ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 538.574

О ЗАТУХАНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В. Д. Липовский

Предложен простой метод вычисления затухания среднего поля в анизотропных средах со слабыми флуктуациями. В качестве примера найдено затухание среднего поля в холодной магнитоактивной плазме с диагональным тензором проницаемости.

Воздействие среды с заданными слабыми флуктуациями на распространение плоской монохроматической волны сводится к превращению последней в спектрально сдвинутый волновой пакет. Вычисление поправок к частоте («начальная» задача) или к волновому вектору («граничная» задача) в изотропной среде в рамках метода среднего поля тривиально [1,2]. В анизотропной среде мы сталкиваемся с чисто техническими трудностями, обрисованными в [3]. Существуют два стандартных приема определения поправок. Первый сводится к явному вычислению тензора эффективной восприимчивости [4,5] и к решению дисперсионного уравнения. Трудоемким этапом здесь является определение эффективной восприимчивости при разложении по неприводимому базису из большого числа тензорных проекторов. Второй способ основан на том, что распространение волны в среде с флуктуациями есть частный случай нелинейной задачи о взаимодействии волн (приближение заданной шумовой накачки). По существу он соответствует линеаризации теории слабой турбулентности. Так, в [6,7] был предложен способ определения мнимых частей поправок при помощи кинетического уравнения для волн, а в [8,9] — в терминах укороченных уравнений для амплитуд трехволновых взаимодействий (без перехода к числам заполнения волновых квантов). Этот метод требует знания матричных элементов взаимодействия волн [3].

В данной работе мы предлагаем простой технический прием, позволяющий обходить указанные трудности. Оказывается, что поправки пропорциональны свертке затравочного пропагатора с эффективной восприимчивостью, т. е. следу произведения двух затравочных пропагаторов и двух затравочных вершинных функций. Если невозмущенное состояние среды трансляционно инвариантно, то затухание среднего поля носит резонансный характер [10]. Следовательно, для определения декрементов след произведения матриц следует вычислять на затравочной дисперсионной поверхности, где он имеет достаточно простой вид. При этом квадраты модулей матричных элементов взаимодействия (их линейные комбинации) вычисляются автоматически.

В качестве примера нами найдено затухание среднего поля в холодной магнитоактивной плазме с диагональным тензором проницаемости. Рассмотрены случаи как изотропных, так и анизомерных пространственных флуктуаций электронной концентрации.

1. Формулы для поправок. Распространение волны в среде со статистически однородными и стационарными флуктуациями удобно описывать в спектральном представлении. В нем соответствующие операторы диагонализируются и задача становится чисто алгебраической. Для определенности ниже будем говорить об электродинамике, хотя рассмотрение справедливо и для других волн в материальных средах.

Уравнения среднего поля в $\boldsymbol{k}\omega$-представлении имеют вид

$$(\hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega} - \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}) \langle \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega} \rangle = 0, \tag{1}$$

где $\hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega} = L_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn}$ — фурье-спектр затравочного максвелловского оператора, а $\hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega} = M_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn}$ с точностью до множителя совпадает с эффективной восприимчивостью и пропорционально малому параметру σ^2-дисперсии флуктуаций. Величина $\langle \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega} \rangle$ в (1) — спектр среднего поля. Дисперсионные поправки определяются из уравнения

$$\det (\hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega} - \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}) = 0. \tag{2}$$

Воспользуемся известной формулой для определения суммы матриц, одна из которых ($\hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}$) содержит малый параметр. Тогда левая часть (2) переходит в

$$L_{\boldsymbol{k}\omega} - \mathrm{Tr}\,(\hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}) + O\,(\sigma^2) = 0, \tag{3}$$

где $L_{\boldsymbol{k}\omega} = \det \hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega}$, $\hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega}$ — присоединенная к $\hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega}$ матрица:

$$\hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega}^{-1} = \hat{G}_{\boldsymbol{k}\omega} = \hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega} L_{\boldsymbol{k}\omega}^{-1}.$$

Для нахождения решения (3) применим метод Ньютона. Получим, например, поправку к частоте. Ищем решение (3) в виде $\omega = \omega_{\boldsymbol{k}} + \Delta\omega_{\boldsymbol{k}}$, где $\omega_{\boldsymbol{k}}$ — решение уравнения

$$\det \hat{L}_{\boldsymbol{k}\omega} = L_{\boldsymbol{k}\omega} = 0. \tag{4}$$

Искомая поправка имеет вид

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = -\,(L_{\boldsymbol{k}\omega} - \mathrm{Tr}\,(\hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}))\,[\partial_\omega (L_{\boldsymbol{k}\omega} - \mathrm{Tr}\,(\hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega}))]^{-1}\,|_{\omega=\omega_{\boldsymbol{k}}}. \tag{5}$$

