ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.56.

О ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Ю. Зайцев, М. А. Раевский

В приближении многократного рассеяния исследуются изменения пространственно-временного спектра волны, распространяющейся в волноводе со случайной границей. В случае плавных и медленных смещений границы получено аналитическое решение для дисперсии частоты и поперечного спектра волны. Рассмотрение проводится для широкого класса рефракционных волноводов с учетом взаимодействия нормальных мод.

Хорошо известно, что реальные волноводы (ионосферные и океанические волноводы, планарные и волоконные световоды и др.) являются нерегулярными, поэтому представляет интерес исследование статистических характеристик волны при распространении ее в волноводе с флуктуирующими параметрами. В данной работе рассматриваются изменения пространственно-временных спектральных характеристик волны, распространяющейся в волноводе со случайной границей. Поскольку в этом случае имеет место эффект взаимодействия нормальных мод волновода (см., например, [1]), весьма усложняющий анализ, то рассмотрение спектра (или корреляционной функции) волнового поля проводилось до сих пор либо численными методами [2, 3], либо в адиабатическом приближении [4], когда пренебрегается взаимодействием нормальных мод. В случае плавной и медленно флуктуирующей границы ниже получено аналитическое решение задачи, описывающее эволюцию пространственно-временных спектральных характеристик волны с учетом взаимодействия нормальных мод. Рассмотрение проводится для широкого класса рефракционных волноводов со степенными профилями показателя преломления. Показано, что при учете взаимодействия нормальных мод закон роста с расстоянием дисперсии пространственного и временного спектров волнового поля является в волноводе нелинейным. Обсуждается также применимость адиабатического приближения в задаче о трансформации спектра волны в случайно-неоднородном волноводе.

Ограничимся рассмотрением скалярной задачи. Будем считать, что волна распространяется в рефракционном волноводе со статистически неровной границей $z=\zeta(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{r}=\{x, y\}$, обладающей нулевым импедансом. Тогда для потенциала φ волны, локализованной в волноводе, имеем краевую задачу:

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 - c^2(z)\Delta\varphi = 0, \quad \varphi = 0 \text{ при } z=\zeta,\ z\to\infty. \tag{1}$$

Предполагая, что неоднородности являются малыми и пологими, заменим точное граничное условие при $z=\zeta$ на приближенное при $z=0$ [5]:

$$\varphi + \zeta d\varphi/dz = 0 \quad \text{при} \quad z=0. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\varphi = \int \left[\sum a_{p\omega}(\boldsymbol{r})\,\varphi_{p\omega}(z) + W_\omega(\boldsymbol{r}, z)\right] e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{3}$$

где $\varphi_{p\omega}$ — ортонормированные собственные функции краевой задачи:

$$\frac{d^2\varphi_{p\omega}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2_{p\omega}\right)\varphi_{p\omega} = 0, \quad \varphi_{p\omega} = 0 \ \text{ при } z = 0, \ \ z = \infty. \tag{4}$$

Из условия ограниченности нерезонансного слагаемого $W(\boldsymbol{r}, z)$ для коэффициентов разложения $a_{p\omega}$ нетрудно получить уравнение

$$\Delta_\perp a_{p\omega} + k^2_{p\omega} a_{p\omega} = -\sum_{p_2}\int \frac{d\varphi_{p\omega}(0)}{dz}\,\frac{d\varphi_{p_2\omega_2}(0)}{dz}\,\zeta_{\omega_1} a_{p_2\omega_2} \times$$
$$\times\, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2. \tag{5}$$

Будем считать, что характерный масштаб неровностей границы существенно больше длины волны. Это позволяет решать задачу в приближении «рассеяния вперед».

Пусть волна распространяется вдоль оси x и характеристики ее плавно меняются по y. Перейдем к переменной $b_{p\varkappa\omega}$, определяемой согласно

$$a_{p\omega} = \int \frac{b_{p\varkappa\omega}}{\sqrt{h_{\varkappa p}}}\exp(ih_{\varkappa p}x + i\varkappa y)\,d\varkappa, \tag{6}$$

где $h_{\varkappa p} = \pm\sqrt{k^2_{p\omega} - \varkappa^2}$.

