ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.56:519.25

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ВЫТЯНУТЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. И. Саичев, М. М. Славинский

В малоугловом приближении выведены уравнения для первых двух моментных функций волн, распространяющихся в случайно-неоднородной среде с неоднородностями, вытянутыми вдоль направления распространения волны. Подробно рассмотрены случаи сильно и слабо вытянутых неоднородностей среды.

1. При анализе статистики электромагнитных, акустических волн в крупномасштабных случайно-неоднородных средах часто используют уравнения для моментных функций волн. Такие уравнения, выведенные в малоугловом приближении квазиоптики и в марковском приближении, стали уже классическими и приведены во многих монографиях (см., например, [1–3]). Однако они становятся несправедливыми в средах, где случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, так как не описывают существенного изменения силы рассеяния при малом изменении угла распространения волны, а также ослабления рассеяния за счет дифракции на случайных неоднородностях среды. Типичными примерами подобных случайно-неоднородных сред, где приведенные в [1–3] уравнения могут оказаться неприменимыми, являются, например, случайные неоднородности ионосферы [4], случайные внутренние волны в океане [5]. При выводе уравнений для моментных функций волн в таких средах необходимо выйти за рамки марковского приближения, не учитывающего конечности продольного масштаба корреляции неоднородностей среды. В работе [6] был предложен метод последовательных приближений, позволяющий вывести уравнения для моментных функций волн в таких средах, справедливые и в случае сильно вытянутых неоднородностей среды. Однако в [6] уравнения второго приближения были использованы лишь для определения условий применимости первого — марковского — приближения. Некоторые статистические свойства волн, многократно рассеянных в случайно-неоднородных средах с сильно вытянутыми неоднородностями, рассмотрены в работе [7]. В данной работе, локальным методом Чернова [2, 8], выведены уравнения для среднего поля и функции когерентности волны в среде с вытянутыми вдоль направления распространения волны случайными неоднородностями. Обсуждены некоторые физические следствия полученных уравнений.

2. В малоугловом приближении, распространение волны описывается параболическим уравнением

$$(\partial u/\partial x) - (i/2k)\Delta_\perp u = ik\tilde{n}(x,\rho)u, \tag{1}$$

где $u(x,\rho)$ — комплексная амплитуда волны, x — продольная, $\rho = \{y,z\}$ — поперечные координаты, $\Delta_\perp$ — лапласиан в поперечной плоскости, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $\tilde{n}(x, \rho)$ — флуктуации показателя преломления среды с заданной функцией корреляции

$$\langle \tilde{n}(x, \rho)\, \tilde{n}(x+\tau_{\parallel}, \rho+\tau_{\perp})\rangle = B_n(\tau).$$

Проиллюстрируем вывод уравнений для моментных функций волны в случае вытянутых вдоль оси x неоднородностей среды на примере вывода уравнения для среднего поля $\langle u(x, \rho)\rangle$, где угловые скобки означают статистическое усреднение по ансамблю случайных неоднородностей среды. Уравнение для среднего поля, следующее из (1),

$$(\partial\langle u\rangle/\partial x) - (i/2k)\Delta_{\perp}\langle u\rangle = ik\langle \tilde{n}u\rangle. \tag{2}$$

незамкнуто, так как содержит смешанный момент $\langle \tilde{n}u\rangle$. Выразим его через $\langle u\rangle$ и B_n, пользуясь локальным методом малых возмущений Чернова [2, 8]. При вычислении среднего

$$\langle \tilde{n}(x, \rho)\, u(x, \rho)\rangle, \tag{3}$$

следуя Чернову, будем полагать, что в слое $[x-l, x]$, где $l \gg l_{\parallel}$, $l_{\parallel}$ — масштаб корреляции $\tilde{n}$ вдоль оси x, неоднородности среды мало влияют на волну. Поэтому при вычислении $u(x, \rho)$ в (3) можно ограничиться борновским приближением, взяв за нулевое приближение $u_0(x, \rho)$ — комплексную амплитуду волны в случае, когда неоднородности среды в слое $[x-l, x]$ отсутствуют. В борновском приближении

$$u(x, \rho) = u_0(x, \rho) + u_1(x, \rho), \tag{4}$$

где

$$u_1(x, \rho) = \frac{k^2}{2\pi}\int\limits_{x-l}^{x}\frac{dx'}{x-x'}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho'\,\tilde{n}(x', \rho')\, u_0(x', \rho')\exp\left[\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(x-x')}\right]. \tag{5}$$