Формула (5) с учетом (4) переходит в следующую:

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{Tr}\,(\hat{C}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega})\,(\partial_\omega L_{\boldsymbol{k}\omega})^{-1}\,|_{\omega=\omega_{\boldsymbol{k}}} + O\,(\sigma^2). \tag{6}$$

Перепишем (6) в символическом виде, явно содержащем спектр затравочного пропагатора $\hat{G}_{\boldsymbol{k}\omega}$:

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{Tr}\,(\hat{G}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega})\,(\partial_\omega \ln L_{\boldsymbol{k}\omega})^{-1}\,|_{\omega=\omega_{\boldsymbol{k}}}. \tag{7}$$

Поправка к волновому числу вычисляется аналогично:

$$\Delta\boldsymbol{k}_\omega = \mathrm{Tr}\,(\hat{G}_{\boldsymbol{k}\omega} \hat{M}_{\boldsymbol{k}\omega})\,(\partial_{\boldsymbol{k}} \ln L_{\boldsymbol{k}\omega})^{-2}\,\partial_{\boldsymbol{k}} \ln L_{\boldsymbol{k}\omega}\,|_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_\omega}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{k}_\omega$ — решение (3).

Прокомментируем (7), (8). Величина $M_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn}$ имеет вид определенного интеграла от группы тензорных слагаемых [4, 5]. В (7) и (8) она свернута с затравочным пропагатором, что чрезвычайно упрощает вычисления. Физический интерес представляет не эффективная восприимчивость, а ее свертки. Это обстоятельство отмечалось, например, в статистической электродинамике плазмы с микрофлуктуациями [11]. Далее, поправки к волновому числу (8) пропорциональны групповой скорости, что позволяет избежать ошибок при определении знака декремента в средах с отрицательной групповой скоростью (см., например, [12]). Наконец, формулы (7) и (8) могут быть использованы не только в теории распространения волн в средах с флуктуирующими параметрами. По-видимому, они эквивалентны предложенному в [13] методу определения поправок к дисперсионным характеристикам среды.

2. Пример. Рассмотрим холодную магнитоактивную плазму с диагональным тензором проницаемости. В случае мелкомасштабных флуктуаций с корреляционной функцией специального вида эта задача исследована в [14]. Флуктуации электронной концентрации $\delta n(\boldsymbol{r})$ будем считать статистически однородными:

$$\langle \delta n_{\boldsymbol{k}} \delta n_{\boldsymbol{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \langle n \rangle^2 \langle \delta n^2 \rangle_{\boldsymbol{k}} \delta^{(3)} (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'). \tag{9}$$

В (9) $\delta n_{\boldsymbol{k}}$ — спектр $\delta n(\boldsymbol{r})$, $\langle n \rangle$ — постоянная фоновая концентрация, $\langle \delta n^2 \rangle_{\boldsymbol{k}}$ — фурье-коррелятор относительных флуктуаций концентрации $\delta n / \langle n \rangle$. Тензор проницаемости

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_1 (\delta_{mn} - b_m b_n) + \varepsilon_3 b_m b_n , \tag{10}$$

где $\boldsymbol{b}$ — единичный вектор, направленный по магнитному полю. Все нерасшифрованные символы здесь и ниже соответствуют [15]. Проницаемость имеет вид (10), выполняются неравенства

$$\omega \ll \omega_{Bi} \quad \text{при } v_A \gg c; \tag{11}$$

$$\omega \ll \omega_{Bi}\, v_A^2 / c^2 \quad \text{при } v_A \ll c. \tag{12}$$

При условии (11) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_3 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$, а в случае (12) $\varepsilon_1 = c^2 / v_A^2$, $\varepsilon_3 = -\omega_{pe}^2 / \omega^2$, причем $|\varepsilon_3| \gg \varepsilon_1$. В (7) и (8)

$$L_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn} = k^2 \delta_{mn} - k_m k_n - k_0^2 \langle \varepsilon_{mn} \rangle ,$$

где $k_0 = \omega / c$. Затравочный пропагатор $G_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn} = C_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn} L_{\boldsymbol{k}\omega}^{-1}$,

$$L_{\boldsymbol{k}\omega} = (k^2 - k_1^2)(k_1^2 k_3^2 - k_1^2 [\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}]^2 - k_3^2 (\boldsymbol{k}\boldsymbol{b})^2),$$

$$\begin{gathered} C_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn} = (k^2 - k_1^2)^2 \delta_{mn} - (k^2 - k_1^2)(k^2 \delta_{mn} - k_m k_n) - \\ - (k^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_1^2)(\delta_{mn} - b_m b_n) + (k_3^2 - k_1^2) [\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}]_m [\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}]_n . \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $k_a^2 = k_0^2 \langle \varepsilon_a \rangle$, $a = 1,3$. Величина $M_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn}$ найдена в [14]:

$$\begin{gathered} M_{\boldsymbol{k}\omega}^{mn} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Gamma_\omega^{mp} \Gamma_\omega^{ln} G_{q\omega}^{pl} \langle \delta n^2 \rangle_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}} , \\ \Gamma_\omega^{mn} = (k_1^2 - k_0^2)(\delta_{mn} - b_m b_n) + (k_3^2 - k_0^2) b_m b_n . \end{gathered} \tag{14}$$

