

лучей\* успеет дефокусироваться и стать расходящимся. Ясно, что разбегание близких траекторий может происходить только в том случае, когда  $\tau_0$ , в течение которого пучок является сходящимся, меньше времени  $\tau_p$ , в течение которого он является расходящимся. Наиболее интересный класс примеров, для которых ситуация оказывается именно такой, представляют собой области, имеющие две стенки, являющиеся дугами окружностей, которые соединены между собой двумя прямолинейными стенками. Самый популярный пример «стадион» — область, граница которой состоит из двух полуокружностей и двух касательных к ним отрезков.

Рассмотрим малое возмущение какой-нибудь фокусирующей компоненты  $\Gamma$  границы  $\partial Q$ . При этом ее кривизна станет медленно меняющейся функцией. Пусть на  $\Gamma$  падает параллельный пучок лучей и испытывает серию идущих подряд отражений от  $\Gamma$ . Тогда [6, 6] имеют место соотношения  $\chi_+^{(n)} = \chi_-^{(n)} - 2k_n/\cos \varphi_n$ ,  $\chi_-^{(n+1)} = 1/(\tau_n - 1/\chi_+^{(n)})$ , где  $\chi_+^{(n)}$ ,  $\chi_-^{(n)}$  — кривизна рассматриваемого пучка в момент перед (после) отражением от  $\Gamma$ ,  $\tau_n$  — время между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м отражениями,  $k_n$  и  $\varphi_n$  — кривизна  $\Gamma$  в точке  $n$ -го отражения и соответствующий угол падения. При этом  $\chi_+^{(n)} = \tau_{nc}^{-1}$ ,  $\chi_-^{(n+1)} = \tau_{np}^{-1}$ ,  $\tau_{nc} + \tau_{np} = \tau_n$ , где  $\tau_{nc}(\tau_{np})$  — время, в течение которого пучок между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м отражениями был сходящимся (расходящимся). Если данная серия состоит из  $N$  отражений, то  $\tau_n$  при всех  $2 \leq n \leq N$  имеет порядок  $N^{-1}$ . Согласно [6]  $\tau_{np} - \tau_{nc} \sim N^{-2}$ . Отсюда вытекает, что если возмущение кривизны  $\Gamma$  достаточно мало, то неравенство  $\tau_{np} \geq \tau_{nc}$  будет, по-прежнему, выполняться для любой серии последовательных отражений от  $\Gamma$ . Поэтому рассматриваемый механизм стохастичности может работать и в этом случае. Однако, величина допустимого возмущения кривизны фокусирующих компонент границы зависит от формы всей области. В частности, для «стадиона» с фокусирующими компонентами непостоянной кривизны длина прямолинейных участков границы  $\partial Q$  уже не может быть как угодно малой. Другое ограничение состоит в том, что угол поворота касательной к фокусирующей компоненте  $\partial Q$  с непостоянной кривизной при переходе от одного ее конца к другому не должен превосходить  $\pi$ . В противном случае у бильярда в  $Q$  могут возникнуть устойчивые периодические траектории. Пример — малая полусфера эллипса. При соблюдении указанных условий бильярд в  $Q$  является премешивающим, т. е. свойство стохастичности не нарушается при малых возмущениях фокусирующих компонент границы.

В заключение отметим, что стохастической оказывается динамика лучей и в некоторых волноводах (например, в получающемся из «стадиона» с помощью отражений относительно прямолинейных участков его границы).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лазуткин В. Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. — Л: Гос. ун-т, 1981, с. 196.
2. Шнирельман А. И. — УМН, 1974, 29, № 6, с. 181.
3. Синай Я. Г. — УМН, 1970, 25, № 2, с. 181.
4. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. — Математический сб., 1973, 90, № 3, с. 415.
5. Бунимович Л. А. — Функциональный анализ, 1974, 8, № 3, с. 73.
6. Bunimovich L. A. — Commun. Math. Phys., 1979, 65, № 2, p. 295.

Институт океанологии  
АН СССР

Поступила в редакцию  
24 апреля 1985 г.