Следующий шаг Чернова при выводе уравнений для моментных функций состоял в замене выражения (5) на более простое:

$$u_1(x, \rho) = iku_0(x, \rho)\int\limits_{x-l}^{x}\tilde{n}(x', \rho)\,dx'. \tag{6}$$

Выясним, при каких условиях справедлив переход от (5) к (6) и как следует вычислять интеграл (5), когда эти условия нарушаются. Для этого представим $u(x, \rho)$ в виде разложения по плоским волнам

$$u(x, \rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x, \theta)\, e^{ik(\theta\rho)}\, d\theta,\quad \theta = (\alpha, \beta), \tag{7}$$

и заметим, что в однородной среде комплексные амплитуды плоских волн меняются по закону

$$\psi_0(x, \theta) = \psi_0(x', \theta)\exp\left[-(ik\,\theta^2/2)(x-x')\right].$$

Выразив в (5) u_0 через ψ_0 и учтя последнее равенство, получим:

$$u_1(x, \rho) = ik\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta\,\psi_0(x, \theta)\, e^{ik(\theta\rho)}\times \tag{8}$$

$$\times \int_0^l d\tau_\parallel \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_\perp \tilde{n}(x-\tau_\parallel, \rho-\tau_\perp-\theta\tau_\parallel) \frac{k}{2\pi i\tau_\parallel} \exp\left(\frac{ik\tau_\perp^2}{2\tau_\parallel}\right).$$

Введем помимо продольного масштаба неоднородностей среды $l_\parallel$ еще $l_\perp$ — наименьший масштаб неоднородностей по поперечным координатам (обычно это масштаб изменения $\tilde{n}$ по вертикальной координате z). Кроме того, введем еще θ^* — наибольший, по модулю, угол распространения волны, отсчитанный от оси x. Нетрудно видеть, что при выполнении условия $kl_\perp^2/l_\parallel \gg 1$, или эквивалентного ему неравенства

$$\theta_a \gg \theta_p, \tag{9}$$

где $\theta_a = l_\perp/l_\parallel$ назовем углом анизотропии, $\theta_p = 1/kl_\perp$ — угол рассеяния, выражение (8) переходит в

$$u_1(x, \rho) = ik \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, \psi_0(x, \theta)\, e^{ik(\theta\rho)} \int_0^l d\tau_\parallel \tilde{n}(x-\tau_\parallel, \rho-\theta\tau_\parallel), \tag{10}$$

а при выполнении дополнительного условия $\theta\tau_\parallel \sim \theta^* l_\parallel \ll l_\perp$, или

$$\theta^* \ll \theta_a, \tag{11}$$

выражение (10) переходит в (6).

Таким образом, для справедливости использованного Черновым приближения (6) необходимо выполнение условий (9), (11). Они заведомо выполняются в случае изотропной случайно-неоднородной среды, который и рассматривал в своей работе [8] Чернов. Действительно, если $l_\perp = l_\parallel$, то условие (9) переходит в условие $\theta_p \ll 1$ или $kl_\parallel \gg 1$ — условие крупномасштабности неоднородностей среды, а условие (11) — в $\theta^* \ll 1$ — условие малости углов распространения волны. Оба эти условия являются, заодно, условиями применимости параболического уравнения (1). Поэтому в случае изотропных случайных неоднородностей среды, пока справедливо уравнение (1), справедливо и приближение (6). Естественно, условия (9), (11) и приближение (6) тем более выполняются для «сплющенных» вдоль оси x неоднородностей, для которых $l_\parallel < l_\perp$.

Ситуация принципиально иная, если случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, так что $l_\parallel < l_\perp$, т. е. угол анизотропии $\theta_a \ll 1$. При этом условия (9), (11) могут быть нарушены, даже если волна распространяется под малыми углами к оси x и выполнено условие применимости параболического уравнения (1). Например, для акустических волн с $k \sim 1$ $м^{-1}$ и $\theta^* \sim 0{,}1$ во флуктуирующем океане, где поперечный масштаб случайных внутренних волн $l_\perp \sim 10$ $м$, а $\theta_a \sim 0{,}1 \div 0{,}01$ [5], оба условия (9) и (11) оказываются нарушенными.

