

УДК 537 56:621.372 82

О СТРУКТУРЕ ПЛОСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИОНИЗИРУЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В. А. Пермяков

Качественными методами изучена структура стационарных плоских нелинейных поверхностных волн, распространяющихся в ограниченной ионизирующейся среде с положительной в отсутствие поля диэлектрической проницаемостью. Показана возможность существования максимум двух либо трех волн с заданной фазовой скоростью. Исследованы энергетические характеристики волн для среды с кубичной нелинейностью.

1. Задача о распространении стационарных нелинейных поверхностных волн (НПВ) в ограниченной ионизирующейся плазме, диэлектрическая проницаемость которой положительна при малых полях, рассматривалась в [1, 2] для несколько различных моделей среды. В [1] проницаемость среды задавалась в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 \text{ при } E < E_c, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_2(E^2 - E_c) \text{ при } E \geq E_c, \quad E = |E|, \quad (1)$$

где $E_c > 0$, $\epsilon_0 \leq 1$, $\epsilon_2 < 0$, что соответствует пороговой ионизации холодного газа, баланс концентрации электронов в котором обусловлен конкуренцией процессов ионизации, прилипания и рекомбинации. В [2] изучалась модель среды при $E_c = 0$, $\epsilon_2 < 0$ и произвольных ϵ_0 , что охватывает случаи газовой и полупроводниковой плазмы с беспороговым ионизационно-рекомбинационным механизмом изменения концентрации электронов*. Несмотря на близость моделей сред в [1, 2], предсказания этих работ относительно структуры и числа НПВ при заданном значении фазовой скорости оказываются различными в той области параметров среды, где она сопоставима. Практически неизученными являются энергетические характеристики НПВ (за исключением энергетики солитонов НПВ при больших замедлениях [3]).

Цель настоящей работы в связи с этим — углубить наши представления о структуре и энергетических характеристиках НПВ в ограниченной ионизирующейся среде. Основное внимание будет уделено качественному анализу НПВ на фазовой плоскости для широкого класса законов ϵ , в рамках которого сохраняются основные закономерности НПВ, характерные для зависимости ϵ вида (1).

2. Пусть вдоль границы раздела нелинейной и линейной сред в направлении оси y распространяется двумерная поверхностная E -волна с компонентами

$$H_x = U(z)e^{-ihy}, \quad E_y = -(i/\epsilon)(dU/dz)e^{-ihy}, \quad E_z = (h/\epsilon)Ue^{-ihy}. \quad (2)$$

Здесь и ниже линейные размеры нормированы умножением на волновое число свободного пространства, h — безразмерная постоянная распространения поверхностной волны, проницаемость и импеданс свободного

* В рамках данных моделей среды изучались также солитоны НПВ [3] и распространение волн вдоль слоя плазмы на проводящей плоскости [4].

пространства приняты за единицу временной множитель $e^{i\omega t}$. Функция $U(z)$, определяющая изменение магнитного поля в направлении z , удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dU}{dz} + (\varepsilon - h^2)U = 0, \quad (3)$$

где $\varepsilon=1$ при $z<0$, $\varepsilon=\varepsilon(E)$ при $z>0$.

Введем переменную

$$W = (1/\varepsilon)(dU/dz) = |E_y|, \quad (4)$$

и сведем (3) с учетом (4) к виду, удобному для качественного анализа [2],

$$dW/dU = (h^2 - \varepsilon)U/\varepsilon^2 W, \quad (5)$$

где связь с тангенциальными компонентами полей определяется функцией

$$Q(\varepsilon, U, W) = I(\varepsilon) - W^2 - (h^2 U^2 / \varepsilon^2) = 0. \quad (6)$$

В (6) $I(\varepsilon) = F^2$ — функция, обратная $\varepsilon(I)$, однозначная при монотонных $\varepsilon(I)$