Входящий в (14) затравочный вершинный оператор Γ_ω^{mn} упрощается при выполнении неравенств (11) и (12). В замагниченной плазме (11) $\Gamma_\omega^{mn} = (k_3^2 - k_0^2) b_m b_n$, а в плотной плазме (12) $\Gamma_\omega^{mn} = k_1^2 (\delta_{mn} - b_m b_n) + k_3^2 b_m b_n$. Положим $\Delta \boldsymbol{k}_\omega = \Delta k_\omega \boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, направленный по групповой скорости. Ограничимся оценкой декремента $\varkappa_\omega = \operatorname{Im} \Delta k_\omega$.

1. Замагниченная плазма. Здесь существуют две нормальные моды — 1) обыкновенная (O-волна) и 2) необыкновенная быстрая (БН-волна, $\langle\varepsilon_3\rangle>0$) или медленная (МН-волна, $\langle\varepsilon_3\rangle<0$). Очевидно, что O-волна не испытывает рассеяния на флуктуациях в рассматриваемом приближении ($\omega\ll\omega_{Bi}$), так как ее вектор поляризации в каждой реализации случайного поля ортогонален флуктуационному току рассеяния [4]. Из (8) следует, что декремент H-волны

$$\varkappa_\omega^E = \frac{\pi k_0^3 (k_3^2-k_0^2)\, v_g}{2k_3^6 c} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, [\boldsymbol{kb}]^2\, [\boldsymbol{qb}]^2\, \langle \delta n^2\rangle_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}} \times$$
$$\times\, \delta\left(k_0^2 k_3^2 - k_0^2\, [\boldsymbol{qb}]^2 - k_3^2 (\boldsymbol{qb})^2\right). \qquad (15)$$

В (15) $k=k_0N$, N и v_g — показатель преломления и групповая скорость H-волны соответственно:

$$N^2=\langle\varepsilon_3\rangle/(\sin^2\theta+\langle\varepsilon_3\rangle\cos^2\theta),\quad (v_g/c)^2=(\langle\varepsilon_3\rangle/N)^2/(\sin^2\theta+\langle\varepsilon_3\rangle^2\cos^2\theta),$$

$\cos\theta=(\boldsymbol{kb})/k$. Для определенности везде в дальнейших оценках используется гауссов коррелятор $\langle\delta n^2\rangle_{\boldsymbol{k}}$.

Для БН-волны в случае мелкомасштабных ($p_0=k_0l/2\ll1$, l — масштаб корреляции) изотропных неоднородностей

$$\varkappa_\omega^{FE}(\theta) = 4\sqrt{\pi}\sigma^2 p_0^4 N^2 \sin^2\theta\, v_g\, (1-\langle\varepsilon_3\rangle^{-1})^2/3lc, \qquad (16)$$

где $\sigma^2=\langle\delta n^2\rangle/\langle n\rangle^2$. Формула (16) совпадает с соответствующим результатом в [4]: (16) обращается в нуль при $\theta=0$ и максимально при $\theta=\pi/2$,

$$\varkappa_{\omega,\max}^{FE} = 4\sqrt{\pi}\sigma^2 p_0^4 \langle\varepsilon_3\rangle^{3/2} (1-\langle\varepsilon_3\rangle^{-1})^2/3l. \qquad (17)$$

Из (16), (17) видно, что рассеяние на мелкомасштабных неоднородностях носит рэлеевский характер.

Для крупномасштабных изотропных неоднородностей ($p_0\gg1$) затухание мало, за исключением случая распространения поперек магнитного поля. Введя $\psi=\pi/2-\theta$, $\psi_0=1/p_0\langle\varepsilon_3\rangle^{1/2}\ll1$, при малых ψ имеем

$$\varkappa_\omega^{FE} = \sqrt{\pi}\sigma^2 p_0^2 (1-\langle\varepsilon_3\rangle)^2 \langle\varepsilon_3\rangle^{-1} l^{-1} \exp(-\psi^2/\psi_0^2), \qquad (18)$$

т. е. индикатриса рассеяния аппроксимируется узкой гауссовой кривой (ср. с формулами (26), (29) в [2], описывающими эффект ракурсной чувствительности).