Пренебрегая в уравнении для $b_{p\varkappa\omega}$ второй производной по x (хорошо известное параболическое приближение), получим уравнение

$$\frac{db_{p\alpha}}{dx} = \sum_{p_2}\int V^{p_2\alpha_2}_{p\alpha}\zeta_{\alpha_1}(x)\exp\left[i\left(h_{p_2\alpha_2} - h_{p\alpha}\right)x\right] \times$$
$$\times\, b_{p_2\alpha_2}\,\delta(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2, \tag{7}$$

где α обозначает совокупность индексов $\{\varkappa, \omega\}$ и коэффициент взаимодействия имеет вид

$$V^{p_2\alpha_2}_{p\alpha} = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{\sqrt{h_{p\alpha}h_{p_2\alpha_2}}}\,\frac{d\varphi_{p\omega}(0)}{dz}\,\frac{d\varphi_{p_2\omega_2}(0)}{dz}. \tag{8}$$

Ограничимся случаем, когда $\zeta(\boldsymbol{r}, t)$ является стационарной и однородной, т. е.

$$\langle\zeta_{\alpha_1}(x_1)\,\zeta_{\alpha_2}(x_2)\rangle = B_{\alpha_1}(x_1 - x_2)\,\delta(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{9}$$

Используя причинность стохастической задачи по x, в случае гауссовых неоднородностей ζ, можно корректно получить замкнутые уравнения для парного коррелятора $\langle b_{p\alpha}b^*_{p_3\alpha_3}\rangle$ [6]. В случае, когда рассеяние мало на масштабе корреляции неровностей границы, это уравнение имеет вид

$$\frac{d\langle b_{p\alpha}b^*_{p_3\alpha_3}\rangle}{dx} = \sum_{p_1}\int \left[T^{\alpha\alpha_1\alpha_2}_{pp_1}\langle b_{p_1\alpha}b^*_{p_3\alpha_3}\rangle + \left(T^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}_{p_3p_1}\right)^*\langle b^*_{p_1\alpha_3}b_{p\alpha}\rangle\right]d\alpha_1\,d\alpha_2 +$$
$$+\sum_{p_1p_2}\int\left[R^{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{pp_1p_2p_3}\langle b_{p_2\alpha_2}b^*_{p_1\alpha_3-\alpha_1}\rangle + \left(R^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha}_{p_3p_1p_2p}\right)^*\langle b^*_{p_2\alpha_2}b_{p_1\alpha-\alpha_1}\rangle\right]d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{10}$$

где

$$T_{pp_1}^{\alpha\alpha_1\alpha_2} = \sum_{p_2} \int_{-\infty}^{0} U_{p_2\alpha_2}^{p\alpha}(x)\, U_{p_1\alpha}^{p_2\alpha_2}(x + x_1)\, B_{\alpha_1}(x)\, \delta(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)\, dx_1,$$

$$R_{pp_1p_2p_3}^{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \int_{-\infty}^{0} U_{p_3\alpha_3}^{p\alpha}(x)\, [U_{p_1\alpha_3-\alpha_1}^{p_3\alpha_3}(x + x_1)]^* B_{\alpha_1}(x_1)\, \delta(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)\, dx_1, \tag{11}$$

$$U_{p_2\alpha_2}^{p\alpha} = V_{p_2\alpha_2}^{p\alpha} \exp[i(h_{p_2\alpha_2} - h_{p\alpha})x].$$

Отметим, что уравнение для парного коррелятора с использованием условия малости масштаба корреляции L по сравнению с масштабом интерференции мод $(L(h_n - h_m) \ll 1)$ было получено в работе [7]. Это условие должно выполняться одновременно с условием крупномасштабности неоднородностей $Lh_n \gg 1$ и, таким образом, весьма сужает область применимости уравнения. Уравнение (10) справедливо при произвольном значении параметра $L(h_n - h_m)$ и в этом смысле более адекватно реальной ситуации.

Ниже мы ограничимся рассмотрением стационарного и однородного по y процесса рассеяния. При этом для спектральной корреляционной функции $D_{pp_3}^{\alpha}$, определяемой согласно $\langle b_{p\alpha} b_{p_3\alpha_3}^* \rangle = D_{pp_3}^{\alpha}\delta(\alpha - \alpha_3)$, имеем уравнение

$$\frac{dD_{pp_3}^{\alpha}}{dx} = \sum_{p_1} \int [T_{pp_1}^{\alpha\alpha_1\alpha_2} D_{p_1p_3}^{\alpha} + (T_{p_3p_1}^{\alpha\alpha_1\alpha_2} D_{p_1p}^{\alpha})^*]\, d\alpha_1\, d\alpha_2 + \sum_{p_1p_2} \int [R_{pp_1p_2p_3}^{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha} D_{p_2p_1}^{\alpha_2} + (R_{pp_1p_2p_3}^{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha} D_{p_2p_1}^{\alpha_2})^*]\, d\alpha_1\, d\alpha_2. \tag{12}$$

Заметим, что при отсутствии потерь в волноводе оно имеет стационарное решение $D_{pp}^{\alpha} = \mathrm{const}$, $D_{pp_1}^{\alpha} = 0$, к которому стремится произвольное начальное распределение.