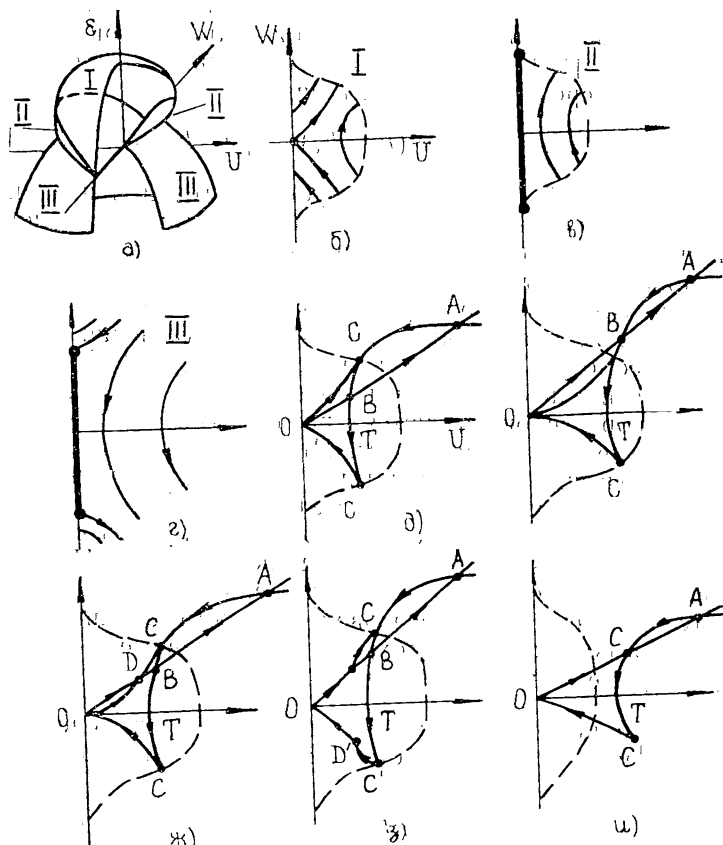


Рис. 1.

Фазовые траектории (5) на плоскости U, W необходимо рассматривать с учетом того, что функция $\varepsilon(U, W)$ может быть многозначной. Различные ветви $\varepsilon(U, W)$ при этом соответствуют различным листам

поверхности (6) в пространстве ε , U , W . Из анализа (6) следует, что поверхность $Q=0$ для закона (1) является трехлистной (рис. 1а). Первый и второй листы поверхности смыкаются по особой линии, уравнение которой имеет вид

$$Q'_\varepsilon = 0, \quad Q = 0, \quad (7)$$

а второй и третий листы — по особой линии

$$\varepsilon = U = 0, \quad W^2 \leq I(0). \quad (8)$$

В случае кубичной нелинейности границы области многозначности $\varepsilon(U, W)$ легко определяются из условия равенства нулю дискриминанта кубичного уравнения относительно U^2 , следующего из (6) [2]. Фазовые портреты уравнения (5), соответствующие различным листам поверхности (6), приведены для случая НПВ, когда $h^2 > \max\{1, \varepsilon(0)\}$, на рис. 1б—г. Особая линия, задаваемая уравнением (7), на рис. 1 показана пунктиром, а линия (8) — утолщенной.

Обсудим вопрос, для какого класса законов $\varepsilon(I)$ должны сохраняться качественные закономерности НПВ, характерные для закона (1). Для этого потребуем, чтобы в рассматриваемом классе законов сохранились вид поверхности (6) и фазовые портреты, соответствующие закону (1). Очевидные на первый взгляд условия монотонности и перехода функции $\varepsilon(I)$ через нулевое значение недостаточны для выполнения наложенных требований. Чтобы показать это, запишем уравнение проекции особой линии (7) на плоскость U, W в параметрической форме

$$U^2 = -\varepsilon^3/2h^2\varepsilon', \quad W^2 = F'/2\varepsilon\varepsilon', \quad (9)$$