Таким образом, в случае вытянутых случайных неоднородностей среды, при выводе уравнений для моментных функций и, в частности, уравнения для среднего поля, необходимо пользоваться не (6), а полным выражением для $u_1(x, \rho)$ (8), учитывающим дифракцию на неоднородностях и изменение силы рассеяния при малых изменениях углов распространения волны.

3. Подставив (8) в (4), а (4) в (3) и учтя статистическую независимость $\psi_0(x, \theta)$ от $\tilde{n}((x, \rho)$, будем иметь

$$\widetilde{\langle nu\rangle} = \frac{ik}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\psi_0(x,\theta)\rangle A(\theta)\, e^{ik(\theta\rho)}\, d\theta = \tag{12}$$

$$= \frac{ik}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle u_0(x,\rho-\rho')\rangle\, a(\rho')\, d\rho',$$

где

$$A(\theta) = 8\int\limits_0^{\infty} d\tau_{\parallel}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\perp}\, B_n(\tau_{\parallel},\tau_{\perp}+\theta\tau_{\parallel})\,\frac{k}{2\pi i\tau_{\parallel}}\exp\left[\frac{ik\tau_{\perp}^2}{2\tau_{\parallel}}\right], \tag{13}$$

$$a(\rho) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\theta)\, e^{ik(\theta\rho)}\, d\theta.$$

Если в слое толщиной $l \sim l_{\parallel}$ ослабление среднего поля за счет рассеяния мало, т. е. если выполняется неравенство

$$k^2 A(0)\, l_{\parallel}/8 \ll 1,$$

то в (12) можно заменить $\langle\psi_0\rangle$ на $\langle\psi\rangle$, а $\langle u_0\rangle$ на $\langle u\rangle$. После этого, подставив (12) в (2), получим замкнутое интегродифференциальное уравнение для среднего поля:

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\langle u\rangle + \frac{k^2}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle u(x,\rho-\rho')\rangle\, a(\rho')\, d\rho' = 0. \tag{14}$$

Приведем еще эквивалентное ему уравнение для средних плоских волн

$$\langle\psi(x,\theta)\rangle = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle u(x,\rho)\rangle\, e^{-ik(\theta\rho)}\, d\rho, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial x} + \frac{ik\theta^2}{2}\langle\psi\rangle + \frac{k^2}{8}A(\theta)\langle\psi\rangle = 0.$$

4. Вид уравнений (14), (15) различен в случаях слабой и сильной анизотропии случайных неоднородностей среды. Если выполняется условие (9), то будем говорить о слабой анизотропии. Противоположный случай $\theta_a \ll \theta_p$ назовем случаем сильной анизотропии. Введем параметр анизотропии $m = \theta_p/\theta_a = l_{\parallel}/kl_{\perp}^2$.

Рассмотрим в дальнейшем наиболее интересный для практических приложений случай блинообразных неоднородностей среды, обладающих масштабом $l_{\parallel}$ в горизонтальной плоскости xy и масштабом $l_{\perp} \ll l_{\parallel}$ вдоль вертикальной оси z. При этом $A(\theta)$ зависит лишь от β—вертикальной компоненты вектора $\theta = (\alpha, \beta)$. Для определенности рассчитаем $A(\beta)$ в случае гауссовой функции корреляции неоднородностей среды

$$B_n(\tau_{\parallel},\tau_{\perp}) = \sigma_n^2\exp\left[-(\tau_{\parallel}^2+\tau_y^2)/2l_{\parallel}^2 - (\tau_z^2/2l_{\perp}^2)\right].$$

Подставив ее в (13), получим

$$A(\beta) = 8\sigma_n^2 l_\| \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} - \frac{\gamma^2\tau^2}{2(1+im\tau)}\right] \frac{d\tau}{\sqrt{1+im\tau}}, \tag{16}$$

$$\tau = \tau_\|/l_\|, \quad \gamma = \beta/\theta_a.$$

В случае слабой анизотропии ($m \ll 1$) из (13), (16) имеем

$$\begin{gathered} A(\beta) = 8 \int\limits_0^\infty B_n(\tau_\|, \theta\tau_\|)\, d\tau_\| = A_0/\sqrt{1+\gamma^2}, \\ A_0 = 8 \int\limits_0^\infty B_n(\tau_\|, 0)\, d\tau_\| = 4\sqrt{2\pi}\,\sigma_n^2 l_\|. \end{gathered} \tag{17}$$

