3. Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х. Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E_s на различных широтах. — М.: Наука, 1976.
4. Ossakow S. L., Papadopoulos K., Orens J., Coffey T. — J. Geophys. Res., 1975, 80, № 1, p. 141.
5. Behnke R. A., Vickrey J. F. — Radio Sci., 1975, 10, № 3, p. 325.
6. Goldberg R. A. — Radio Sci., 1975, 10, № 3, p. 329.
7. Schmidt M. J., Gary S. P. — J. Geophys. Res., 1973, 78, p. 8261.
8. Волосевич А. В., Липеровский В. А. В кн.: Высокоширотные проявления магнитосферных процессов. — Л: Наука, 1979, с. 39.

Институт космофизических исследований и аэрономии Якутского филиала СО АН СССР

Поступила в редакцию 28 февраля 1984 г.

УДК 538.566.2

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

Б. Е. Немцов

В работе исследовано резонансное взаимодействие ленгмюровских волн с электронами распадающейся плазмы. Показано, что даже в случае равновесной по скоростям (максвелловской) плазмы и достаточно медленном уменьшении концентрации ($\nu \ll \omega_0$, ν — частота столкновений, ω_0 — ленгмюровская частота) возможен эффект изменения знака декремента затухания Ландау [1].

Для исследования указанного эффекта исходим из кинетического уравнения для неравновесной части функции распределения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + iku f_1 + \left(\frac{e}{m}\right) E \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right) = -\nu_0 f_1. \tag{1}$$

Здесь ν_0 — эффективная частота столкновений, и считается, что f_1, E зависят от координат, как e^{ikz} (этот множитель в дальнейшем опускаем), $f_0 = (N_0 e^{-\nu_0 t}/\sqrt{2\pi}\, v_T) \times \exp(-u^2/2v_T^2)$ — равновесная функция распределения с уменьшающимся числом частиц $N(t) = N_0 e^{-\nu t}$. Из уравнения (1) выражаем f_1 как функцию электрического поля E:

$$f_1 = \frac{e}{m\sqrt{2\pi}\, v_T^3} \int\limits_{-\infty}^{t} u \exp(-u^2/2v_T^2)\, N(t')\, E(t') \exp[(iku + \nu_0)(t' - t)]\, dt'. \tag{2}$$

Добавка f_1 определяет плотность заряда $\rho = e\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1 du$ в уравнении поля

$$ikE = 4\pi e \int f_1 dv. \tag{3}$$

Вычислим плотность заряда ρ. После интегрирования по скорости приходим к следующему выражению для ρ:

$$\rho = \frac{ie^2 k}{m} \int\limits_{-\infty}^{t} N(t')\, E(t')\, (t' - t) \exp\left\{\nu_0 (t' - t) - \frac{1}{2} k^2 v_T^2 (t' - t)^2\right\} dt'. \tag{4}$$

Подставляя ρ из формулы (4) в уравнение поля (3), получаем следующее интегральное уравнение:

$$E\exp(\nu_0 t) + \int\limits_{-\infty}^{t} (t - t') E(t') \exp(\nu_0 t')\, \omega_0^2(t') \exp\left\{-\frac{1}{2} k^2 v_T^2 (t - t')^2\right\} dt' = 0. \tag{5}$$

Здесь $\omega_0(t') = \sqrt{4\pi e^2 N(t')/m}$ — ленгмюровская частота распадающейся плазмы.

Продифференцируем дважды по времени уравнение (5):

$$[E(t)\exp(\nu_0 t)]_{tt} + \omega_p^2(t)\, [E(t)\exp(\nu_0 t)] = k^4 v_T^4 \int\limits_{-\infty}^{t} (t' - t)^3\, \omega_0^2(0)\, E(t') \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}k^2 v_T^2 (t'-t)^2\right\} dt', \tag{6}$$

где $\omega_p(t) = \sqrt{\omega_0^2(t) + 3k^2 v_T^2}$ — мгновенная частота плазменной волны. При получении уравнения (6) использовалось приближение слабой пространственной дисперсии, но не накладывалось никаких ограничений на быстроту изменения $N(t)$. В частности, наряду с медленными изменениями $|d\omega_0/dt\omega_0| \ll \omega_0$, $N(t)$ может изменяться весьма быстро $|d\omega_0/dt\omega_0| \gtrsim \omega_0(t)$. В дальнейшем, однако, будем считать концентрацию медленной функцией времени. В приближении слабой пространственной дисперсии правая часть уравнения (6) описывает экспоненциально малое затухание плазменных волн, и в первом приближении ею можно пренебречь. Уравнение, описывающее динамику ленгмюровской волны в первом приближении,

$$[E\exp(\nu_0 t)]_{tt} + \omega_p^2(t)[E\exp(\nu_0 t)] = 0\,, \tag{7}$$

следует дополнить начальными условиями. Будем предполагать, что

$$E(t<0)=0,\quad E(t=0)=A,\quad E'_t(t=0)=i\omega_p(0)A\,. \tag{8}$$

Разумеется, начальные условия для $E(t=0)$, E'_t $(t=0)$ могут быть выбраны произвольно. В общем случае решение в ВКБ приближении будет представлять собой суперпозицию встречных волн. Однако для выяснения вопроса о резонансном взаимодействии волн и частиц достаточно ограничиться рассмотрением одной бегущей волны, выбрав начальные условия в форме (8).

Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям (8), имеет вид

$$E\exp(\nu_0 t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ A\sqrt{\dfrac{\omega_p(0)}{\omega_p(t)}}\exp\left\{i\displaystyle\int_0^t \omega_p(t')\,dt'\right\}, & t\geqslant 0\end{cases}. \tag{9}$$

Формула (9) описывает динамику плазменной волны в слабонестационарной среде без учета взаимодействия волн и частиц. Для выяснения вопроса о бесстолкновительном затухании продольной волны необходимо учесть правую часть уравнения (6). Будем искать решение уравнения (6) в виде (9), предполагая, что $A(t)$ медленно изменяется во времени. Уравнение для A принимает вид

$$A'_t(t) = \frac{k^4 v_T^4}{2i}\int_0^t (t'-t)^3 \frac{\omega_p^{3/2}(t')}{\omega_p^{1/2}(t)}\times$$

$$\times \exp\left\{i\int_t^{t'} \omega_p(t'')\,dt'' - \frac{1}{2}k^2 v_T^2 (t'-t)^2\right\} A(t')\,dt'. \tag{10}$$

Как будет видно из дальнейшего, функция $A(t')$ мало изменяется на масштабе спадания подынтегрального выражения $(kv_T)^{-1}$, поэтому ее можно вынести из-под знака интеграла (10). В результате для локального «декремента» Ландау получаем

$$\gamma(t) = \mathrm{Re}\,\frac{A'_t(t)}{A(t)} = \mathrm{Re}\,\frac{(kv_T)^4}{2i}\int_0^t (t'-t)^3 \frac{\omega_p^{3/2}(t')}{\omega_p^{1/2}(t)}\times$$

$$\times \exp\left\{i\int_t^{t'} \omega_p(t'')\,dt'' - \frac{1}{2}k^2 v_T^2 (t'-t)^2\right\} dt'. \tag{11}$$

В дальнейшем будем считать выполненными неравенства

$$|\omega'_{0t}| \ll k^2 v_T^2,\quad t \gg 1/kv_T. \tag{12}$$

При выполнении неравенств (12)

$$\int_t^{t'} \omega_p(t'')\,dt'' = \omega_p(t)(t'-t) + \frac{1}{2}\,\omega'_{pt}(t)(t'-t)^2$$

и $\gamma(t)$ приобретает вид

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} k^4 v_T^4 \omega_p(t) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha\partial\omega_p}\right),$$
$$J = \int_0^\infty \exp\left(-i\omega_p\tau + \frac{i}{2}\omega_p'\tau^2 - \alpha\tau^2\right)d\tau, \qquad \alpha = \frac{1}{2}k^2 v_T^2. \tag{13}$$

Интеграл J представим в виде двух слагаемых

$$\operatorname{Re} J = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega_p\tau + \frac{i}{2}\omega_p'\tau^2 - \alpha\tau^2\right)d\tau +$$
$$+ \int_0^\infty \sin\frac{\omega_{pt}'\tau^2}{2}\sin\omega_p\tau\exp(-\alpha\tau^2)\,d\tau, \tag{14}$$

первое из которых выражается через элементарные функции, а второе — через интеграл вероятности. В условиях слабой пространственной дисперсии $(\omega_p(t)/kv_T \gg 1)$ несложные вычисления дают следующее выражение для локального декремента затухания плазменной волны

$$\gamma(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_p^4(t)}{k^3v_T^3}\exp\left(-\frac{\omega_p^2(t)}{2k^2v_T^2}\right)\cos\frac{\omega_p'\omega_p^2(t)}{2k^4v_T^4} + \frac{30\,\omega_{pt}'k^4v_T^4}{\omega_p^5(t)}. \tag{15}$$

Второе слагаемое определяет малую добавку в амплитуду поля (9) и может быть опущено. Первое слагаемое в (15) обусловлено кинетическими эффектами обмена энергией волны с резонансными частицами нестационарной плазмы Важно отметить, что аргумент косинуса в (15) представляет собой произведение большого $\omega_p^2/k^2v_T^2 \gg 1$ и малого $|\omega_{pt}/k^2v_T^2| \ll 1$ параметров и, следовательно, с течением времени может принимать любые значения.

Если $|\omega_p^2\omega_{pt}'/k^4v_T^4| \ll 1$, то из (15) следует квазистационарный декремент Ландау. В обратном случае $|\omega_p^2\omega_{pt}'/k^4v_T^4| \gg 1$ динамика плазменной волны качественно иная, что проявляется в возможности временных осцилляций и смены знака «декремента» Ландау.