Заметим, что кроме стандартных ограничений во всех приведенных в этом пункте формулах предполагается, что

$$\sigma^2 \ll \langle\varepsilon_3\rangle^2(\langle\varepsilon_3\rangle-1)^2. \qquad (19)$$

Если выполняется неравенство, противоположное (19), то флуктуации аномально велики. Их несложно рассмотреть, перенормировав пропагатор, коррелятор и вершинный оператор. Соответствующая техника описана в [4]. Мы этого делать не будем.

Для анизомерной статистики концентрации с масштабом корреляции вдоль поля $l_\parallel$ и поперек $l_\perp$ особый интерес представляет случай нитевидных неоднородностей: $p_0^\perp \ll 1 \ll \mu p_0^\perp$, где $p_0^\perp = k_0 l_\perp/2$, $\mu = l_\parallel/l_\perp \gg 1$. Декремент*

* Нечетная зависимость от ω в (20) и ниже является следствием применения асимптотических методов при оценке интегралов Разумеется, точное выражение для экстинкции четно по ω.

$$\varkappa_\omega^{FE}(\theta) = \pi\sigma^2 (p_0^\perp)^3 (1 - \langle\varepsilon_3\rangle)^2 v_g N^2 \sin^4\theta/\langle\varepsilon_3\rangle^3 \, l_\perp c \qquad (20)$$

максимален при $\theta=\pi/2$: $\varkappa_{\omega,\max}^{FE} = \pi\sigma^2 (p_0^\perp)^3 (1 - \langle\varepsilon_3\rangle)^2 \langle\varepsilon_3\rangle^{-1/2} l_\perp^{-1}$.

МН-волна имеет плазменный резонанс при $\theta=\theta_0=\mathrm{arctg}|\langle\varepsilon_3\rangle|^{1/2}$, причем $\theta<\theta_0$. В случае мелкомасштабных изотропных неоднородностей $(p_0N \ll 1)$

$$\varkappa_\omega^{SE}(\theta) = \pi\sigma^2 p_0 N^2 \sin^2\theta \, v_g (1+|\langle\varepsilon_3\rangle|)^{1/2}/2|\langle\varepsilon_3\rangle|^3 lc. \qquad (21)$$

Декремент (21) описывает затухание МН-волны за счет рассеяния в плазменный резонанс. Затухание велико, не зависит от масштаба корреляции и является истинным при учете столкновительной диссипации или затухания Ландау для флуктуационных продольных волн. Если $p_0 \ll 1$, $p_0N \gg 1$, то

$$\varkappa_\omega^{SE} = A\sigma^2 p_0^2 l^{-1} (\theta_0 - \theta)^{-1} \exp[-p_0^2 C (\theta_0 - \theta)^{-1}], \qquad (22)$$

где $A, C = O(1)$. Таким образом, при распространении МН-моды в направлении, близком к резонансному, экстинкция мала.

При $p_0 \gg 1$, $p_0N \gg 1$, $N = O(1)$

$$\varkappa_\omega^{SE}(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma^2 p_0^2 N^4 (\sin\theta)^{3/2} v_g}{2|\langle\varepsilon_3\rangle|^{9/4} (1 + |\langle\varepsilon_3\rangle|) lc} [\varphi_\omega^+(\theta) + \varphi_\omega^-(\theta)] \exp[-p_0^2 (N^2+1)], \qquad (23)$$

$$\varphi_\omega^\pm(\theta) = (|\langle\varepsilon_3\rangle|^{1/2} \sin\theta \pm \cos\theta)^{5/2} \exp[-p_0^2 N^2 (|\langle\varepsilon_3\rangle|^{1/2}\sin\theta \pm \cos\theta)^2/(1 + |\langle\varepsilon_3\rangle|)].$$

Уравнение (23) справедливо при $|\langle\varepsilon_3\rangle|^{1/2}\sin\theta > \cos\theta$. Это неравенство выполняется при $\theta_0 > \pi/4$ или $\omega < \omega_{pe}/\sqrt{2}$. Если $|\langle\varepsilon_3\rangle|^{1/2}\sin\theta < \cos\theta$, то φ_ω^- в (23) следует опустить. При $N \to \infty$ из (23) следует, что

$$\varkappa_\omega^{SE} = A_1 \sigma^2 p_0^2 l^{-1} (\theta_0 - \theta)^{-3/2} \exp[-p_0^2 C_1 (\theta_0 - \theta)^{-1}]. \qquad (24)$$

Здесь $k = k_A = \omega/s_A$. Величина

Если флуктуации концентрации анизомерные, причем $p_0^\perp \ll 1 \ll \mu p_0^\perp$, то при $N = O(1)$

$$\varkappa_\omega^{SE}(\theta) = \pi\sigma^2 (p_0^\perp)^3 (1 + |\langle\varepsilon_3\rangle|)^2 N^4 \sin^2\theta \, v_g/|\langle\varepsilon_3\rangle|^3 \, l_\perp c. \qquad (25)$$

Легко видеть, что (25) может быть получено из (20) путем аналитического продолжения по $\langle\varepsilon_3\rangle$. При этих же условиях и $N \to \infty$ экстинкция определяется коротковолновым поведением коррелятора (9) и, следовательно, мала (формула типа (22), (24)).