где

$$F = I\varepsilon^2(I), \quad (10)$$

а штрих здесь и далее означает производную по I , если аргумент функции опущен. Из (9) следует, что многозначность функции $\varepsilon(U, W)$ имеет место при выполнении условий

$$\varepsilon\varepsilon' < 0, \quad F' < 0. \quad (11)$$

В соответствии с (11) при монотонно убывающих законах $\varepsilon(I)$ число ветвей функции $\varepsilon(U, W)$ будет больше трех, если существует более одного интервала значений I , в которых $F' < 0$. Для единственности этого интервала достаточно потребовать, чтобы функция (10) при $\varepsilon > 0$ была выпуклой в окрестности критической точки ($F''(I_{кр}) < 0$ при $F'(I_{кр}) = 0$), что приводит к условию*

$$3(\varepsilon')^2 - \varepsilon\varepsilon'' > 0. \quad (12)$$

Приведем пример монотонно убывающего закона $\varepsilon(I)$, для которого условие (12) не выполнено: $\varepsilon(I) = 1 - n_1 \exp(-I_1/I) - n_0 \exp(-I_0/I)$, где $0 < n_1 < 1$, $n_0 > 1$, $0 < I_1 \ll I_0$, индекс «1» относится к параметрам легко понижрующейся примеси, индекс «0» — к параметрам основного вещества, причем в интервале $I_1 \sim I \ll I_0$ вкладом в $\varepsilon(I)$ основного вещества можно пренебречь. Тогда условия $F'(I_{кр}) = 0$, $F''(I_{кр}) > 0$ выполняются при $I_{кр} > 2I_1$, $n_1 = (1 + 2I_1/I_{кр}) \exp(I_1/I_{кр})$. Кроме того, в области ионизации основного вещества при переходе $\varepsilon(I)$ через нуль будут выполняться условия (11) и (12). В соответствии с проведенным выше анализом для указанного закона $\varepsilon(I)$ поверхность $\varepsilon(U, W)$ будет пятилистной.

* Условия (11), (12) необходимы для выделения класса законов $\varepsilon(I)$, в рамках которого сохраняются характерные для закона (1) качественные закономерности E-волн, распространяющихся в направлении неоднородности поля [3]

3. Перейдем к анализу фазовых портретов НПВ при $E_c=0$. При построении фазовых траекторий следует иметь в виду два момента. Во-первых, из непрерывности H_x и E_y на скачке ε следует непрерывность U и W , т. е. фазовых траекторий, при переходе с одного листа поверхности (6) на другой [2, 5]. Во-вторых, будем предполагать, что скачок ε внутри нелинейной среды возможен только на границе области многозначности $\varepsilon(U, W)$ при продолжении траекторий с первого листа на третий и обратно*.

Построим вначале траекторию, отвечающую солитону НПВ в неограниченной среде (см. также [3]). Поля солитона НПВ должны убывать при $z \rightarrow \pm\infty$, поэтому искомая траектория в области $\varepsilon > 0$ состоит из сепаратрис первого листа: $0C'$, идущей к $z = +\infty$, и $0C$, идущей из $z = -\infty$, а на границе области многозначности сепаратрисы сопрягаются с участком CC' траектории T третьего листа, где $\varepsilon < 0$ (см., например, рис. 1д). Для определения фазовых траекторий НПВ, распространяющихся вдоль границы линейной и нелинейной сред, найдем пересечение прямой $0A$ —сепаратрисы, соответствующей полю в линейной среде ($z < 0$) с солитонной траекторией, либо ее продолжением вдоль траектории T . При этом возможна одна из ситуаций, изображенных на рис. 1д—ж. Если прямая $0A$ не пересекает сепаратрису $0C$ (рис. 1д и 1е), то возможно существование двух НПВ при заданном значении фазовой скорости, одной из которых соответствует фазовая траектория $\cup 0C'A/A0$ (волна типа A), другой — траектория $\cup 0C'B/B0$ (волна типа B)**. В промежуточном случае возможна, кроме того, реализация траектории $\cup 0C'CD/D0$ (волна типа C)***.

Из качественного анализа видна следующая характерная особенность различных типов НПВ, существование которых возможно при одном и том же значении фазовой скорости: структуры полей этих НПВ совпадают на общем участке траектории. Так, структуры волн типов A и B совпадают на участках $\cup 0C'B$ и $/0B$, а структуры волн типов A и C — на участках $\cup 0C'C$ и $/0D$. Очевидна также связь структур этих волн со структурой солитона НПВ: все типы волн можно рассматривать, как порождаемые совокупностью фазовых траекторий, состоящих из сепаратрис $0C$, $0C'$ и траектории T . В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости ε , $U = |H_x|$, $W = |E_y|$ для двух типов волн, соответствующих рис. 1д, причем распределения ε и полей в пространстве смещены таким образом, чтобы показать совпадение ε и структур поля в нелинейной среде.