Отсюда видно, что при слабой анизотропии масштаб $A(\beta)$ равен углу анизотропии θ_a. Поэтому если волна распространяется под малыми углами к оси x, так что $\theta^* < \theta_a$, то при слабой анизотропии можно положить

$$A(\beta) = A_0, \quad a(\rho) = A_0\delta(\rho),$$

и уравнение (14) перейдет в хорошо известное (см., например, [1–3]) уравнение для среднего поля, полученное в марковском приближении:

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_\perp\langle u\rangle + \frac{k^2}{8}A_0\langle u\rangle = 0. \tag{18}$$

Если же $\theta^* \geqslant \theta_a$, то при вычислении среднего поля необходимо решать интегродифференциальное уравнение (14). Так, для коллимированных волновых пучков, ширина которых вдоль оси z равна $a < 1/k\,\theta_a$, выполняется условие $\theta^* = 1/ka > \theta_a$ и уравнение (18), даже при слабой анизотропии среды, оказывается несправедливым.

Перейдем к случаю сильной анизотропии случайных неоднородностей среды ($m \gg 1$). Из (16) в этом случае следует, что масштаб $A(\beta)$ по β равен $\theta_a\sqrt{m} = \theta_p\sqrt{1/m}$. Поэтому, если $\theta^* < \theta_a\sqrt{m}$, от уравнения (14) можно перейти к более простому уравнению

$$\begin{gathered} \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_\perp\langle u\rangle + \frac{k^2}{8}A(0)\langle u\rangle = 0, \\ A(0) = 8\sigma_n^2 l_\| \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1+im\tau}}. \end{gathered} \tag{19}$$

Хотя уравнение (19) по виду совпадает с уравнением марковского приближения (18), однако за счет дифракции на сильно вытянутых неоднородностях среды коэффициент экстинкции в (19) в $A_0/A(0) \sim \sqrt{m}$ раз меньше коэффициента экстинкции в (18), вычисленного в марковском приближении. Заметим, что уравнения для среднего поля и частотной корреляции волны в случае сильной анизотропии ($m \gg 1$) и малых углов распространения волны ($\theta^* \ll \theta_a\sqrt{m}$) подробно исследованы в работе [7]. При $\theta^* \geqslant \theta_a\sqrt{m}$ необходимо решать уравнение (14), учитывающее, в отличие от (19), уменьшение рассеяния при увеличении углов распространения волны.

5. В общем случае, при произвольных m и θ^*, решение уравнения (14) имеет вид

$$\langle u(x,\rho)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(x,\theta)\rangle e^{ik(\theta\rho)}\, d\theta, \tag{20}$$

где

$$\langle \psi(x,\theta)\rangle = \psi^0(x,\theta)\exp\left[-k^2A(\theta)\,x/8\right]$$

— среднее поле первоначально плоской волны, а

$$\psi^0(x,\theta) = \psi(0,\theta)\exp\left[-ik\theta^2x/2\right]$$

— комплексная амплитуда плоской волны в однородной среде (при $\tilde{n}\equiv 0$).

Решение (20) допускает простую физическую интерпретацию: среднее поле равно суперпозиции средних полей, распространяющихся под разными углами плоских волн. При этом в случае слабой анизотропии среднее поле каждой плоской волны совпадает со средним полем, вычисленным в приближении геометрической оптики и спрямленных лучей, а ракурсная чувствительность рассеяния на вытянутых неоднородностях среды приводит при $\theta^* > \theta_a$ к ослаблению затухания среднего поля по сравнению с предсказываемым в марковском приближении.