Наибольший интерес представляют автокорреляционные спектральные функции $D_{pp}^{\alpha} = n_{p\alpha}$, т. е. спектральные интенсивности мод. В уравнения для $n_{p\alpha}$, вообще говоря, входят члены со смешанными корреляционными функциями $D_{pp_1}^{\alpha}$. Однако, если масштаб рассеяния L_p превышает масштаб биений мод $(L_p(h_p - h_{p_2}) \gg 1)$, вклад этих членов мал и уравнение для $n_{p\alpha}$ можно записать в виде

$$dn_{p\alpha}/dx = \sum_{p_2} \int W_{p\alpha}^{p_2\alpha_2}(n_{p_2\alpha_2} - n_{p\alpha})\, d\alpha_2. \tag{13}$$

Здесь вероятность перехода

$$W_{p\alpha}^{p_2\alpha_2} = 2\pi \int |V_{p\alpha}^{p_2\alpha_2}|^2 B_{\alpha_1h_1}\, \delta(h_{p\alpha} - h_1 - h_{p_2\alpha_2})\, \delta(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)\, d\alpha_1\, dh_1,$$

$$B_{\alpha_1h_1} = (1/2\pi) \int B_{\alpha_1}(x)\, e^{ih_1x}\, dx.$$

Интегродифференциальное уравнение (13), по-видимому, может быть исследовано только численно. Однако, если неоднородности достаточно крупные и медленно флуктуирующие, что часто имеет место в реальных случаях, эволюция спектра волны имеет диффузионный характер, т. е. в единичном акте рассеяния малы изменения горизонтального угла $(\Delta\varkappa \ll \varkappa)$, частоты $(\Delta\omega \ll \omega)$ и номера моды $(\Delta p \ll p_{\mathrm{cr}}$, где p_{cr} — полное число распространяющихся мод). В этом случае уравнение (13) можно преобразовать к уравнению диффузионного типа

$$\frac{\partial n_{p\alpha}}{\partial x}=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\beta^i}\left(D_{ij}\frac{\partial n_{p\alpha}}{\partial\beta^j}\right),\quad \beta^i=\{p,\omega,\varkappa\}=\{p,\alpha\},\tag{14}$$

где коэффициенты диффузии имеют следующий вид:

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{p_2}\int\Delta\beta^i\Delta\beta^j W_{p\alpha}^{p_2\alpha_2}d\alpha_2,\quad \Delta\beta^i=\beta^i-\beta_2^i.\tag{15}$$

Рассмотрим вначале уширение углового спектра волны. Для простоты будем при этом считать, что время корреляции неоднородностей много больше времени прохождения волны через отдельную неоднородность, т. е. пренебрежем временными изменениями $\zeta(\boldsymbol{r}, t)$. Будем также считать, что поле ζ изотропно, при этом $D_{\varkappa p}=0$ (из очевидной симметрии задачи) и уравнение для спектра $n_{p\varkappa}=\int n_{p\varkappa\omega}d\omega$ имеет вид

$$\frac{\partial n_{\varkappa p}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(D_{p\varkappa}\frac{\partial n_{\varkappa p}}{\partial\varkappa}\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left(D_{pp}\frac{\partial n_{\varkappa p}}{\partial p}\right).\tag{16}$$

Это уравнение следует дополнить граничными условиями. Если волновод локализует волну, распространяющуюся под любым углом к горизонтальной плоскости, то эти условия согласно [8] есть

$$D_{pp}\,(\partial n_{\varkappa p}/\partial p)=0\qquad \text{при}\quad p=1,\quad p=p_{\text{cr}}\tag{17}$$

и соответствуют пренебрежению вкладом в рассеяние нераспространяющихся нормальных мод. В реальных рефракционных волноводах изменение показателя преломления обычно невелико, $|c(z)-c(0)|\ll \ll c(z)$, поэтому волны, направленные под большим углом к плоскости xy, высвечиваются из волновода. Соответствующие граничные условия имеют вид [8]

$$D_{pp}\,\partial n_{\varkappa p}/\partial p=0\ \text{при}\ p=1,\quad n_{\varkappa p}=0\ \text{при}\ p=p_{\text{cr}}.\tag{18}$$

Нас будет интересовать случай многомодовых волноводов ($p_{\text{cr}}\gg \gg 1$), при этом для вычисления собственных функций можно воспользоваться ВКБ-приближением:

$$\varphi_p(z)=\frac{A_p\sqrt{\sigma_p(0)}}{\sqrt{\sigma_p(z)}}\sin\int_0^z\sigma_p(z')\,dz',\tag{19}$$

где $\sigma_p(z)$ — вертикальное волновое число.

