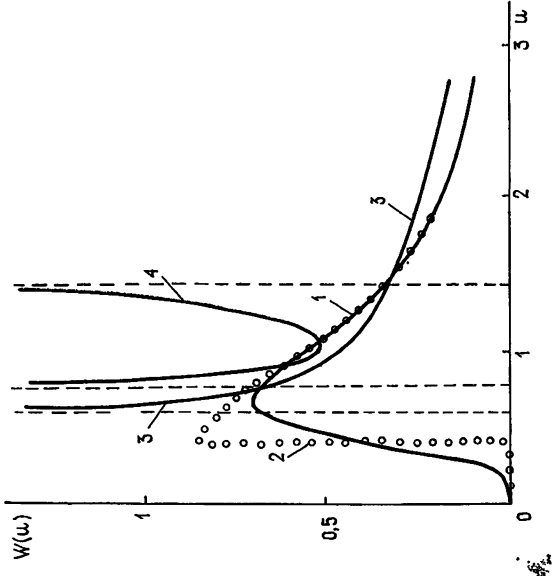
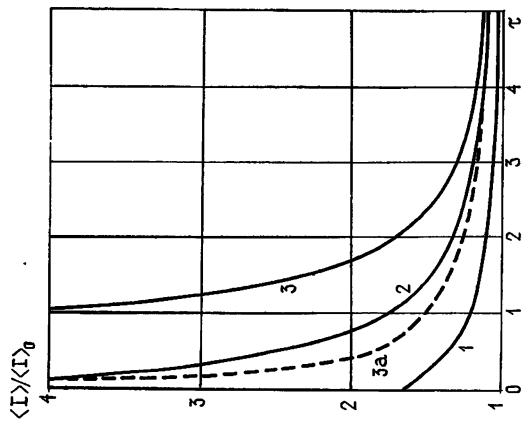
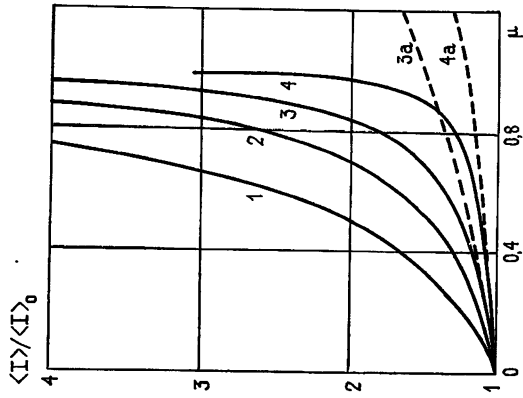


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость средней интенсивности от эффективной мощности накачки: кривая 1 — $\tau=0$ (широкополосная накачка); 2 — $\tau=0,5$; 3 — $\tau=1$; 4 — $\tau=2$; кривые 3а и 4а соответствуют телеграфной накачке при $\tau=1$ и $\tau=2$.

Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость средней интенсивности от относительного времени корреляции накачки: кривая 1 — $\mu=0,4$; 2 — $\mu=0,8$; 3 — $\mu=0,95$. Зависимость 3а соответствует телеграфной накачке при $\mu=0,95$.

Рис. 3.

Рис. 3. Плотность вероятности синус-огранивающей выходного колебания при телеграфной накачке: кривая 1 — $\tau=0$ (широкополосная накачка); 2 — $\tau=0,2$; кривая 3 — $\tau=1$; кривая 4 — $\tau=5$. Пунктиром показаны вертикальные асимптоты для кривых 3 и 4 (графики построены при значениях эффективной амплитуды входного сигнала $p=1$).

Как показывает анализ, цепная дробь (7) сходится к аналитической функции аргумента μ во всей области параметров μ и τ за исключением точки $\mu=1$. С помощью численного счета легко убедиться, что сходимость — весьма быстрая всюду, кроме малой окрестности этой особой точки.

3. Положив в (5) $\psi(u) = \delta(u - u(t))$ и выполнив необходимые преобразования [4], можно прийти к цепочке кинетических уравнений для отыскания вероятностного распределения огибающей $W(u; t)$. Если ограничиться первыми двумя уравнениями этой цепочки

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial u}(uW) + Qx_c \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial u}(uW_1) = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \nu\right) W_1 - \frac{\partial}{\partial u}(uW_1) + Qx_c \frac{\partial W_1}{\partial u} + \langle \alpha^2 \rangle \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial u}(uW) = 0,$$

то нетрудно найти аналитическое решение для стационарной плотности вероятности $W(u; \infty) \equiv W(u)$ (по крайней мере для случая гармонического входного сигнала, когда $x_c = \text{const}$, который мы и рассмотрим).

Обозначим $Qx_c = p$, $\langle \alpha^2 \rangle Q^2/4 = \mu\nu/2 = q$, тогда стационарное решение системы (10) можно представить в виде

$$W(u) = \begin{cases} Cu \left(u - \frac{p}{1 + \sqrt{q}}\right)^{\lambda_1} \left|u - \frac{p}{1 - \sqrt{q}}\right|^{\lambda_2}, & u_1 < u < b \\ 0, & u < u_1, \quad u > b \end{cases} \quad (11)$$

где

$$u_1 = p(1 + \sqrt{q})^{-1}, \quad b = \begin{cases} p(1 - \sqrt{q})^{-1}, & q < 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\lambda_1 = \frac{\nu}{2(1 + \sqrt{q})} - 1, \quad \lambda_2 = \frac{\nu}{2(1 - \sqrt{q})} - 1.$$

Отметим, что при $q < 1$ вероятностное распределение является финитным, откуда следует, что в этом случае имеет место моментная и вероятностная устойчивость системы. Этот результат имеет ясный физический смысл: при $\sqrt{q} = Q|\alpha|/2 < 1$ амплитуда телеграфной накачки $|\alpha|$ такова, что вносимые отрицательные потери меньше положительного затухания (см. (4)).