6. Аналогично уравнению для среднего поля выводятся и уравнения для любых других моментных функций волны. Мы здесь приведем лишь уравнение для функции когерентности волны

$$\Gamma(x,\rho_1,\rho_2) = \langle u(x,\rho_1)\, u^*(x,\rho_2)\rangle.$$

В общем случае вытянутых случайных неоднородностей среды это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} - \frac{i}{2k}(\Delta_1 - \Delta_2)\,\Gamma +$$

$$+\frac{k^2}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik(\theta_1\rho_1) - ik(\theta_2\rho_2)\right] F(x,\theta_1,\theta_2)\times \tag{21}$$

$$\times\left[D(\rho_1-\rho_2,\theta_1) + D(\rho_2-\rho_1,\theta_2)\right]\partial\theta_1\, d\theta_2,$$

где

$$F(x,\theta_1,\theta_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,\rho_1,\rho_2)\exp\left[ik(\theta_2\rho_2) - ik(\theta_1\rho_1)\right] d\rho_1 d\rho_2.$$

Функция $D(\rho,\theta)$ в случае слабой анизотропии, которым и ограничимся в дальнейшем, равна

$$D(\rho,\theta) = 8\int\limits_0^{\infty}\left[B_n(\tau_\parallel,\theta\tau_\parallel) - B_n(\tau_\parallel,\theta\tau_\parallel - \rho)\right] d\tau_\parallel.$$

Подставив сюда гауссову функцию корреляции блинообразных неоднородностей, получим

$$D(\rho,\theta) = D(\rho,\beta) =$$

$$= A(\beta)\left[1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2l_\parallel^2} - \frac{z^2}{2l_\perp^2(1+\gamma^2)}\right)\Phi\left(-\frac{\gamma z}{l_\perp\sqrt{1+\gamma^2}}\right)\right], \tag{22}$$

где $A(\beta)$ задается выражением (17), а

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2} ds.$$

В дальнейшем для простоты пренебрежем нарушением когерентности вдоль горизонтальной оси y и будем считать, что Γ зависит лишь от продольной координаты x и вертикальных координат z_1 и z_2. Перейдя к новым координатам $z = (z_1 + z_2)/2$ и $s = z_1 - z_2$, получим из (21) уравнение для функции $\Gamma(x, z, s)$:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z \partial s} + \frac{k^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik(\varkappa z + \beta s)\right] F(x, \varkappa, \beta) \times$$
$$\times \left[D\left(s, \beta + \frac{1}{2}\varkappa\right) + D\left(-s, \beta - \frac{1}{2}\varkappa\right)\right] d\varkappa d\beta, \qquad (23)$$

где

$$F(x, \varkappa, \beta) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, z, s) \exp\left[-ik(\varkappa z + \beta s)\right] dz\, ds.$$

Если профиль средней интенсивности волны $\langle I(x, z)\rangle = \Gamma(x, z, 0)$ достаточно плавно меняется вдоль вертикальной оси z, так что масштаб $\Gamma(x, z, s)$ по z много больше $1/k\theta_a$, то ширина функции $F(x, \varkappa, \beta)$ по $\varkappa$ много меньше θ_a. При этом (23) переходит в более простое приближенное уравнение

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z \partial s} + \frac{k^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d(s, \beta) f(x, z, \beta) e^{ik\beta s} d\beta = 0, \qquad (24)$$

где

$$d(s, \beta) = D(s, \beta) + D(-s, \beta) = 2A(\beta)\left[1 - \exp\left(-s^2/2l_\perp^2 (1+\gamma^2)\right)\right], \qquad (25)$$

а

$$f(x, z, \beta) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, z, s) e^{-ik\beta s} ds$$

— лучевая интенсивность волны в вертикальной плоскости.

7. Физический смысл последнего слагаемого в уравнении (24), как, впрочем, и в уравнениях (21), (23), довольно прозрачен. Это слагаемое описывает уширение углового спектра волны за счет рассеяния на неоднородностях среды, а также ослабление рассеяния при углах распространения $\beta \gg \theta_a$. Причем зависимость d (25) от s ведет к уширению углового спектра волны, а зависимость d от β описывает ослабление рассеяния при увеличении β. Введем характерную ширину лучевой интенсивности по β: $\theta^* = 1/k\rho_к(x)$, где $\rho_к(x)$ — радиус когерентности волны. Если $\theta^* < \theta_a$ или

$$\rho_к(x) > 1/k\,\theta_a, \qquad (26)$$

то ослабление рассеяния за счет анизотропии неоднородностей еще мало, зависимостью d от β можно пренебречь, и уравнение (24) переходит в обычное уравнение для функции когерентности в марковском приближении [1–3]. Таким образом, условие (26) является условием применимости марковского приближения для функции когерентности волны при слабой анизотропии неоднородностей среды $m<1$. В случае сильной анизотропии марковское приближение неприменимо вообще.