Конкретные вычисления ниже будут проводиться для волноводов с произвольными степенными профилями

$$c^{-2}(z)=c_0^{-2}-\alpha^2 z^q,\tag{20}$$

q — произвольное положительное число. В этом случае для локализованных мод имеем [8]

$$A_p^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}F(q)\left(\frac{\alpha\omega}{\sigma_p}\right)^{2/q},\quad p=\sigma_p\left(\frac{\sigma_p}{\alpha\omega}\right)^{2/q}F^{-1}(q)\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{1/2+1/q},\tag{21}$$

где $\sigma_p=\sigma_p(0)$, $F(q)=2q\Gamma(1/q+1/2)/\Gamma(1/q)$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. функция.

Предполагая, что выполнены условия диффузионного приближения и в каждом акте рассеяния взаимодействует большое число мод ($1 \ll \Delta p \ll p_{\text{cr}}$), получим для коэффициентов диффузии следующие выражения:

$$D_{pp} = \frac{2}{\pi} \frac{k_p \sigma_p}{A_p^2} \int\limits_0^\infty k^3 B(k)\, dk; \tag{22}$$

$$D_{\varkappa\varkappa} = \frac{\pi}{2} \frac{A_p^2 \sigma_p^3}{k_p} \int\limits_0^\infty k^3 B(k)\, dk, \tag{23}$$

где $B(k)$ — двумерный спектр неоднородностей. Здесь учитывается, что в малоугловом приближении $h_{\varkappa p} \simeq k_p$, а также выполняется соотношение $-dk_p/dp = (\pi/2)(\sigma_p/k_p) A_p^2$ Заметим, что коэффициенту диффузии по поперечному волновому числу, вычисленному в адиабатическом приближении, соответствует удержание в сумме (15) лишь члена с $\Delta p = 0$. В этом случае

$$D_{\varkappa\varkappa}^{\text{ад}} = \pi \frac{A_p^4 \sigma_p^4}{2k_p^2} \int\limits_0^\infty k^2 B(k)\, dk. \tag{24}$$

Нетрудно показать, что отношение $D_{\varkappa\varkappa}/D_{\varkappa\varkappa}^{\text{ад}} \sim \Delta p_{\text{хар}}$, т. е. имеет смысл характерного числа мод, взаимодействующих в одном акте рассеяния (отметим, что, например, при рассеянии на поверхностном волнении в океанических звуковых каналах обычно $\Delta p_{\text{хар}} \gg 1$). Таким образом ,следует ожидать, что, как правило, адиабатическое приближение дает заниженное значение уширения углового спектра волны.

Для анализа краевой задачи (16), (18) можно воспользоваться методом моментов. Определим полную интенсивность моды $N_p = \int n_{p\varkappa} d\varkappa$ и моменты поперечного волнового числа $\langle \tilde{\varkappa}^l \rangle$ согласно равенству

$$\langle \tilde{\varkappa}_p^l \rangle = \int \varkappa^l n_{\varkappa p}\, d\varkappa.$$

Для величин $\langle \tilde{\varkappa}^l \rangle$ и N_p из (16), (18) следует краевая задача:

$$\frac{\partial N_p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p}\left(D_{pp} \frac{\partial N_p}{\partial p}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \langle \tilde{\varkappa}^l \rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p}\left(D_{pp} \frac{\partial \langle \tilde{\varkappa}^l \rangle}{\partial p}\right) = l(l-1) D_{\varkappa\varkappa} \langle \tilde{\varkappa}^{l-2} \rangle, \tag{25}$$

$$D_{pp} \frac{\partial N_p}{\partial p}\bigg|_{p=1} = 0, \ N_p|_{p=p_{\text{cr}}} = 0, \qquad D_{pp} \frac{\partial \langle \tilde{\varkappa}^l \rangle}{\partial p}\bigg|_{p=1} = 0, \quad \langle \tilde{\varkappa}^l \rangle|_{p=p_{\text{cr}}} = 0$$

(мы рассматриваем практически наиболее интересный случай волновода с малым изменением показателя преломления).