УДК 621.396.671

## СИНТЕЗ АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ И ФУНКЦИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ЧАСТИ АПЕРТУРЫ

*В. И. Короченцев, Б. А. Сальников*

Во многих практических задачах необходимо накладывать ограничения на функцию возбуждения или электрические характеристики экранов, в которых расположены антенны. В ряде работ по теории радиолокационных антенн довольно подробно исследованы задачи синтеза при ограничениях на модуль и фазу заданных диаграмм направленности или функции возбуждения. Такие задачи относятся к смешанным задачам синтеза антенн [1].

\* Мы рассматриваем всюду только локальные (узкие) пучки лучей.

В настоящей работе исследуется задача синтеза, когда заданы в общем случае комплексная диаграмма направленности  $R(\varphi, \theta) \in L_2$  и комплексная функция возбуждения  $I^{(1)}(S)$  на части антенного раскрыва  $S \in S_1$ . Требуется определить комплексную функцию возбуждения  $I^{(2)}(S)$  на остальных участках антенного раскрыва.

Практическая необходимость в таких задачах возникает в том случае, когда функция возбуждения на части поверхности антенны задана и не подлежит изменению в зависимости от требуемой диаграммы направленности. В этом случае искомая, в соответствии с заданной диаграммой направленности, функция  $I^{(2)}(S)$ ,  $S \in S_2$  является как бы корректирующей.

К данной постановке сводится широкий круг задач синтеза импедансных конформных антенн, когда заданными являются диаграмма направленности, функция возбуждения первичных источников и место расположения пассивного импедансного экрана, функция изменения импеданса которого требует своего определения в соответствии с заданной диаграммой направленности. В этом случае искомая функция  $I^{(2)}S$  является наведенным на импедансный экран током [2].

Аналогично [3] рассмотрим случай цилиндрической антенны, поле которой не зависит от координаты  $z$  (координата  $z$  является осью антенны волнового радиуса  $ka$ ). Задана в общем случае комплексная диаграмма направленности  $R(\varphi)$ , излучающая поверхность  $\varphi_0 \in [-\pi; \pi]$ , расположенная в круговом цилиндрическом экране радиуса  $a$ , и комплексная функция возбуждения тока  $I_z^{(1)}(a, \varphi_0)$ ,  $\varphi_0 \in [\varphi_1]$ . Требуется определить функцию возбуждения  $I_z^{(2)}(a, \varphi_0)$ ,  $\varphi_0 \in [\varphi_2]$  (причем  $[\varphi_1] + [\varphi_2] = [-\pi; \pi]$ ), которая вместе с  $I_z^{(1)}(a, \varphi_0)$  формирует заданную диаграмму направленности с минимально возможной среднеквадратичной ошибкой  $\delta^2$ .

Пусть на поверхности антенны выполняются граничные условия вида

$$I_z(a, \varphi_0) = H_\varphi(a, \varphi_0) = (1/i\omega\mu_0)(\partial E_z/\partial r)|_{r=a}, \quad \varphi_0 \in [\varphi_1] + [\varphi_2],$$

где  $I_z(a, \varphi_0)$  — распределение тока на поверхности антенны,  $H_\varphi(a, \varphi)$  — напряженность магнитного поля на поверхности антенны,  $\omega$  — круговая частота,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость среды,  $E_z(r, \varphi)$  — напряженность электрического поля, остальные составляющие электрического поля  $E_r(r, \varphi) = E_\varphi(r, \varphi) = 0$ ,  $\varphi_0$  — координата, принадлежащая поверхности антенны. Тогда согласно [4] ненормированная диаграмма направленности антенны определится выражением

$$R(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \exp(in\varphi) [2\pi H_n^{(1)'}(ka)]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} I_z(a, \varphi_0) \exp(-in\varphi_0) d\varphi_0, \quad (1)$$

где

$$I_z(a, \varphi_0) = \begin{cases} I_z^{(1)}(a, \varphi_0), & \varphi_0 \in [\varphi_1] \\ I_z^{(2)}(a, \varphi_0), & \varphi_0 \in [\varphi_2] \end{cases}, \quad (2)$$

$I_z^{(1)}(a, \varphi_0)$  — заданная функция возбуждения тока

$$I_z^{(1)}(a, \varphi_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(in\varphi_0), \quad b_n = (1/2\pi) \int_{[\varphi_1]} I_z^{(1)}(a, \varphi_0) \exp(-in\varphi_0) d\varphi_0,$$

$I_z^{(2)}(a, \varphi_0)$  — требует своего определения в соответствии с заданными условиями.