Предельным переходом при $\tau \rightarrow 0$ можно прийти к известному результату для гауссова дельта-коррелированного параметрического воздействия

$$W(u) = \left(\frac{2p}{\mu}\right)^{2/\mu} \Gamma^{-1}\left(\frac{2}{\mu}\right) u^{-(1+2/\mu)} \exp\left(-\frac{2p}{\mu} \frac{1}{u}\right), \quad u > 0, \quad (11a)$$

где $\Gamma(2/\mu)$ — гамма-функция (см. кривая 1 на рис. 3). С ростом времени корреляции накачки распределение «сжимается» и становится финитным, у него появляются «горбы», обусловленные спецификой телеграфного воздействия (кривая 4 на рис. 3). Из формул (11), (12) легко видеть, что особенности, которые может иметь функция $W(u)$ на границах, являются интегрируемыми при любых допустимых значениях параметров.

На основании (11) нетрудно получить условия моментной устойчивости системы, огибающая параметрической накачки которой представляет собой случайный телеграфный процесс:

$$\lambda_1 + \lambda_2 < -(m + 2).$$

С учетом (12) последнее неравенство примет вид

$$q < 1 + \nu/m \quad \text{или} \quad \mu < 2(\tau + 1/m). \quad (13)$$

При $\tau \rightarrow 0$ отсюда вытекают известные условия моментной устойчивости осциллятора, возбуждаемого широкополосной гауссовой накачкой,

$$\mu < 2/m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Приведем также выражения для первых двух моментов огибающей выходного колебания, которые нетрудно найти из первых двух уравнений цепочки (5):

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= p \{1 - [\mu/2(1 + \tau)]\}^{-1}, \\ \langle u^2 \rangle &= p \langle u \rangle \left(1 - \frac{\mu}{1 + 2\tau}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\mu p \tau}{(1 + \tau)(1 + 2\tau)}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что моменты и плотность вероятности огибающей $v(t)$ имеют аналогичный вид, если под параметром p понимать $-Qx_s$.

4. Обсудим в заключение правомерность аппроксимации гауссова параметрического воздействия случайным телеграфным сигналом*. Как следует из приведенных выше результатов (см. также [1, 3, 4]), такая аппроксимация вполне корректна в случае широкополосных ($\tau \ll 1$) флуктуаций $\alpha(t)$. При этом как моменты, так и вероятностные распределения огибающих мало отличаются. При сильной накачке ($\mu \sim 1$) имеется существенное количественное отличие результатов (см. кривые 3, 3а на рис. 2). Если же накачка такова, что $q < 1$ (это, в частности, может означать, что флуктуации имеют очень малую мощность), то указанная аппроксимация приводит к качественно иным результатам — ограничению моментов, финитности вероятностного распределения. Наихудшей в этом смысле является область значений параметров, для которых $q < 1$, а $\mu = 2q\tau \gg 1$ (это случай узкополосного процесса $\tau \gg 1$). Хотя при этом мощность накачки относительно мала, она оказывает сильное влияние на систему, поскольку весь ее спектр находится в основной параметрической зоне. Как следует из полученных выше результатов, в этом случае имеют значение не только спектрально-корреляционные характеристики процесса $\alpha(t)$, но и его «тонкая структура» (форма, вероятностное распределение), причем гауссова накачка оказывает более сильное возбуждающее действие, чем случайный телеграфный процесс с тем же спектром мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
2. Динментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980.
3. Муzychук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 10, с. 1246.
4. Малахов А. Н., Муzychук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 968.

* Для линейных систем это адекватно приближению Бурре, в работах [3, 4] для этой аппроксимации употреблялся термин «второе приближение».

5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.

6. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 6, с. 716.

Горьковский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
3 января 1984 г.

STOCHASTIC BEHAVIOURS OF THE OSCILLATOR PARAMETRICALLY EXCITED BY THE NOISE WITH A RESONANT SPECTRUM

O. V. Musychuk

The oscillation system parametrically excited by noise pump with a resonant power spectrum with the maximum on the main parametric frequency and the arbitrary band width is considered. Some explicit relations for the probability characteristics of the output signal are obtained for two types of pump—Gaussian noise and stochastic telegraph process. An approximation of Gaussian parametric excitation by stochastic telegraph process is discussed.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXIV, № 4, 1984

Блумс Д. Ф., Лотова Н. А., Сороченко Р. Л. Переходная область солнечного ветра по наблюдениям мерцаний лазерного источника линии водяного пара.

По наблюдениям мерцаний источника S252A в июне 1983 г. изучена зависимость индекса мерцаний от радиального расстояния в околосолнечной среде, $R \approx (10-20)R_{\odot}$. Анализ результатов в сопоставлении с исследованным ранее общим ходом зависимости индекса мерцаний от радиального расстояния показывает, что полученные данные относятся к области перехода от дозвукового к сверхзвуковому течению солнечного ветра.

Власов В. И., Шишов В. И., Шишова Т. Д. Структура распространяющихся возмущений межпланетной плазмы.

Посредством кросскорреляционного анализа вариаций индексов мерцаний рассмотрена крупномасштабная структура распространяющихся от Солнца возмущений межпланетной плазмы. Показано, что пространственный масштаб распространяющихся возмущений в радиальном сечении равен 0,2—0,3 а. е. и хорошо согласуется с наблюдаемым масштабом вариаций индекса мерцаний ~ 1 сут. Угловой масштаб по гелиоцентрической долготе в среднем $\sim 60^\circ$, а в гелиоширотном сечении 45° .