Полученные рекуррентные уравнения позволяют, в принципе, найти любые моменты $\langle \tilde{\varkappa}^l \rangle$, но основной интерес представляет исследование второго момента $\langle \tilde{\varkappa}^2 \rangle$. Переходя для удобства к переменной $m = p/p_{\text{cr}}$, получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial m}\left(D_{mm}\frac{\partial N_m}{\partial m}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial m}\left(D_{mm}\frac{\partial \langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle}{\partial m}\right) = 2D_{\varkappa\varkappa}N_m, \tag{26}$$

$$D_{mm}\frac{\partial N_m}{\partial m}\Big|_{m=0} = 0, \quad N_m\big|_{m=1} = 0, \quad D_{mm}\frac{\partial \langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle}{\partial m}\Big|_{m=0} = 0, \quad \langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle\big|_{m=1} = 0,$$

где

$$D_{\varkappa\varkappa} = b\omega_0^2 m^{(3q-2)/(2+q)}, \quad D_{mm} = a^2 m,$$

$$b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\alpha c)^{2/q}\frac{F(q)}{c^2}(\sin\theta_{cr})^{(3q-2)/q}\int_0^\infty k^3 B(k)\,dk,$$

$$a^2 = \frac{\pi^{3/2}}{4}\left(\frac{2+q}{q}\right)(\sin\theta_{cr})^{-(2+q)/q}(\alpha c)^{2/q}F(q)\int_0^\infty k^3 B(k)\,dk. \tag{27}$$

Здесь θ_{cr} — критический угол волновода, связанный со значением скорости $c(z)$ в волноводе согласно $\theta_{cr} = \sqrt{2(c_{\max} - c_0)/c_0}$. Интересно отметить, что $D_{mm} \sim m$ для любых показателей степени профиля q.

Решение краевой задачи (26), (27), соответствующее плоской волне при $x = 0$ (т. е. $\langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle|_{x=0} = 0$), можно записать через функции Бесселя нулевого порядка $J_0[x]$ в виде

$$N(x, m) = \int_0^1 G_1(m, \mu, x) N^0(\mu)\,d\mu,$$

$$G_1(m, \mu, x) = \sum_{n=1}^\infty \exp[-(\alpha_n/2)^2 a^2 x]\, J_0[\alpha_n m^{1/2}]\,\frac{J_0[\alpha_n \mu^{1/2}]}{(J_0'[\alpha_n])^2}, \tag{28}$$

где α_n — корни уравнения $J_0[\alpha_n] = 0$, $N^0(m)$ — начальное распределение интенсивности по модам,

$$\langle\widetilde{\varkappa_m^2}\rangle = \int_0^x\int_0^1 G_2(m, \mu, x-\tau) f(\mu, \tau)\,d\tau\,d\mu,$$

$$G_2(m, \mu, x-\tau) = \sum_{n=1}^\infty \exp[-(\alpha_n/2)^2 a^2 (x-\tau)]\,\frac{J_0[\alpha_n \mu^{1/2}]\, J_0[\alpha_n m^{1/2}]}{(J_0'[\alpha_n])^2}, \tag{29}$$

где $f(m, x) = 2D_{\varkappa\varkappa}(m) N_m(x)$.

Проанализируем поведение решения в предельных случаях малых и больших x. На малых расстояниях ($x \ll a^{-2}$), пока не накопились эффекты межмодового перемешивания, получаем для дисперсии поперечного волнового числа $\langle\varkappa_m^2\rangle = \langle\widetilde{\varkappa_m^2}\rangle/N_m$ формулу

$$\langle\varkappa_m^2\rangle \simeq 2D_{\varkappa\varkappa}(m)\,x. \tag{30}$$

На расстояниях, превышающих характерную длину межмодового перемешивания ($x \gtrsim a^{-2}$), когда в суммах (28), (29) «выживают» лишь члены с низшей экспонентой, решение снова имеет линейную асимптотику:

$$\langle \varkappa_m^2 \rangle \simeq 2 D_{\varkappa\varkappa}^{\text{эфф}} x, \tag{31}$$

где

$$D_{\varkappa\varkappa}^{\text{эфф}} = \int_0^1 D_{\varkappa\varkappa}(m) \frac{J_0^2 [\alpha_1 m^{1/2}]}{(J_0' [\alpha_1])^2} dm.$$