Для решения поставленной задачи воспользуемся аппроксимационным методом, суть которого изложена в [3]. С этой целью в левую часть (1) подставим аппроксимированную диаграмму направленности

$$R^*(\varphi) = \sum_{n=-N}^N A_n^* \exp(in\varphi), \quad (3)$$

где

$$A_n^* = A_n/\alpha \left| H_n^{(1)'}(ka) \right|, \quad A_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} R(\varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi,$$

$R(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(in\varphi)$  — заданная диаграмма направленности.

Константа  $\alpha$  и количество суммируемых гармоник  $N$  выбираются из условия минимальности среднеквадратичной погрешности аппроксимации заданной диаграммы направленности  $R(\varphi)$  диаграммой  $R^*(\varphi)$  (3), в соответствии с волновым радиусом антенны  $ka$

$$\delta_1^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |R(\varphi)|^2 d\varphi - \sum_{n=-N}^N |A_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |A_n - A_n^*|^2. \quad (4)$$

Согласно рекомендациям [4]  $N \gg [2ka]$ , в данной работе количество суммируемых гармоник выбрали равным  $[4ka]$ , так как дальнейшее увеличение  $N$  практически не привело к уменьшению среднеквадратичной погрешности  $\delta_{\perp}^2(4)$  при данном методе аппроксимации  $R(\varphi)$ .

Неизвестную функцию  $I_z^{(2)}(a, \varphi_0)$  будем искать в виде

$$I_z^{(2)}(a, \varphi_0) = \begin{cases} \sum_{m=-M}^M a_m \exp(in\varphi), & \varphi_0 \in [\varphi_2] \\ 0, & \varphi_0 \in [\varphi_2] \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя (3), (5) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(in\varphi)$ , после несложных преобразований окончательно имеем

$$A_n \alpha^{-1} \exp[i \arg H_n^{(1)'}(ka)] - b_n = (1/2\pi) \sum_{m=-M}^M a_m \int_{[\varphi_2]} \exp[i(m-n)\varphi_0] d\varphi_0. \quad (6)$$

Таким образом задача определения неизвестной функции  $I_z^{(2)}(a, \varphi_0)$  в области  $\varphi_0 \in [\varphi_2]$  сводится к решению  $2N+1=2M+1$  алгебраических уравнений относительно неизвестных гармоник  $a_m$ .

Суммарная функция возбуждения  $I_z(a, \varphi_0)$  (2) поверхности антенны, формирующая реализуемую диаграмму направленности  $R^*(\varphi_0)$  (3), запишется в виде

$$I_z(a, \varphi_0) = \sum_{n=-N}^N \left\langle (1/2\pi) \sum_{m=-M}^M a_m \int_{[\varphi_2]} \exp[i(m-n)\varphi_0] d\varphi_0 + b_n \right\rangle \exp(in\varphi_0), \quad (7)$$

где  $b_n$  — гармоники Фурье заданной функции возбуждения  $I_z^{(1)}(a, \varphi_0)$ .

Среднеквадратичная погрешность смешанной задачи синтеза в этом случае определится суммой погрешности аппроксимации  $\delta_1^2(4)$  и погрешности решения системы (6), последнюю можно сделать сколь угодно малой.

Следует отметить, что предлагаемый аппроксимационный метод решения смешанных задач можно использовать для определения функции возбуждения тока

$I_z^{(2)}(a, \varphi_0)$ , если заданы лишь диаграмма направленности  $R(\varphi)$  и геометрия расположения излучающих участков антенной решетки  $\varphi_0 \in [\varphi_2]$  на цилиндрическом экране. В этом случае система алгебраических уравнений запишется в виде

$$A_n \alpha^{-1} i^n \exp[i \arg H_n^{(1)'}(ka)] = (1/2\pi) \sum_{m=-M}^M a_m \int_{[\varphi_2]} \exp[i(m-n)\varphi_0] d\varphi_0,$$

а искомая функция возбуждения

$$I_z^{(2)}(a, \varphi_0) = (1/2\pi) \sum_{n=-N}^N \left\{ a_m \int_{[\varphi_2]} \exp[i(m-n)\varphi_0] d\varphi_0 \right\} \exp(in\varphi_0). \quad (8)$$

В качестве примера, иллюстрирующего предложенный метод синтеза цилиндрических антенн, были рассчитаны функции возбуждения антенн волнового радиуса  $ka=10$ , формирующие диаграмму направленности вида

$$R(\varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| \leq \pi/6 \\ 0, & |\varphi| > \pi/6 \end{cases}$$

Заданная и аппроксимированная выражением (3) диаграммы изображены на рис. 1, соответственно кривые 1, 2.



