

Учитывая, что (17) определяет малый декремент затухания ленгмюровской волны, его можно преобразовать к виду $-2\gamma_L(d/dt)E(t-\tau)$, где $\tau = |\omega_p \omega_p / 2k^4 v_T^4|$ и уравнение для поля ленгмюровской волны принимает вид

$$[E \exp(v_0 t)]_{tt} + 2\gamma_L(t)[E(t-\tau) \exp(v_0(t-\tau))]_{tt} + \omega_p^2(t)[E \exp(v_0 t)] = 0. \quad (18)$$

Петрудно видеть, что решение уравнения (18) содержит осциллирующий со временем декремент затухания плазменной волны (см. (15)).

Автор благодарит Е. В. Суворова за ряд полезных замечаний по содержанию работы и В. В. Курина за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. — ЖЭТФ, 1946, 16, с. 574.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 октября 1983 г.

УДК 621.327.8.001.24

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ОПТИЧЕСКИХ СВЕТОВОДАХ

Д. В. Кизеветтер, В. И. Малогин

Известно, что в волноводах могут распространяться лишь некоторые типы волн — моды с определенной постоянной распространения, которая фактически задает конфигурацию электромагнитного поля в волноводе. Вычисление собственных чисел точного характеристического уравнения требует решения сложного трансцендентного уравнения. Если число распространяющихся мод велико (более 10^3), то вычисление массива собственных чисел требует больших затрат машинного времени, что делает некоторые задачи практически неразрешимыми. Поэтому во многих случаях удобно пользоваться асимптотическими приближениями.

Асимптотические выражения для вычисления собственных чисел волн в цилиндрических диэлектрических волноводах со ступенчатым профилем показателя преломления приводятся, например, в [1-4]. Однако известные асимптотические формулы не учитывают зависимость от приведенной частоты, а собственные числа поперечных электрических (ТЕ) и поперечных магнитных (ТМ) мод оказываются вырожденными, поэтому информация о фазах распространяющихся волн и, следовательно, об изменении поляризации распространяющегося излучения оказывается утерянной.

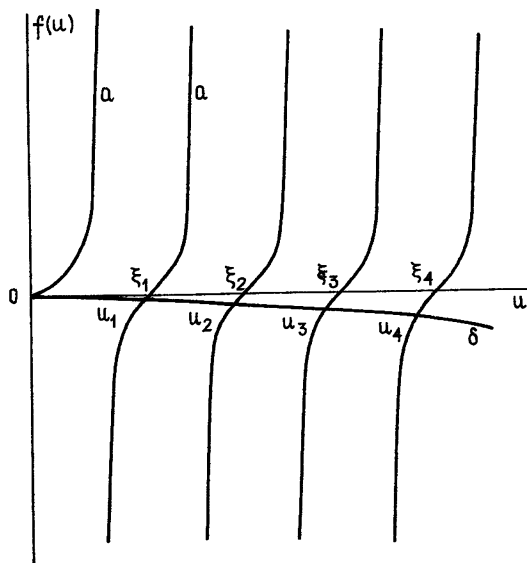


Рис. 1. Графическое решение характеристического уравнения (1) при $v=20$.

a — функция $J_1(u)/J_0(u)$, $б$ — функция $-uK_1(w)/wK_0(w)$. График функции $-uK_1(w)n_2^2/(wK_0(w)n_1^2)$ практически совпадает с графиком $б$ и на рисунке не приводится.

Распространение электромагнитных волн в волноводе описывается волновым уравнением. Граничным условием является условие непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхности раздела двух сред; для выполнения этого условия необходимо, чтобы собственные числа удовлетворяли уравнению [1, 4]

$$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = - \frac{1}{w} \frac{K_1(w)}{K_0(w)} \quad \text{для TE}_0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w} \frac{n_2^2 K_1(w)}{n_1^2 K_0(w)} \quad \text{для } \text{TM}_{0j}, \quad (2)$$

где $J_1(u)$, $J_0(u)$ — функции Бесселя, $K_0(w)$, $K_1(w)$ — модифицированные функции Ханкеля, n_1 — показатель преломления сердцевинны, n_2 — показатель преломления оболочки. Величины u , w связаны с осевой постоянной распространения β и приведенной частотой v согласно формулам

$$u = a(n_1^2 k^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad w = a(\beta^2 - n_2^2 k^2)^{1/2}, \quad v = (u^2 + w^2)^{1/2},$$

где a — радиус сердцевинны, k — величина волнового вектора в вакууме.