Итак, из (29) видно, что закон роста дисперсии углов прихода в волноводе не является линейным, т. е. имеет иной характер, чем в случае безграничной среды [9]. Однако при малых и больших расстояниях имеются линейные асимптотики, причем скорости роста $D_{\varkappa\varkappa}(m)$ и $D_{\varkappa\varkappa}^{\text{эфф}}$, вообще говоря, различны. Существенно, что на больших расстояниях $x \gtrsim a^{-2}$ скорость роста дисперсии углов прихода становится универсальной для всех мод, что связано с многократным межмодовым энергообменом при рассеянии на неоднородностях. Этого эффекта, естественно, нет в адиабатическом приближении. Отметим, что и на малых расстояниях $x \ll a^{-2}$ адиабатическое приближение предсказывает другой (заниженный в $\Delta p_{\text{хар}}$ раз, как отмечалось выше) результат. В этом приближении имеем для дисперсии углов прихода выражение $\langle \varkappa_m^2 \rangle = 2D_{\varkappa\varkappa}^{\text{ад}}(m) x$, которое, как нетрудно видеть, совпадает с полученным в работе [4].

Таким образом, адиабатическое приближение правильно описывает уширение углового спектра волны лишь в случае, если неоднородности настолько велики, что отсутствует эффективное резонансное рассеяние из моды в моду, т. е. при $(h_p - h_{p_2}) L \gg 1$*. В случае не столь крупных неоднородностей $(h_p - h_{p_2}) L \lesssim 1$ анализ следует проводить с учетом межмодовых взаимодействий.

Аналогичным образом можно рассмотреть эволюцию частотного спектра волны на медленно флуктуирующих неоднородностях. Для частотного спектра $n_{\omega m} = \int n_{\omega\varkappa m} d\varkappa$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial n_{\omega m}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial m}\left(D_{mm} \frac{\partial n_{\omega m}}{\partial m}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(D_{\omega\omega} \frac{\partial n_{\omega m}}{\partial \omega}\right),$$
$$D_{mm} \frac{\partial n_{\omega m}}{\partial m}\bigg|_{m=0} = 0, \qquad n_{\omega m}\big|_{m=1} = 0. \tag{32}$$

К сожалению, не удается получить достаточно удобного общего выражения для коэффициента диффузии по частоте $D_{\omega\omega}$ в случае произвольного вида спектра неоднородностей, поэтому ограничимся рассмотрением спектра гауссова вида:

$$B_{h,\varkappa,\omega} = B_0 \exp\left[-L^2 (h^2 + \varkappa^2)\right] \exp\left(-T^2 \omega^2\right). \tag{33}$$

Вычисляя $D_{\omega\omega}$ в том случае, когда неоднородности медленно меняются во времени ($T \gg L/c_0$, $2\pi/\omega_0$) и когда в каждом акте рассеяния взаимодействует много мод ($1 \ll \Delta p_{\text{хар}} \ll p_{\text{cr}}$), получим для него следующее выражение:

$$D_{\omega\omega}(m) = b_2 \omega_0^2 m^{(3q-2)/(2+q)}, \quad b_2 = \frac{\pi c^{-2}}{4} (\alpha c)^{2/q} F(q) (\sin \theta_{\text{cr}})^{(3q-2)/q} \frac{B_0}{L^2 T^3}. \tag{34}$$

* Отметим, что в [4] приведен другой критерий адиабатического приближения.

Уширение частотного спектра также удобно исследовать методом моментов. Для второго момента $\langle\widetilde{\Omega^2}\rangle = \int (\omega-\omega_0)^2 n_{\omega m} d\omega$ получаем краевую задачу вида (26), где следует заменить $D_{\varkappa\varkappa}$ на $D_{\omega\omega}$ и $\langle\widetilde{\varkappa^2}\rangle$ на $\langle\widetilde{\Omega^2}\rangle$. Соответственно решение этой краевой задачи при начальных условиях $\langle\widetilde{\Omega^2}\rangle|_{x=0} = 0$ имеет вид (28), (29), где также следует произвести указанные переобозначения. Параметр, характеризующий уширение частотного спектра моды $\langle\Omega_m^2\rangle = \langle\widetilde{\Omega}_m^2\rangle/N_m$, тоже, вообще говоря, меняется нелинейно по x, но, как и в случае уширения углового спектра, имеет линейные асимптотики:

$$\begin{aligned} \langle\Omega_m^2\rangle &= 2D_{\omega\omega}(m)\,x \quad \text{при} \quad x \ll a^{-2}, \\ \langle\Omega_m^2\rangle &= 2D_{\omega\omega}^{\text{эфф}}\,x \quad \text{при} \quad x \gtrsim a^{-2}. \end{aligned} \tag{35}$$

При этом значение коэффициента диффузии по частоте $D_{\omega\omega}^{\text{эфф}}$, соответствующего эффективному межмодовому перемешиванию, имеет вид

$$D_{\omega\omega}^{\text{эфф}} = \int D_{\omega\omega}(m)\,(J_0^2\,[\alpha_1 m^{1/2}]/[J_0'(\alpha_1)]^2)\,dm. \tag{36}$$

Все рассуждения о соответствии этих результатов с адиабатическим приближением совершенно аналогичны проведенным выше в связи с уширением углового спектра.