Рис. 1.

Функция возбуждения (8) антенной решетки, расположенной в цилиндрическом экране, с координатами центра каждого излучателя

$$r=a, \varphi_q=q \cdot \pi/9, q=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$$

и угловой длины каждого элемента решетки  $\pi/18$ , изображена на рис. 2, диаграмма направленности — на рис. 1 (кривая 3).

Решение смешанной задачи синтеза для

$$I_z^{(1)}(\alpha, \varphi_0) = \begin{cases} \text{const} & , \varphi_0 \in [-\pi/6; \pi/6] \\ 0 & , \varphi_0 \in [-\pi/6; \pi/6] \end{cases}$$

$$[\varphi_2] = [-13\pi/18; -10\pi/18] + [-8\pi/18; -5\pi/18] + [5\pi/18; 8\pi/18] + [10\pi/18; 13\pi/18]$$

изображено на рис. 3, диаграмма направленности — на рис. 1 (кривая 4). На рис. 2, 3 изображены нормированные функции возбуждения.

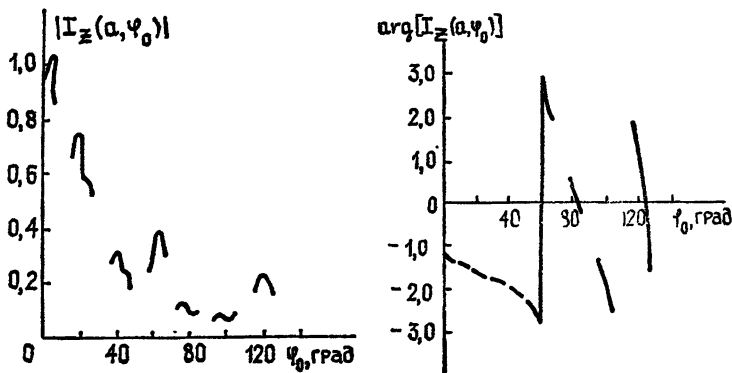


Рис. 2.

Для рассмотренной смешанной задачи при  $ka=10$  и  $N=40$  суммарная среднеквадратичная погрешность решения составила 10%.

Кроме рассмотренных выше случаев синтеза данным методом можно решать задачи анализа антенн, расположенных в импедансных экранах при заданных ограничениях на функцию возбуждения.

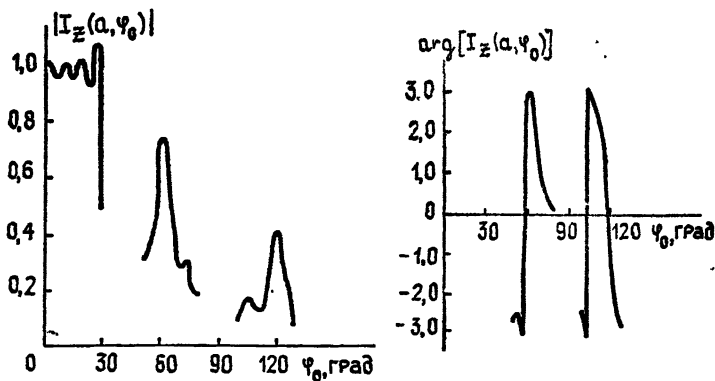


Рис. 3.

В заключение следует отметить, что разработанный метод, в отличие от известных, может быть успешно применен для широкого круга задач математической физики, которые сводятся к решению интегральных уравнений, ядром которого является функция, представленная в виде ряда Фурье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем. — М.: Сов. радио, 1974.
2. Терешин О. Н., Седов В. М., Чаплин А. Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. — М.: Связь, 1980.
3. Короченцев В. И., Сальников Б. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 9, с. 1179.
4. Марков Г. Т., Петров В. М., Грудинская Г. П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979.

Дальневосточный политехнический институт

Поступила в редакцию  
21 января 1985 г.