Будем искать решения характеристических уравнений (1), (2) для волноводных мод низкого порядка ($u \ll v$) вблизи точек ξ_j , удовлетворяющих характеристическому уравнению при бесконечно больших приведенных частотах [3, 4]:

$$J_1(\xi) = 0. \quad (3)$$

Разложим частные цилиндрических функций в степенной ряд в окрестности точек ξ_j :

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \frac{\partial^K}{\partial u^K} \left(\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \Big|_{\xi_j} (u - \xi_j)^K,$$

$$\frac{K_1(w)}{K_0(w)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \frac{\partial^K}{\partial w^K} \left(\frac{K_1(w)}{K_0(w)} \right) \Big|_{\xi_j} (u - \xi_j)^K.$$

Используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя [5] и произведя дифференцирование, можно получить

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \Big|_{\xi_j} = 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \Big|_{\xi_j} = -\frac{1}{\xi_j}. \quad (4)$$

Известно, что при $u \ll v$ [2, 5]

$$K_1(w)/K_0(w) \approx 1 + O(u^2),$$

следовательно, для решения уравнений (1), (2) в окрестности $|\xi_j - u| \ll 1$ можно ограничиться линейным приближением. При этом уравнения (1), (2) приобретают вид

$$u - \xi_j = -u/v \quad \text{для } \text{TE}_{0j},$$

$$u - \xi_j = -(u/v) (n_2^2/n_1^2) \quad \text{для } \text{TM}_{0j}.$$

Тогда

$$u_j = \xi_j v (v+1)^{-1} \quad \text{для } \text{TE}_{0j}; \quad (5)$$

$$u_j = \xi_j v (v+\gamma)^{-1} \quad \text{для } \text{TM}_{0j}, \quad (6)$$

где $\gamma = n_2^2/n_1^2$.

Собственные числа TE_{0j} - и TM_{0j} -мод различны, т. е. вырождение снимается. Относительная ошибка вычисления собственных чисел при использовании формул (5), (6) для различных значений u/v приведена в табл. 1 (числитель — относительная ошибка при использовании формул (5), (6), знаменатель — при использовании формулы (3)). Точные значения собственных чисел были получены числовыми методами. Показатели преломления при вычислении собственных чисел TM_{0j} -мод были приняты равными $n_1 = 1,51$, $n_2 = 1,5$. Применение линеаризации дисперсионного уравнения вблизи точек ξ_j позволяет повысить точность асимптотических формул более чем на порядок. При увеличении номера корня j и постоянном значении u/v ошибка вычисления уменьшается вследствие уменьшения влияния квадратичного члена разложения (4)

Для вычисления нулей функции Бесселя первого порядка удобно использовать асимптотическое представление [6]. В простейшем приближении можно получить

$$u_j = (\pi/4) (1+4j) v (v+1)^{-1} \quad \text{для } \text{TE}_{0j}; \quad (7)$$

$$u_j = (\pi/4) (1+4j) v (v+\gamma)^{-1} \quad \text{для } \text{TM}_{0j}. \quad (8)$$

Относительная ошибка вычисления собственных чисел при использовании формул (7), (8) составляет $\Delta \sim 3,5\%$ для $j=1$, $\Delta \sim 1,5\%$ для $j=2$, $\Delta \sim 1\%$ для $j=3$. Ошибка вычислений уменьшается с возрастанием j .

Применение асимптотических выражений позволяет избежать решения трансцендентного уравнения, что значительно уменьшает время счета.