Таким образом, анализ диффузионного уравнения (14) методом моментов позволяет получить в явном виде выражения для дисперсии углов прихода и среднеквадратичного уширения частотного спектра нормальных мод в случае широкого класса рефракционных волноводов.

Чтобы получить более полное представление о форме пространственно-временных спектров нормальных мод, следует решать двумерное диффузионное уравнение типа (16) или (32), что является довольно сложной задачей, которая, по-видимому, может быть решена лишь численными методами. Можно, однако, предложить несколько отличный от изложенного выше подход, основанный на использовании корреляционных функций поля, что позволяет свести задачу к одномерному диффузионному уравнению, которое в ряде частных случаев позволяет получить аналитическое решение. Итак, перейдем к анализу корреляционной функции для огибающей волны

$$N_p(\rho, \tau) = \int n_{p\varkappa\omega} \exp\,[i\varkappa\rho + i(\omega-\omega_0)\tau]\,d\varkappa\,d\omega. \tag{37}$$

Учитывая, что $\varkappa \ll k_p$ и $\omega \ll \omega_0$, аналогично тому, как это сделано в [6] применительно к случаю объемных неоднородностей, для $N_p(\rho,\tau)$ получим из (13) уравнение

$$\begin{aligned} \partial N_p(\rho,\tau)/\partial x &= \sum_{p_2} [W_{pp_2}(\rho,\tau)\,N_{p_2}(\rho,\tau) - W_{pp_2}(0,0)\,N_p(\rho,\tau)], \\ W_{pp_2}(\rho,\tau) &= 2\pi \int |V_{p_2}^p|^2\,B_{\omega, h_p - h_{p_2}} \exp\,(i\omega\tau + i\varkappa\rho)\,d\omega\,d\varkappa. \end{aligned} \tag{38}$$

Отметим, что система разностных уравнений типа (38) рассматривалась в работе [3], где было проведено ее численное исследование для волновода с билинейным профилем показателя преломления.

В диффузионном приближении ($1 \ll \Delta p_{\text{хар}} \ll p_{\text{cr}}$) эволюция функции $N(\rho, \tau)$ описывается краевой задачей

$$\frac{\partial N_p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p}\left[D_{pp}(\rho, \tau)\frac{\partial N_p}{\partial p}\right] + S_p(\rho, \tau) N_p,$$

$$D_{pp}\frac{\partial N_p}{\partial p}\bigg|_{p=1} = 0, \qquad N_p\big|_{p=p_{\text{cr}}} = 0, \tag{39}$$

где

$$D_{pp} = (1/2)\sum_{p_2}(p - p_2)^2 W_{pp_2}(\rho, \tau), \quad S_p = \sum_{p_2}[W_{pp_2}(\rho, \tau) - W_{pp_2}(0, 0)]. \tag{40}$$

В случае гауссовой функции корреляции (33), переходя от p- к m-переменной, получим

$$D_{mm}(\rho, \tau) = a_2^2 B(\rho, \tau)\, m, \quad S = [B(\rho, \tau) - B(0, 0)]\, b_3 \omega_0^2 m^{(3q-2)/(2+q)},$$

$$b_3 = (\alpha c)^{2/q} F(q) (\sin\theta_{\text{cr}})^{(3q-2)/q} c_0^{-2} L^{-1}, \tag{41}$$

$$a_2^2 = \frac{\pi}{8}\,\frac{2+q}{q}(\sin\theta_{\text{cr}})^{-(2+q)/q}(\alpha c)^{2/q}\frac{F(q)}{L^3},$$

$$B(\rho, \tau) = \pi(B_0/LT)\exp[-\rho^2/(2L)^2 - \tau^2/(2T)^2].$$

Решение краевой задачи (39) может быть получено аналитически лишь для некоторых частных видов профиля волновода. Приведем это решение в случае канала с профилем, отвечающим $q = 2/3$. Соответствующее решение имеет вид

$$N_m(\rho, \tau) = e^{Sx}\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-(\alpha_n/2)^2 a^2 B(\rho, \tau)\, x]\, J_0[\alpha_n m^{1/2}] \times$$

$$\times \frac{1}{(J_0'[\alpha_n])^2}\int_0^1 N_\mu^0(\rho, \tau) J_0[\alpha_n \mu^{1/2}]\, d\mu, \quad N_m^0(\rho, \tau) = N_m(\rho, \tau)|_{x=0}, \tag{42}$$