Изменение амплитуды волны за счет кинетических эффектов определяется интегралом:

$$g(t) = \int\gamma(t)\,dt = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_p^2}{kv_T\nu_0}\exp\left(-\frac{\omega_p^2}{2k^2v_T^2}\right)\cos\frac{\nu_0\omega_p^3(t)}{4k^4v_T^4}, \qquad \nu_0 t \gg 1, \tag{16}$$

откуда видно, что осциллирующий характер $\gamma(t)$ может привести к неуменьшению амплитуды поля плазменной волны вследствие резонансного взаимодействия с частицами.

Интересно отметить, что динамика плазменной волны может быть описана уравнением осциллятора со сдвигом в аргументе диссипативного члена. Действительно, подставляя решение «холодного» приближения (9) в правую часть уравнения (6), после ряда преобразований получим

$$k^4v_T^4\int_0^t (t'-t)^3\omega_0^2(t')E\exp(\nu_0 t') \times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}k^2v_T^2(t'-t)^2\right\}dt' = -2\gamma_Л(t)A(t)\frac{\omega_p^{1/2}(0)}{\omega_p^{1/2}(t)}\times$$
$$\times\frac{d}{dt}\exp\left\{i\int_0^t\omega_p(t'')\,dt'' - i\frac{\omega_{pt}'(t)\omega_p^2(t)}{2k^4v_T^4}\right\}. \tag{17}$$

Здесь $\gamma_Л(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_p^4(t)}{k^3v_T^3}\exp\left(-\frac{\omega_p^2(t)}{2k^2v_T^2}\right)$ — квазистационарный декремент Ландау.

Учитывая, что (17) определяет малый декремент затухания ленгмюровской волны, его можно преобразовать к виду $-2\gamma_Л (d/dt)E(t-\tau)$, где $\tau=|\omega_p' \omega_p/2k^4 v_T^4|$ и уравнение для поля ленгмюровской волны принимает вид

$$[E \exp(\nu_0 t)]_{tt} + 2\gamma_Л(t)[E(t-\tau)\exp(\nu_0(t-\tau))]_t + \omega_p^2(t)[E\exp(\nu_0 t)]=0. \qquad (18)$$

Нетрудно видеть, что решение уравнения (18) содержит осциллирующий со временем декремент затухания плазменной волны (см. (15)).

Автор благодарит Е. В. Суворова за ряд полезных замечаний по содержанию работы и В. В. Курина за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. — ЖЭТФ, 1946, **16**, с. 574.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 октября 1983 г.

УДК 621.327.8.001.24

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ОПТИЧЕСКИХ СВЕТОВОДАХ

Д. В. Кизеветтер, В. И. Малюгин

Известно, что в волноводах могут распространяться лишь некоторые типы волн — моды с определенной постоянной распространения, которая фактически задает конфигурацию электромагнитного поля в волноводе. Вычисление собственных чисел точного характеристического уравнения требует решения сложного трансцендентного уравнения Если число распространяющихся мод велико (более 10^3), то вычисление массива собственных чисел требует больших затрат машинного времени, что делает некоторые задачи практически неразрешимыми. Поэтому во многих случаях удобно пользоваться асимптотическими приближениями.

Асимптотические выражения для вычисления собственных чисел волн в цилиндрических диэлектрических волноводах со ступенчатым профилем показателя преломления приводятся, например, в [1–4]. Однако известные асимптотические формулы не учитывают зависимость от приведенной частоты, а собственные числа поперечных электрических (TE) и поперечных магнитных (TM) мод оказываются вырожденными, поэтому информация о фазах распространяющихся волн и, следовательно, об изменении поляризации распространяющегося излучения оказывается утерянной.

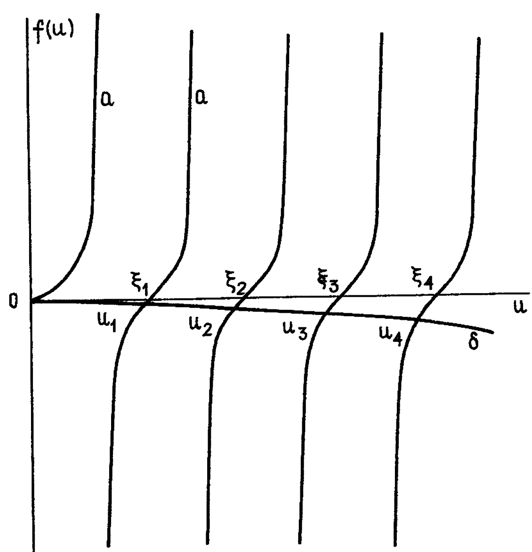

Рис. 1. Графическое решение характеристического уравнения (1) при $v=20$. *а* —функция $J_1(u)/J_0(u)$, *б*—функция—$uK_1(w)/wK_0(w)$. График функции — $uK_1(w)\,n_2^2/(wK_0(w)\,n_1^2)$ практически совпадает с графиком *б* и на рисунке не приводится.

Распространение электромагнитных волн в волноводе описывается волновым уравнением. Граничным условием является условие непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхности раздела двух сред; для выполнения этого условия необходимо, чтобы собственные числа удовлетворяли уравнению [1, 4]

$$\frac{1}{u}\frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w}\frac{K_1(w)}{K_0(w)} \quad \text{для } TE_{0j} \qquad (1)$$