| I | u/v | | | | | | | 0,01 | |
|---|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | 0,7 | 0,5 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | | |
| 1 | TE | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $3,0 \cdot 10^{-3}$ | $9,2 \cdot 10^{-4}$ | $2,9 \cdot 10^{-4}$ | $4,9 \cdot 10^{-5}$ | $5,3 \cdot 10^{-6}$ | $5,2 \cdot 10^{-7}$ | $1,1 \cdot 10^{-7}$ |
| | TM | $1,9 \cdot 10^{-1}$ | $1,3 \cdot 10^{-1}$ | $7,9 \cdot 10^{-2}$ | $5,3 \cdot 10^{-2}$ | $2,6 \cdot 10^{-2}$ | $1,3 \cdot 10^{-2}$ | $5,2 \cdot 10^{-3}$ | $2,6 \cdot 10^{-3}$ |
| | TE | $1,1 \cdot 10^{-2}$ | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | $9,9 \cdot 10^{-4}$ | $3,2 \cdot 10^{-4}$ | $4,6 \cdot 10^{-5}$ | $6,5 \cdot 10^{-6}$ | $6,2 \cdot 10^{-7}$ | $1,1 \cdot 10^{-7}$ |
| | TM | $1,9 \cdot 10^{-1}$ | $1,3 \cdot 10^{-1}$ | $7,8 \cdot 10^{-2}$ | $5,2 \cdot 10^{-2}$ | $2,6 \cdot 10^{-2}$ | $1,3 \cdot 10^{-2}$ | $5,2 \cdot 10^{-3}$ | $2,6 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | TE | $7,3 \cdot 10^{-3}$ | $2,6 \cdot 10^{-3}$ | $5,9 \cdot 10^{-4}$ | $1,8 \cdot 10^{-4}$ | $2,3 \cdot 10^{-5}$ | $2,8 \cdot 10^{-6}$ | $1,9 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $1,1 \cdot 10^{-1}$ | $7,4 \cdot 10^{-2}$ | $4,3 \cdot 10^{-2}$ | $2,9 \cdot 10^{-2}$ | $1,4 \cdot 10^{-2}$ | $7,1 \cdot 10^{-3}$ | $2,9 \cdot 10^{-3}$ | $1,4 \cdot 10^{-3}$ |
| | TE | $7,7 \cdot 10^{-3}$ | $2,7 \cdot 10^{-3}$ | $6,2 \cdot 10^{-4}$ | $1,9 \cdot 10^{-4}$ | $2,5 \cdot 10^{-5}$ | $3,4 \cdot 10^{-6}$ | $1,7 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $1,1 \cdot 10^{-1}$ | $7,3 \cdot 10^{-2}$ | $4,3 \cdot 10^{-2}$ | $2,8 \cdot 10^{-2}$ | $1,4 \cdot 10^{-2}$ | $7,0 \cdot 10^{-3}$ | $2,8 \cdot 10^{-3}$ | $1,4 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | TE | $5,7 \cdot 10^{-3}$ | $2,0 \cdot 10^{-3}$ | $4,2 \cdot 10^{-4}$ | $1,3 \cdot 10^{-4}$ | $1,6 \cdot 10^{-5}$ | $2,0 \cdot 10^{-6}$ | $< 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $7,5 \cdot 10^{-2}$ | $5,1 \cdot 10^{-2}$ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $2,0 \cdot 10^{-2}$ | $9,8 \cdot 10^{-3}$ | $4,9 \cdot 10^{-3}$ | $2,0 \cdot 10^{-3}$ | $9,8 \cdot 10^{-4}$ |
| | TE | $5,9 \cdot 10^{-3}$ | $2,1 \cdot 10^{-3}$ | $4,4 \cdot 10^{-4}$ | $1,3 \cdot 10^{-4}$ | $1,7 \cdot 10^{-5}$ | $2,3 \cdot 10^{-6}$ | $1,2 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $7,4 \cdot 10^{-2}$ | $5,1 \cdot 10^{-2}$ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $2,0 \cdot 10^{-2}$ | $9,4 \cdot 10^{-3}$ | $4,9 \cdot 10^{-3}$ | $1,9 \cdot 10^{-3}$ | $9,7 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | TE | $4,6 \cdot 10^{-3}$ | $1,6 \cdot 10^{-3}$ | $3,3 \cdot 10^{-4}$ | $9,7 \cdot 10^{-5}$ | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | $1,6 \cdot 10^{-6}$ | $1,4 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $5,7 \cdot 10^{-2}$ | $3,9 \cdot 10^{-2}$ | $2,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,5 \cdot 10^{-2}$ | $7,4 \cdot 10^{-3}$ | $3,7 \cdot 10^{-3}$ | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $7,4 \cdot 10^{-4}$ |
| | TE | $4,8 \cdot 10^{-3}$ | $1,6 \cdot 10^{-3}$ | $3,3 \cdot 10^{-4}$ | $9,7 \cdot 10^{-5}$ | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | $1,6 \cdot 10^{-6}$ | $1,4 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $5,7 \cdot 10^{-2}$ | $3,9 \cdot 10^{-2}$ | $2,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,5 \cdot 10^{-2}$ | $7,4 \cdot 10^{-3}$ | $3,7 \cdot 10^{-3}$ | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $7,4 \cdot 10^{-4}$ |
| 5 | TE | $3,9 \cdot 10^{-3}$ | $1,3 \cdot 10^{-3}$ | $2,7 \cdot 10^{-4}$ | $7,9 \cdot 10^{-5}$ | $9,9 \cdot 10^{-6}$ | $1,2 \cdot 10^{-6}$ | $< 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $4,7 \cdot 10^{-2}$ | $3,2 \cdot 10^{-2}$ | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | $1,2 \cdot 10^{-2}$ | $6,1 \cdot 10^{-3}$ | $3,0 \cdot 10^{-3}$ | $1,2 \cdot 10^{-3}$ | $6,1 \cdot 10^{-4}$ |
| | TE | $4,0 \cdot 10^{-3}$ | $1,4 \cdot 10^{-3}$ | $2,8 \cdot 10^{-4}$ | $8,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-6}$ | $1,3 \cdot 10^{-6}$ | $< 10^{-7}$ |
| | TM | $4,6 \cdot 10^{-2}$ | $3,1 \cdot 10^{-2}$ | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | $1,3 \cdot 10^{-2}$ | $6,0 \cdot 10^{-3}$ | $3,0 \cdot 10^{-3}$ | $1,2 \cdot 10^{-3}$ | $6,0 \cdot 10^{-4}$ |