Докажем справедливость высказанных выше утверждений о характере и числе НПВ. Для этого, введя переменные $s = W^2$ и $t = U^2$, найдем производную

$$d^2s/dt^2 = -(2h^2 - \varepsilon)^2 / \varepsilon^3 Q'_\varepsilon. \quad (13)$$

Учтем теперь, что $\varepsilon > 0$ на первом листе, $\varepsilon < 0$ на третьем листе, $Q'_\varepsilon < 0$ на первом и третьем листах поверхности (6). Тогда из (13) следует $d^2s/dt^2 > 0$ при $\varepsilon > 0$ и $d^2s/dt^2 < 0$ при $\varepsilon < 0$, следовательно, число пересечений прямой $0A$ с сепаратрисой $0C$ на первом листе не может быть более одного, а с траекторией T на третьем листе — не может быть бо-

* Аргументы в пользу такого выбора положения скачка основаны на качественном рассмотрении медленной временной эволюции поля в среде с локальной нелинейностью (см. [6, 7]). Другой подход к выбору положения скачка ε основан на учете нелокального механизма нелинейности [8].

** Здесь и далее использована следующая запись траектории в целом: буквы соответствуют начальной и конечным точкам отдельных участков траектории, дугой обозначен криволинейный, а косой чертой — прямолинейный участки траектории.

*** Зависимости постоянных распространения НПВ типов A и B от проницаемости на границе нелинейной среды подробно изучены в [2]. Волна типа C в [2] не была найдена.

лее двух. Далее, сравнивая углы наклона прямой OA и касательной к сепаратрисе OC (см. (6)), видим, что ситуация рис. 1д реализуется при $\varepsilon(0) < 1$. В случае $\varepsilon(0) > 1$ варианты рис. 1е и 1ж разделяются условием прохождения прямой OA через граничную точку C (для кубичной нелинейности случай, изображенный на рис. 1ж, имеет место в интервале $1 < \varepsilon_0 \leq 1,18$, а случай рис. 1е — при $\varepsilon_0 \geq 1,18$).

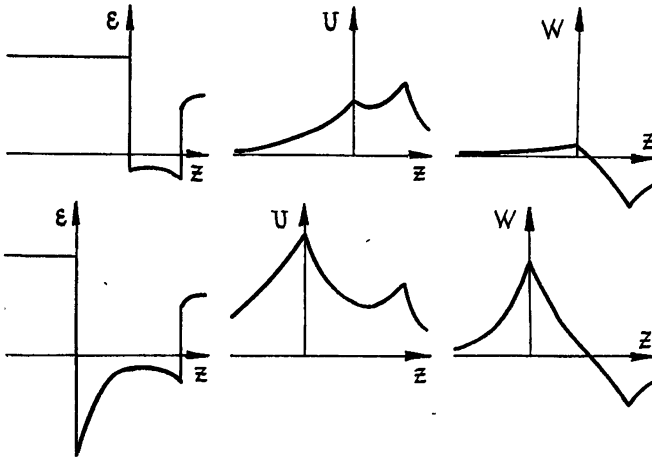


Рис. 2.

Перейдем к анализу энергетических характеристик НПВ. Частичное совпадение структур различных типов НПВ позволяет сделать некоторые выводы об энергетических характеристиках НПВ, не прибегая к их вычислению. Так, мощности, переносимые волнами различных типов в области $\varepsilon > 0$ либо в области $\varepsilon < 0$, подчиняются условию $P_A > P_C > P_B$, где буквенный индекс соответствует типу волны. На результирующую мощность этот вывод, разумеется, не распространяется, так как она определяется разностью мощностей, переносимых в областях $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$. Рассмотрим теперь энергетические характеристики НПВ для закона (1) при $E_c = 0$, $\varepsilon_2 = -1$. Мощность, переносимая НПВ, определяется выражением

$$P = (cE_c^2 / 8\pi k_0) P_0, \quad P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_z \tilde{H}_x^* dz,$$