Обращение этого выражения по Фурье для получения спектра при произвольных x довольно затруднительно, но при больших x, когда масштаб корреляции поля становится меньше масштабов L и T, для спектра функции огибающей получаем

$$N_m(\varkappa, \Omega) \sim \exp(-\varkappa^2/4D_{\varkappa\varkappa}x - \Omega^2/4D_{\omega\omega}x), \tag{43}$$

т. е. спектр имеет гауссову форму. В выражении (43) используется связь коэффициентов S, $D_{\omega\omega}$ и $D_{\varkappa\varkappa}$, определяемых (41), (34) и (27). Нетрудно убедиться, что получающиеся из (41) значения моментов $\langle\varkappa_m^2\rangle$ и $\langle\Omega_m^2\rangle$ совпадают с полученными при $x \gtrsim a^{-2}$ из выражений (31) и (35), (36) в случае гауссовой функции корреляции и профиля $q = 2/3$.

В заключение авторы благодарят Л. А. Островского за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
2. Кудряшов В. М. — В сб.: Труды пятой всесоюзной школы по статистической гидроакустике. — Новосибирск, 1974, с. 36.

3. Кряжев Ф. И., Кудряшов В. М. — Акуст. журн., 1978, 24, № 2, с. 209.
4. Нечаев А. Г. — Акуст. журн., 1982, 28, № 6, с. 810.
5. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
6. Артельный В. В., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 9, с. 1142.
7. Нечаев А. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 3, с. 291.
8. Артельный В. В., Раевский М. А. — Акуст. журн, 1984, 30, № 6, с. 728.
9. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1983 г.

ON THE TRANSFORMATION OF THE SPACE-TIME SPECTRUM OF THE WAVE FIELD IN A WAVEGUIDE WITH A RANDOM BOUNDARY

V. Yu. Zaitsev, M. A. Raevskij

The variations in the space-time spectrum of the wave propagating in a waveguide with a random boundary are investigated in the multiple-scattering approximation. An analytic solution for the frequency dispersion and the transverse spectrum of the wave is obtained in the case of smooth and slow displacements of the boundary. A wide class of refraction waveguides is considered taking into account the interaction of normal modes.

Аннотации депонированных статей

УДК 533.9

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ВОЛН В СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

А. В. Семенов

Показано, что дисперсионные уравнения (ДУ) при анализе на наличие и характер неустойчивости целесообразно классифицировать по локальным свойствам решений в области частот и волновых чисел, соответствующих предполагаемой неустойчивости, независимо от общего вида уравнения (алгебраическое гиперболического или параболического типа, трансцендентное определенного вида и т. п.), несмотря на то, что математические критерии определяются асимптотическими свойствами решений ДУ. Это связано с тем, что для физически корректных моделей (удовлетворяющих требованию конечности скорости распространения сигналов) вся необходимая для анализа информация об асимптотических свойствах содержится в локальных параметрах. Для выделенного на основе локального подхода класса ДУ (слабая связь двух невырожденных волн с малыми декрементами) дано решение в области синхронизма и проведен анализ на устойчивость. В рассмотренном случае задача полностью определяется положением точки синхронизма и значениями пяти вычисленных в ней параметров: групповых скоростей, декрементов и коэффициента связи взаимодействующих волн. Из полученных локальных решений ДУ выведены практические критерии абсолютной и конвективной неустойчивостей и пространственного усиления, являющиеся обобщением известных критериев Стэррока при учете диссипации. Отмечается различие между скоростями пространственного и временного волновых пакетов в системах с активным взаимодействием волн, получены выражения для этих скоростей и показано, что последняя не определена в абсолютно неустойчивых системах. При отсутствии активного взаимодействия обе скорости совпадают и представляют собой обычную групповую скорость. Результаты анализа взаимодействия двух невырожденных волн обобщены на распространенный класс ДУ, сводящийся к случаю, когда коэффициент связи является произведением двух независимых малых параметров. Для случая пассивного взаимодействия волн с учетом диссипации получены выражения для максимального коэффициента трансформации по мощности и длины максимального преобразования, а также рассмотрены качественные изменения процесса трансформации энергии волн в зависимости от уровня диссипации.

*Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 7769-84. Деп. от 5 декабря 1984 г.*