| | | | | | | | | | |
|----|----|---|---|---|---|---|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 6 | TE | $\frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{3,9 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,1 \cdot 10^{-3}}{2,7 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{2,3 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{6,7 \cdot 10^{-5}}{1,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{7,4 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{2,6 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{1,0 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{5,1 \cdot 10^{-4}}$ |
| | TM | $\frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,9 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2,6 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{1,5 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{7,0 \cdot 10^{-5}}{1,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{8,9 \cdot 10^{-6}}{5,0 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{1,0 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{5,0 \cdot 10^{-4}}$ |
| 7 | TE | $\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{3,4 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{9,6 \cdot 10^{-4}}{2,3 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{2,0 \cdot 10^{-4}}{1,3 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{5,8 \cdot 10^{-5}}{8,8 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{7,3 \cdot 10^{-6}}{4,4 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{9,2 \cdot 10^{-7}}{2,2 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{8,8 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{4,4 \cdot 10^{-4}}$ |
| | TM | $\frac{3,1 \cdot 10^{-3}}{3,3 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{2,3 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{2,1 \cdot 10^{-4}}{1,3 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{6,1 \cdot 10^{-5}}{8,7 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{7,7 \cdot 10^{-6}}{4,3 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{9,9 \cdot 10^{-7}}{2,2 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{8,7 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{4,3 \cdot 10^{-4}}$ |
| 8 | TE | $\frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{3,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{8,5 \cdot 10^{-4}}{2,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,7 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{5,1 \cdot 10^{-5}}{7,8 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{6,4 \cdot 10^{-6}}{3,9 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{8,3 \cdot 10^{-7}}{2,0 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{7,7 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,9 \cdot 10^{-4}}$ |
| | TM | $\frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{2,9 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{8,9 \cdot 10^{-4}}{2,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,8 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{5,4 \cdot 10^{-5}}{7,7 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{6,7 \cdot 10^{-6}}{3,8 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{8,3 \cdot 10^{-7}}{1,9 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{7,6 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,8 \cdot 10^{-4}}$ |
| 9 | TE | $\frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{2,7 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{7,7 \cdot 10^{-4}}{1,8 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,6 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{4,6 \cdot 10^{-5}}{6,9 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{5,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{7,4 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{6,9 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$ |
| | TM | $\frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{2,6 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{8,0 \cdot 10^{-4}}{1,8 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,6 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{4,8 \cdot 10^{-5}}{6,8 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{6,0 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{7,5 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{6,8 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$ |
| 10 | TE | $\frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{2,4 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{7,0 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,4 \cdot 10^{-4}}{9,5 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{4,1 \cdot 10^{-5}}{6,3 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{5,2 \cdot 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{6,7 \cdot 10^{-7}}{1,6 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{6,2 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,1 \cdot 10^{-4}}$ |
| | TM | $\frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{2,4 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{7,2 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-2}}$ | $\frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{9,3 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{4,3 \cdot 10^{-5}}{6,2 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{5,4 \cdot 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{6,9 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-3}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{6,1 \cdot 10^{-4}}$ | $\frac{< 10^{-7}}{3,1 \cdot 10^{-4}}$ |