где \tilde{E}_z и \tilde{H}_x — нормированные делением на E_c компоненты электрического и магнитного полей. В случае больших замедлений зависимость переносимой мощности от фазовой скорости существенно упрощается:

$$P_0 \approx f(\varepsilon_0) h^{-2} + o(h^{-2}),$$

где функция f зависит только от начальной проницаемости нелинейной среды ε_0 . Из рис. 3а следует, что в области больших замедлений волна типа A является прямой при $\varepsilon_0 \leq 1,375$ и обратной при $2 \geq \varepsilon_0 \geq 1,375$, а волны типов B и C являются обратными*. Отметим, что мощности, переносимые волнами типов B и C , совпадают с графической точностью в области их совместного существования, показанной скобкой на рис. 3а.

Зависимости постоянной распространения от нормированной мощности P_0 приведены для наиболее характерных случаев на рис. 3б—3д.

* Анализ дисперсионных характеристик НПВ [2] показал, что при $2 < \varepsilon_0 \leq 2,44$ существуют только НПВ с конечным замедлением, а при $\varepsilon_0 \geq 2,44$ НПВ не существуют.

Если $\epsilon_0 \leq 1,375$ (рис. 3б), волна типа *A* остается прямой при произвольных замедлениях, а волна типа *B* является обратной при больших и прямой — при малых замедлениях. В этом случае для поддержания волны типа *A* всегда требуется большая мощность, чем для волны типа *B* при той же фазовой скорости. Отметим также, что при заданной мощности возможно возбуждение двух обратных волн типа *B* с разными фазовыми скоростями*. При $1,375 \leq \epsilon_0 < 2$ волны обоих типов являются прямыми для достаточно малых и обратными для достаточно больших замедлений (рис. 3в).

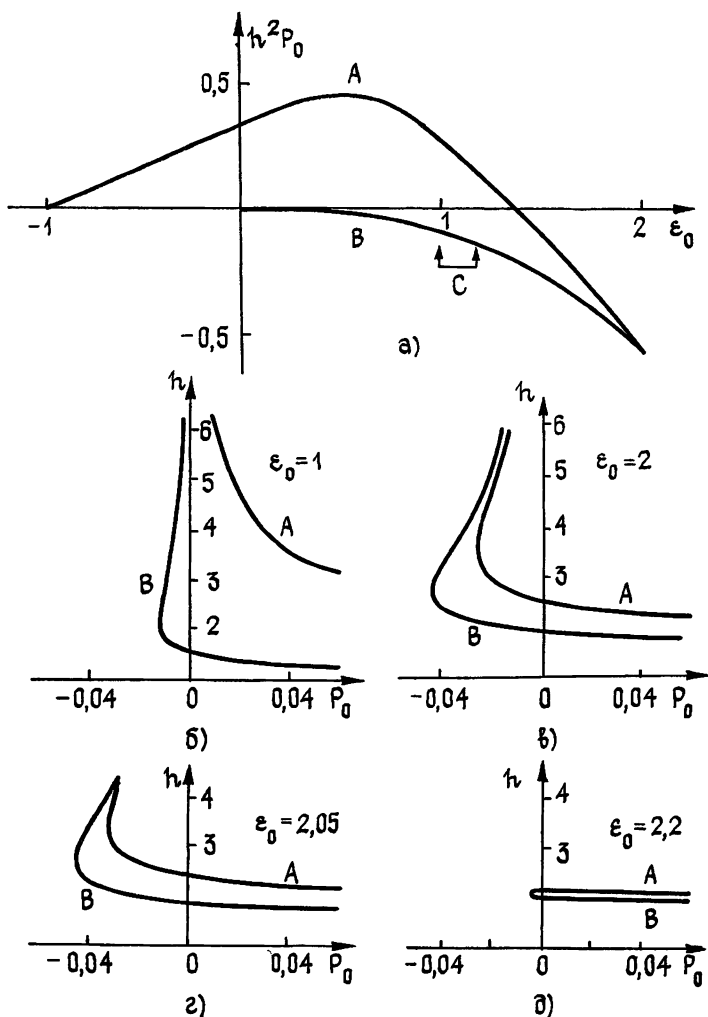


Рис. 3.