Как известно, обычное уравнение для функции когерентности волны в изотропной случайно-неоднородной среде имеет точное решение, которое можно представить в виде суперпозиции взаимных функций когерентности плоских или сферических волн, вычисленных в приближении геометрической оптики и спрямленных лучей [1–3]. Из-за конкуренции эффектов уширения углового спектра волны за счет рассеяния и ослабления рассеяния на анизотропных неоднородностях уравнения (21), (23), (24) уже не допускают такого простого, физически наглядного решения.

8. Приведем еще одно приближенное следствие уравнения (24). На расстояниях x, когда радиус когерентности волны $\rho_к(x)$ становится меньше $l_\perp$, в уравнении (24) можно разложить $d(s, \beta)$ (25) в ряд по s, ограничившись квадратичным по s членом. Перейдя затем от (24) к уравнению для лучевой интенсивности волны, получим уравнение переноса

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{(1+\gamma^2)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right], \quad D = 16\, A_0 / l_\perp^2. \tag{27}$$

Точное решение этого уравнения неизвестно. Однако, если $\theta^* \ll \theta_а$ и нас интересуют лишь малые поправки к известному диффузионному закону роста ширины лучевой интенсивности по β, можно перейти от уравнения (27) к еще более простому

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \gamma^2\right) \frac{\partial f}{\partial \beta} \right]. \tag{28}$$

Здесь предположено для простоты, что $f = f(x, \beta)$ не зависит от z. Из (28) следует, что дисперсия углов прихода волны

$$\langle \beta^2 \rangle = \theta^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 f(x, \beta)\, d\beta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d \langle \beta^2 \rangle}{dx} = D - \frac{9D}{2\theta_а^2} \langle \beta^2 \rangle,$$

решение которого с нулевым условием при $x=0$ имеет вид

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{2}{9} \theta_а^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{9Dx}{2\theta_а^2} \right) \right] \tag{29}$$

и предсказывает насыщение ширины лучевой интенсивности $\theta^*(x)$ на уровне $\theta^*_\infty = \theta_а \sqrt{2/9}$. Конечно, такое насыщение на самом деле не имеет места. Происходит лишь более медленное, чем в изотропном случае (где $\theta^* = \sqrt{Dx}$), уширение углового спектра. Это замедление уширения правильно описывается равенством (29) только при $\langle \beta^2 \rangle \ll \theta_а^2$, когда (29) можно заменить на

$$\langle \beta^2 \rangle = Dx - \frac{9}{2} \left(\frac{Dx}{\theta_а} \right)^2.$$

9. В заключение отметим, что уравнения (14), (21) нетрудно обобщить на случай, когда, кроме случайных неоднородностей, есть еще регулярные неоднородности среды, например, регулярная стратификация показателя преломления $n(z)$. Если регулярные неоднородности мало влияют на характер распространения волны в слое толщиной $l \sim l_{\parallel}$, например, в этом слое $l_{\parallel} \partial n/\partial z \ll 1$ и лучи в нем можно считать практически прямыми, то уравнение для среднего поля, обобщающее (14) на случай сред с регулярной стратификацией, имеет вид

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle - ikn(z) \langle u \rangle + \frac{k^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, \rho - \rho') \rangle a(\rho', z) d\rho'. \tag{30}$$

Зависимость $a(\rho, z)$ от z в (30) описывает возможную статистическую неоднородность случайных неоднородностей среды по координате z. Подобная неоднородность присуща, например, случайным внутренним волнам в подводном звуковом канале [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
2 Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: Наука, 1975.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
4. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
5. Распространение звука во флуктуирующем океане. / Под ред. С. Флатте. — М.: Мир, 1982.
6. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 9, с. 1400.
7. Ерухимов М. М., Шпиро П. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 443.
8. Чернов Л. А. — Акуст. журн., 1969, 15, № 4, с. 594.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 18 ноября 1983 г.

EQUATIONS FOR MOMENT FUNCTIONS OF WAVES PROPAGATING IN A MEDIUM WITH EXTENDED RANDOM IRREGULARITIES

A. I. Saichev, M. M. Slavinskij

In the approximation of small scattering angles equations have been derived and analysed for the first two moments of a wave passing a medium with weakly and strongly extended random irregularities.