ЛИТЕРАТУРА

1. Содха М. С., Гхатак А. К. Неоднородные оптические волноводы. — М.: Связь, 1980.
2. Snitzer E. — J. Opt. Soc. Am., 1961, 51, № 5, p. 491.
3. Snayder A. W. — IEEE, 1969, МТТ-17, p. 1130.
4. Biernsон G., Kinsley D. J. — IEEE, 1965, МТТ-13, p. 345.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
3 мая 1984 г.

УДК 538.574.32

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА ПРИ МГНОВЕННОМ ИЗМЕНЕНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СРЕДЫ

В. В. Колесов

Источник электромагнитного поля, помещенный в среду со свойствами, меняющимися во времени, может испускать электромагнитное излучение. Впервые такое излучение было рассмотрено в [1]. В дальнейшем был решен ряд подобных задач, соответствующих различным вариантам изменения диэлектрических свойств среды во времени. Среда с меняющимися магнитными свойствами при этом не рассматривались.

Ниже предлагается решение задачи об излучении равномерно движущегося точечного электрического заряда в среде, материальные уравнения которой имеют вид

$$D = \epsilon_1 E, \quad B = \mu_1 H \quad (t < 0), \quad D = \epsilon_2 E, \quad B = \mu_2 H \quad (t > 0) \quad (1)$$

(моменту времени $t=0$ соответствует скачкообразное изменение свойств среды).

Для решения задачи целесообразно использовать метод, предложенный в [1]. Находя поле излучения с помощью условий шивки на временном скачке (впервые рассмотренных в [2]), можно вычислить спектральное и угловое распределение интенсивности излучения:

$$W(\omega, \theta) d\omega d\theta = q^2 v^2 \sin^3 \theta (2\pi c^3)^{-1} \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \left[\mu_1 - \mu_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu_1 \mu_2 \frac{v_2}{c^2} \cos^2 \theta + (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{v}{c} \cos \theta \right]^2 (1 - v^2 c^{-2} \epsilon_1 \mu_1 \cos^2 \theta)^{-2} (1 - v^2 c^{-2} \epsilon_2 \mu_2 \cos^2 \theta)^{-2} d\omega d\theta, \quad (2)$$

где θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и вектором скорости частицы \mathbf{v} , q — заряд частицы.

Отметим, что интенсивность излучения обращается в нуль не только при $\theta=0, \pi$, но и при некоторых других углах, осуществляющих нули функции, взятой в (2) в квадратные скобки. Природу этого явления можно понять, рассматривая возникающее излучение как результат интерференции двух излучений, формирующихся за счет изменения ϵ и μ .

В случае, когда свойства среды мало отличаются от свойств вакуума, а именно, когда $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1 + \Delta\epsilon$, $\mu_2 = 1 + \Delta\mu$, причем $\Delta\epsilon \ll 1$, $\Delta\mu \ll 1$, (2) принимает вид

$$W(\omega, \theta) d\omega d\theta = \frac{q^2 v^2 \sin^3 \theta}{2\pi c^3} \frac{(\Delta\mu + \Delta\epsilon v c^{-1} \cos \theta)^2 d\omega d\theta}{(1 - v^2 c^{-2} \epsilon_2 \mu_2 \cos^2 \theta)^2 (1 - v c^{-1} \cos \theta)^2}. \quad (3)$$

Интересно, что в рассматриваемой задаче излучение возникает и в том случае, когда показатель преломления среды не меняется: $\epsilon_1 \mu_1 = \epsilon_2 \mu_2 = n^2$. При этом интенсивность излучения

$$W(\omega, \theta) d\omega d\theta = \frac{q^2 v^2}{2\pi c^3} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (\mu_2 - \mu_1)^2 \frac{\sin^3 \theta d\omega d\theta}{(1 - v^2 c^{-2} n^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (4)$$

Последнее выражение несложно проинтегрировать по углам:

$$W(\omega) d\omega = \frac{q^2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{2\pi c n^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \left(\frac{v^2 c^{-2} n^2 + 1}{2v c^{-1} n} \ln \frac{1 + v c^{-1} n}{1 - v c^{-1} n} - 1 \right) d\omega. \quad (5)$$