2. *Плотная плазма.* При выполнении (12) плазма является прозрачной для волн: обыкновенной — быстрой магнитозвуковой (S-волны) и медленной необыкновенной (в пределе $\gamma^2 = -\langle\varepsilon_1\rangle/\langle\varepsilon_3\rangle \to 0$ альфвеновской — A-волны). Для S-моды

$$\varkappa_\omega^S = \varkappa_\omega^{SS} + \varkappa_\omega^{SA}; \qquad (26)$$

$$\varkappa_\omega^{SS} = \frac{\pi k_A^3}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{([\boldsymbol{kb}][\boldsymbol{qb}])^2}{[\boldsymbol{kb}]^2 [\boldsymbol{qb}]^2} \langle\delta n^2\rangle_{k-q} \delta(q^2 - k_A^2); \qquad (27)$$

$$\varkappa_\omega^{SA} = \frac{\pi k_A^3}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{k_3^2 [([\boldsymbol{kb}][\boldsymbol{qb}])^2 - [\boldsymbol{kb}]^2[\boldsymbol{qb}]^2] + [\boldsymbol{qb}]^2 (\boldsymbol{q}[\boldsymbol{kb}])^2}{[\boldsymbol{kb}]^2 [\boldsymbol{qb}]^2} \times$$
$$\times \langle\delta n^2\rangle_{k-q} \delta(k_A^2 k_3^2 - k_A^2 [\boldsymbol{qb}]^2 - k_3^2 (\boldsymbol{qb})^2). \qquad (28)$$

Здесь $k=k_A=\omega/s_A$. Величина $\varkappa_\omega^{SS}$ описывает затухание когерентной S-волны за счет рассеяния в стохастическую S-моду, а $\varkappa_\omega^{SA}$ — затухание когерентной S-волны из-за конверсии в стохастическую A-волну.

Для изотропных неоднородностей

$$\varkappa_\omega^{SS}(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2}{2l\sin^2\theta}\exp(-2p_A^2)[\operatorname{ch}(2p_A^2\cos\theta)-\\ -\operatorname{ch}(2p_A^2)+2p_A^2\sin^2\theta\operatorname{sh}(2p_A^2)], \tag{29}$$

где $p_A=k_Al/2$. В предельных случаях

$$\varkappa_\omega^{SS}=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2 p_A^2}{l}\begin{cases}p_A^2, & p_A\ll 1\\ 1/2, & p_A\gg 1\end{cases}. \tag{30}$$

Выражение для $\varkappa_\omega^{SA}$ в случае изотропных флуктуаций без ограничения общности можно привести при $\gamma=0$ к виду

$$\varkappa_\omega^{SA}(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2}{2l\sin^2\theta}\exp(-2p_A^2)\operatorname{ch}(2p_A^2\cos\theta)(\exp(p_A^2\sin^2\theta)-1). \tag{31}$$

Для мелкомасштабных флуктуаций

$$\varkappa_\omega^{SA}=\sqrt{\pi}\sigma^2 p_A^2/2l, \tag{32}$$

причем (32) носит стоксов характер из-за рассеяния в резонанс. Соответствующий A-моде резонансный угол равен $\theta_0=\pi/2$ при $\gamma=0$. В случае крупномасштабных флуктуаций (31) мало, за исключением случаев $\theta=0,\pi$, когда

$$\varkappa_\omega^{SA}=\sqrt{\pi}\sigma^2 p_A^2/4l. \tag{33}$$

Сравнение (30) и (32) при $p_A\ll 1$ дает $\varkappa_\omega^{SS}/\varkappa_\omega^{SA}\sim p_A^2$, т. е. при рассеянии на мелкомасштабных флуктуациях доминирует конверсия в стохастическую A-моду. Если $p_A\gg 1$ и $\theta=0,\pi$, то (30) и (33) одного порядка: $\varkappa_\omega^{SS}/\varkappa_\omega^{SA}=2$. При $\theta\gg 1/p_A$, $p_A\gg 1$ величина (26) имеет вид (30): превалирует рассеяние в S-волну.