Зависимости $h(P_0)$ при $\epsilon_0 \leq 2$ (рис. 3в) и $\epsilon_0 \geq 2$ (рис. 3г) качественно близки для не слишком больших замедлений, с ростом замедления ветви различных типов НПВ при $\epsilon_0 > 2$ смыкаются. В этих случаях следует отметить возможность существования четырех обратных НПВ с разными фазовыми скоростями и одинаковой мощностью, а также возможность гистерезисных переходов с одной ветви НПВ на другую с из-

* Возможность возбуждения того или иного типа волн в экспериментальных условиях определяется структурой поля возбудителя и его мощностью.

менением мощности. Наконец, при дальнейшем росте ϵ_0 (рис 3д) зависимость $h(P_0)$ становится двухзначной, а область существования обратных волн сокращается и исчезает.

4. Перейдем теперь к случаю $E_0 > 0$, рассматривавшемуся в [1, 3, 4]. Построение фазовой траектории НПВ в области нелинейной среды следует вести с учетом того, что среда ионизуется только при $E \geq E_c$, а при $E < E_c$ остается линейной. При этом возможны две качественно различные ситуации

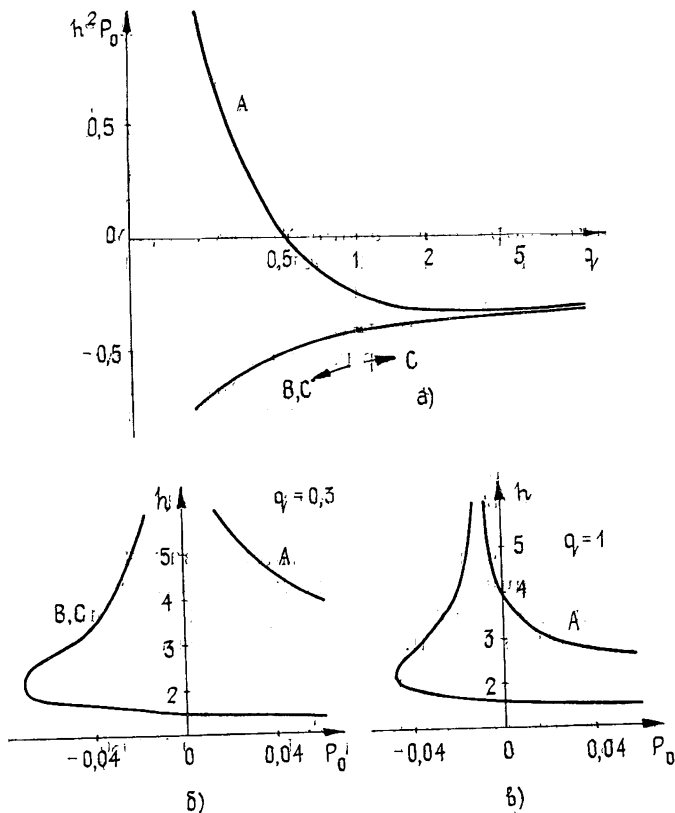


Рис. 4.

Если условие $E = E_c$ может выполняться при положительных значениях проницаемости нелинейной среды (точка D' на рис 1з), возможно существование трех типов НПВ: типа A (траектория $/OD' \cup D'C'CA/A0$), типа B (траектория $/OD' \cup D'C'B/B0$) и типа C (траектория $/OD' \cup D'C'CD/D0$)*. При этом отрезок траектории OD' соответствует неионизованной области нелинейной среды, где $E < E_c$, а отрезок OD — линейной среде. Волна типа C по структуре полностью соответствует солитону НПВ в неограниченной нелинейной среде, предсказанному в [1] и изучавшемуся в [3]. Отличие рассматриваемого нами случая от солитона НПВ в неограниченной среде заключается в том, что свойства сред при $z > 0$ (нелинейная среда) и при $z < 0$ (линейная среда) принципиально различны. Например, можно рассматривать такую систему как модель формирования НПВ при СВЧ разряде в газе, на-

* В работе [1] изучены только НПВ, относящиеся к типу A по нашей терминологии. Отметим также, что структура полей НПВ в области $\epsilon > 0$, приведенная в [1], неверна, так как включает участок траектории, находящийся на нефизическом втором листе поверхности (6).