Для анизомерных флуктуаций концентрации наиболее интересен случай вытянутых по магнитному полю неоднородностей: $p_A^\perp=k_Al_\perp/2\ll 1\ll\mu p_A^\perp$, $\mu=l_\parallel/l_\perp\gg 1$. При этом

$$\varkappa_\omega^{SS}=\sqrt{\pi}\sigma^2(p_A^\perp)^3/2l_\perp, \tag{34}$$

а экстинкция за счет трансформации в стохастическую A-волну

$$\varkappa_\omega^{SA}(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2(p_A^\perp)^2\mu}{2l_\perp(1+\mu^2\gamma^2)}\{\exp[-(\mu p_A^\perp)^2(1-\cos\theta)^2]+\\ +\exp[-(\mu p_A^\perp)^2(1+\cos\theta)^2]\}. \tag{35}$$

Из (35) явствует, что $\varkappa_\omega^{SA}$ мало, за исключением случая распространения по или против магнитного поля, причем при $\theta=0,\pi$

$$\varkappa_\omega^{SA}=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2}{2}\begin{cases}l_\perp^{-1}, & \mu\gamma\ll 1\\ l_\parallel^{-1}\gamma^{-2}, & \mu\gamma\gg 1\end{cases}. \tag{36}$$

По-видимому, реализация неравенства $\mu\gamma \gg 1$ затруднительна. Это соответствует чрезвычайно большой степени анизотропии флуктуаций. Сравнение же (34) и (36) при $\mu\gamma \ll 1$ дает $\varkappa_{\omega}^{SS}/\varkappa_{\omega}^{SA} \sim p_A^{-1}/\mu \ll 1$. При распространении вдоль магнитного поля определяющим является рассеяние в A-моду, а при распространении под углом к полю — рассеяние в S-волну.

Затухание когерентной A-волны

$$\varkappa_{\omega}^{A} = \varkappa_{\omega}^{AS} + \varkappa_{\omega}^{AA}; \tag{37}$$

$$\varkappa_{\omega}^{AS} = \frac{\pi k_A^3 v_A}{2N_A^2 v_{gA} \cos^2\theta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \times$$
$$\times \frac{[\boldsymbol{kb}]^2[\boldsymbol{qb}]^2 - ([\boldsymbol{kb}]\,[\boldsymbol{qb}]^2 - [\boldsymbol{kb}]^2(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{qb}])^2/k_3^2}{[\boldsymbol{kb}]^2\,[\boldsymbol{qb}]^2} \langle \delta n^2 \rangle_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}\, \delta(q^2 - k_A^2); \tag{38}$$

$$\varkappa_{\omega}^{AA} = \frac{\pi k_A^3 v_A}{2N_A^2 v_{gA} \cos^2\theta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{([\boldsymbol{kb}]\,[\boldsymbol{qb}])^2}{[\boldsymbol{kb}]^2\,[\boldsymbol{qb}]^2} + \frac{k^2q^2 + (\boldsymbol{kq})^2}{k_3^4} - \right.$$
$$- \frac{k^2 + q^2}{k_3^2} + 2\,\frac{(k_3^2 - k_A^2)}{k_3^4\,k_A^2}(\boldsymbol{kb})(\boldsymbol{qb})(\boldsymbol{kq}) + \tag{39}$$
$$\left. + \frac{(\boldsymbol{q}\,[\boldsymbol{kb}])^2\,([\boldsymbol{kb}]^2 + [\boldsymbol{qb}]^2)}{k_3^2\,[\boldsymbol{kb}]^2\,[\boldsymbol{qb}]^2} \right\} \langle \delta n^2 \rangle_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}\, \delta\left((\boldsymbol{qb})^2 - \gamma^2\,[\boldsymbol{qb}]^2 - k_A^2\right),$$

где $k = k_A N_A$. В (37) $\varkappa_{\omega}^{AA}$ — затухание среднего поля A-моды за счет перекачки в флуктуационную A-волну, $\varkappa_{\omega}^{AS}$ — затухание когерентной A-волны из-за трансформации в стохастическую S-волну. В (38) и (39) N_A — показатель преломления (относительно альфвеновской скорости v_A) и v_{gA} — групповая скорость A-волны:

$$1/N_A^2 = \cos^2\theta - \gamma^2 \sin^2\theta,$$

$$(v_{gA}/v_A)^2 = (\langle \varepsilon_3 \rangle^2 \cos^2\theta + \langle \varepsilon_1 \rangle^2 \sin^2\theta)\,(\langle \varepsilon_3 \rangle \cos^2\theta + \langle \varepsilon_1 \rangle \sin^2\theta)/\langle \varepsilon_3 \rangle^3 \cos^4\theta.$$

A-волна имеет резонансное направление θ_0: $\operatorname{tg}\theta < \operatorname{tg}\theta_0 = \gamma^{-1} \gg 1$. При $\gamma = 0$ $\theta_0 = \pi/2$, $v_{gA} = v_A$, $N_A = 1/\cos\theta$ — единичный вектор групповой скорости $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{b}$.

Декремент (38) в случае изотропных флуктуаций

$$\varkappa_{\omega}^{AS}(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma^2 v_A}{2v_{gA}\, l N_A^2 \sin^2\theta} \exp\left[-p_A^2 (N_A^2 + 1)\right] \times$$
$$\times \left[\operatorname{ch}(2p_A^2 N_A) - \operatorname{ch}(2p_A^2 N_A \cos\theta)\right]. \tag{40}$$

В МГД-пределе $\gamma \to 0$ и

$$\varkappa_{\omega}^{AS}(\theta) = \sqrt{\pi}\,(\sigma^2/2l)\operatorname{ctg}^2\theta \left[\operatorname{ch}(2p_A^2 \sec\theta) - \operatorname{ch}(2p_A^2)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-p_A^2 (1 + \sec^2\theta)\right]. \tag{41}$$

Для мелкомасштабных флуктуаций ($p_A N_A \ll 1$) величина $\varkappa_{\omega}^{AS} = \sqrt{\pi}\sigma^2 p_A^4 v_A/v_{gA} l$ максимальна при $\theta = 0, \pi$: $\varkappa_{\omega,\max}^{AS} = \sqrt{\pi}\,\sigma^2 p_A^4/l$. В случае крупномасштабных флуктуаций $\varkappa^{AS}_{\omega}$ мало, за исключением случаев $\theta=0, \pi$, где $\varkappa^{AS}_{\omega,\max}=\sqrt{\pi}\,\sigma^2 p_A^2/4l$.

При рассеянии $A\to A$ на изотропных флуктуациях

$$\varkappa^{AA}_{\omega}(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2 v_A}{2v_{gA}\,lN_A^2\sin^2\theta}\exp\left[-p_A^2(N_A^2+1)\right]\operatorname{ch}(2p_A^2 N_A\cos\theta)\times$$
$$\times\left[(2p_A^2N_A^2\sin^2\theta-1)\exp(p_A^2N_A^2\sin^2\theta)+1\right]. \tag{42}$$

Если флуктуации мелкомасштабные, то

$$\varkappa^{AA}_{\omega}=\sqrt{\pi}\sigma^2 p_A^2 v_A/2v_{gA}l.$$

Для крупномасштабных флуктуаций

$$\varkappa^{AA}_{\omega}(\theta)=(\sqrt{\pi}\sigma^2p_A^2v_A/2v_{gA}l)\{\exp[-p_A^2(N_A\cos\theta-1)^2]+$$
$$+\exp[-p_A^2(N_A\cos\theta+1)^2]\}, \tag{43}$$

$\varkappa^{AA}_{\omega}(\theta)$ заметно отлично от нуля при $\theta=0, \pi$, при этом $\varkappa^{AA}_{\omega}=\sqrt{\pi}\sigma^2p_A^2/2l$. Сравним (40) и (42) при $p_AN_A\ll 1: \varkappa^{AS}_{\omega}/\varkappa^{AA}_{\omega}\sim p_A^2$, т. е. основную роль играет рассеяние в A-волну. Если $p_AN_A\gg 1$, то сравнение $\varkappa^{AS}_{\omega}$ и $\varkappa^{AA}_{\omega}$ имеет смысл только при $\theta=0, \pi$, причем $\varkappa^{AS}_{\omega}/\varkappa^{AA}_{\omega}=1/2$.

Для нитевидных анизомерных неоднородностей $(p_A^{\perp}\ll 1\ll \mu p_A^{\perp})$ величина $\varkappa^{AS}_{\omega}$ мала, кроме как при $\theta=0,\pi$, когда $\varkappa^{AS}_{\omega}=\pi\sigma^2(p_A^{\perp})^3/4l_{\perp}$. Для рассеяния $A\to A$ при $p_A^{\perp}N_A\ll 1$

$$\varkappa^{AA}_{\omega}(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2\mu(p_A^{\perp})^2v_A}{2v_{gA}l_{\perp}(1+\mu^2\gamma^2)}\{\exp[-(\mu p_A^{\perp})^2(N_A\cos\theta-1)^2]+$$
$$+\exp[-(\mu p_A^{\perp})^2(N_A\cos\theta+1)]\}. \tag{44}$$

Если $p_A^{\perp}N_A\gg 1$, то (44) следует умножить на фактор $\exp[-(p_A^{\perp})^2\times N_A^2\sin^2\theta\mu^2\gamma^2/(1+\mu^2\gamma^2)]$. Легко видеть, что (44) не мало при $\theta=0,\pi$, при этом $\varkappa^{AA}_{\omega}=\sqrt{\pi}\sigma^2\mu(p_A^{\perp})^2/2l_{\perp}$ (считаем $\mu\gamma\ll 1$). Сравнение декрементов в случае анизомерных флуктуаций при $\theta=0,\pi$ дает $\varkappa^{AS}_{\omega}/\varkappa^{AA}_{\omega}\sim p_A^{\perp}/\mu\ll\ll 1$.