ходящемся при малых давлениях в области $z > 0$ и отделенной тонкой прозрачной стенкой от газа при высоких давлениях в области $z < 0$. Таким образом, волна типа C представляет в нашем случае солитон, прилипший к границе раздела линейной и нелинейной сред.

Если условие $E = E_c$ может выполняться только в области $\epsilon < 0$ нелинейной среды рис. 1и, возможно существование двух НПВ — типа A (траектория $/OC' \cup C'A/AO$) и типа C (траектория $/OC' \cup C'C/CO$), последняя также эквивалентна солитону НПВ (см. [3]).

Сделанные ранее в п. 3 выводы о совпадении структур различных типов НПВ в нелинейной среде и о мощностях НПВ, переносимых в областях сред с различными знаками ϵ , сохраняются в рассматриваемом случае, когда $E_c > 0$.

Результаты расчета мощности, переносимой НПВ при $E > E_c$, $\epsilon_0 = 1$, приведены на рис. 4а для $h \rightarrow \infty$ и на рис. 4б—4в для конечных значений h в зависимости от параметра $q = -\epsilon_2 E_c^2$. При этом, как и в случае $E_c = 0$, мощности волн типов B и C практически совпадают (область $q \leq 1$ на рис. 4а). Отметим, что при больших замедлениях солитон НПВ является обратной, а при малых — прямой волной. Расчет переносимой солитоном НПВ мощности при $h \gg 1$ и $q \gg 1$ хорошо согласуется с результатами работы [3].

5. В заключение отметим, что качественный анализ нелинейных E -волн может быть с успехом применен также к изучению волн в слоях нелинейного диэлектрика. В частности, траектории рис. 1з, 1и можно трактовать как НПВ в слоях диэлектрика заданной толщины. При этом волны типа C являются симметричными, а волны типов A и B асимметричными относительно магнитного поля*. Наряду с этими типами волн в слоях возможны также антисимметричные по магнитному полю волны.

Изученные выше возможности существования нескольких типов НПВ, а также различия их полевых и энергетических характеристик представляют интерес в связи с экспериментальными исследованиями распространения НПВ в ионизирующихся средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боев А. Г. — ЖЭТФ, 1979, 77, № 7, с. 92.
2. Пермяков В. А., Стешенко А. Г. — Труды МЭИ, 1980, вып. 497, с. 47.
3. Гильденбург В. Б., Кочетов А. В., Литвак А. Г., Фейгин А. М. — ЖЭТФ, 1983, 84, № 1, с. 48
4. Боев А. Г. — ДАН УССР, 1982, № 6, с. 57.
5. Крыгин А. Б., Пермяков В. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 10, с. 1258.
6. Гильденбург В. Б. — ЖЭТФ, 1964, 46, № 6, с. 2156.
7. Литвак А. Г., Фрайман Г. М. — ЖЭТФ, 1975, 68, № 4, с. 1288.
8. Боев А. Г. — ЖЭТФ, 1982, 83, № 6, с. 2080.
9. Ахмедиев Н. Н. — ЖЭТФ, 1982, 83, № 2(8), с. 545.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
18 апреля 1983 г.,
после доработки
28 февраля 1984 г.

ON THE STRUCTURE OF PLANE NONLINEAR SURFACE WAVES IN IONISABLE MEDIUM

V. A. *Permyakov*

By qualitative methods is studied a structure of stationary plane nonlinear surface waves propagating in a bounded ionized medium with positive dielectric permittivity in the absence of the field. A possibility is shown for the existence of maximum two either three waves with the given phase velocity. Energetic characteristics of waves have been investigated for the medium with cubic nonlinearity.

* Асимметричные поверхностные H -волны в слоях нелинейного диэлектрика впервые изучались в [9].