В заключение отметим струйный характер рассеяния, описываемый (18), (35), (43) и (44). Эти выражения заметно отличны от нуля при распространении волны поперек (формула (18)) или вдоль (остальные формулы) магнитного поля. При этом угловая зависимость экстинкции может быть аппроксимирована δ-функциями.

Выражаю благодарность А. Д. Авдееву, В. Н. Красильникову и В. В. Тамойкину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
3. Пелиновский Е. Н. В кн.: Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979, с. 331.
4. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 3, с. 356.

5. Dense D., Spence J. E. — In: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. — N. Y: Acad. Press, 1973, 3, p. 121
6. Howe M. S. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1974, **27**, p. 237.
7. Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 9, с. 1273.
8. Бреховских Л. М. и др. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 5—6, с. 842.
9. Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1977, **13**, № 5, с. 537.
10. Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н., Тамойкин В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 5, с. 734.
11. Пустовалов В. В., Силин В. П. Труды ФИАН, 1972, **61**, с. 42.
12. Mysak L. A. — Rev. Geophys. Space Phys., 1978, **16**, № 2, p. 233.
13. Юдин Л. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 2, с. 235.
14. Ермакова Е. Н., Тамойкин В. В. — Изв. вузов. — Радиофизика, 1975, **18**, № 10, с. 1418.
15. Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М: Наука, 1974.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 21 декабря 1983 г.

ON THE MEAN FIELD ATTENUATION IN ANISOTROPIC MEDIA

V. D. Lipovskij

The simple method for calculation of the mean field attenuation in anisotropic media weak fluctuations is suggested. The mean field attenuation in the cold magnetoactive plasma with diagonal permittivity tensor is obtained as an example.

СРАВНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ (УСИЛЕНИЯ) ТЕ- и ТМ-МОД ПЯТИСЛОЙНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

П. В. Адамсон

(Окончание)

Методом теории возмущений получена приближенная формула для коэффициентов поглощения (КП) (усиления (У)) НМ ПВ $\varkappa_5$:

$$\varkappa_5 = \varkappa + \varkappa_1 (\Gamma_{51} - \Gamma_1) + \sum_{j=2,3} \varkappa_j (\Gamma_{5j} - \Gamma_j) + \sum_{j=2,3} \varkappa_{jb} \frac{\sqrt{|\varepsilon_{jb}|}}{n} \Gamma_{jb} \left(1 + 2\frac{(n^2 - \varepsilon_{jb})}{\varepsilon_{jb}} \alpha\right), \quad (3)$$

где $\alpha=0$ для ТЕ-мод и $\alpha=1$ для ТМ-мод, $\varkappa$—КП(У) НМ диэлектрического трехслойного волновода (ТВ), $\varkappa_{1,j,jb}$ — КП (У) плоской электромагнитной волны с частотой, равной частоте моды, Γ_1, Γ_j — относительные доли продольных потоков мощности НМ ТВ в соответствующих слоях, а Γ_{51}, Γ_{5j} и Γ_{jb} представляют собой в первом приближении по параметрам (1) и (2) относительные доли потоков мощности в соответствующих слоях ПВ ($\Gamma_{51}+\Gamma_{52}+\Gamma_{53}+\Gamma_{2b}+\Gamma_{3b} \simeq 1$), n — показатель преломления моды. Следовательно, при нанесении внешних слоев на ТВ КП (У) изменяется по двум причинам. Во-первых, происходит перераспределение электромагнитного поля между слоями и соответствующее изменение продольных потоков энергии в среднем слое (1) и промежуточных слоях (2, 3) (второй и третий член в правой части формулы (3)). Во-вторых, — проникновение поля во внешний слой и прямое поглощение в последнем (четвертый член в (3)).

Проанализированы возможности согласования и значительного рассогласования КП (У) ортогональных мод (ОМ) (ТЕ- и ТМ-мод с одинаковыми частотой и номером моды). В частности, показано, что если внешними слоями ПВ являются непоглощающие диэлектрические слои с $\varepsilon_j—\varepsilon_{jb} \gg \varepsilon_1—\varepsilon_j$, можно согласовать КП (У) ОМ. Наличие металлического внешнего слоя у ПВ с определенными параметрами приводит к увеличению рассогласования КП (У) ОМ.

Для оценки точности приближенных формул проведено их сравнение с результатами, полученными на основе численного решения точного дисперсионного уравнения ПВ при помощи ЭВМ.

Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 7770-84. Деп. от 5 декабря 1984 г.