2) При удалении от центра цилиндра вдоль линии постоянной амплитуды (R=const) степень искажения импульса уменьшается.

3) Для точек наблюдения с заданными угловой координатой и амплитудой импульса с ростом kb степень искажения импульса возрастает.

4) Если $kb \lesssim 30$ и число колебаний несущей $N \gtrsim 120$, то искажения огибающей не превышают 10%.

В заключение отметим, что полученные при помощи численных расчетов условия неискажения импульса согласуются с грубыми оценками условий неискажения импульса в неоднородном плазменном слое толщины b. Такое соответствие указывает на то, что искажение импульса в плазме в основном обусловлено явлением дисперсии, а не дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Б. В., Ярыгин А. П. — В сб.: Рассеяние электромагнитных волн. — Таганрог: ТРТИ, 1983, вып. № 4, с. 40.
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
10 апреля 1985 г.

УДК 517.9

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ЛУЧЕЙ В РЕЗОНАТОРАХ

Л. А. Бунимович

Пусть Q — ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей ∂Q. Рассмотрим в Q биллиардную задачу, т. е. динамическую систему, порожденную равномерным и прямолинейным движением материальной точки внутри Q с условием упругого отражения от ∂Q. Скорость частицы, без ограничения общности, можно считать по модулю равной единице. Ясно, что эта система является гамильтоновой и, тем самым, объем в ее фазовом пространстве инвариантен относительно динамики.

Известно [1], что если Q выпукла и ее граница является достаточно гладкой, то биллиард в Q обладает континуальным семейством каустик, сгущающимся к границе ∂Q. Более того, совокупность траекторий, касающихся этих каустик, имеет положительный объем в фазовом пространстве биллиарда. Отсюда вытекает, в частности, что данная динамическая система не эргодична. С помощью каустики биллиарда в Q можно построить [1] бесконечную серию квазимод для оператора Лапласа в Q (с нулевым граничным условием), локализованных в окрестности этой каустики. С другой стороны [2], если биллиард в Q эргодичен, то собственные функции оператора Лапласа асимптотически (при больших волновых числах) равномерно распределены в Q.

Если граница ∂Q является строго выпуклой внутрь области, то биллиард в Q называется рассеивающим (или биллиардом Синая). В [3, 4] было показано, что биллиарды в таких областях обладают очень сильными стохастическими свойствами. Для «хороших» фазовых функций в рассеивающих биллиардах затухают временные корреляции (т. е. имеет место свойство перемешивания), откуда, в частности, вытекает свойство эргодичности.

Механизм стохастичности в биллиардах Синая является совершенно естественным: если на выпуклую внутрь области стенку падает пучок параллельных лучей, то после отражения от нее этот пучок станет расходящимся и будет отставаться расходящимся (локально)* при всех последующих отражениях от границы. В результате длина фронта этого пучка растет, а при отражениях от границы скачком увеличивается его кривизна. Поэтому узкий вначале пучок траекторий равномерно «размазывается» по всему фазовому пространству рассеивающего биллиарда.

С другой стороны, если граница ∂Q содержит выпуклую во вне Q стенку, то, отражаясь от нее, параллельный пучок фокусируется и становится сходящимся, т. е. траектории в нем не только не разбегаются, но даже имеют тенденцию к сближению. Поэтому ранее считалось, что биллиарды в выпуклых областях не могут быть эргодическими. Однако в [5, 6] было показано, что имеется принципиально другой механизм, приводящий к стохастизации в некоторых классах биллиардов в выпуклых областях. Цель данной работы показать, что этот механизм является грубым, т. е. продолжает работать, если немного возмутить границу области.

Механизм стохастичности биллиардов в областях, имеющих выпуклые вовне стенки, состоит в том, что если достаточно долго подождать, то сходящийся пучок

---

* Если биллиард — рассеивающий, то граница ∂Q имеет особые точки (концы гладких компонент ∂Q). Поэтому особые точки возникают со временем и на фронте рассматриваемого пучка лучей.

лучей* успеет дефокусироваться и стать расходящимся. Ясно, что разбегание близких траекторий может происходить только в том случае, когда τ_c, в течение которого пучок является сходящимся, меньше времени τ_p, в течение которого он является расходящимся. Наиболее интересный класс примеров, для которых ситуация оказывается именно такой, представляют собой области, имеющие две стенки, являющиеся дугами окружностей, которые соединены между собой двумя прямолинейными стенками. Самый популярный пример «стадион» — область, граница которой состоит из двух полуокружностей и двух касательных к ним отрезков.

Рассмотрим малое возмущение какой-нибудь фокусирующей компоненты Г границы ∂Q. При этом ее кривизна станет медленно меняющейся функцией. Пусть на Г падает параллельный пучок лучей и испытывает серию идущих подряд отражений от Г. Тогда [5, 6] имеют место соотношения $\varkappa_{+}^{(n)} = \varkappa_{-}^{(n)} - 2k_n/\cos\varphi_n$, $\varkappa_{-}^{(n+1)} = 1/(\tau_n - 1/\varkappa_{+}^{(n)})$, где $\varkappa_{-}^{(n)}$, $\varkappa_{+}^{(n)}$ — кривизна рассматриваемого пучка в момент перед (после) отражением от Г, τ_n — время между n-м и $(n+1)$-м отражениями, k_n и φ_n — кривизна Г в точке n-го отражения и соответствующий угол падения. При этом $\varkappa_{+}^{(n)} = \tau_{nc}^{-1}$, $\varkappa_{-}^{(n+1)} = \tau_{np}^{-1}$, $\tau_{nc} + \tau_{np} = \tau_n$, где $\tau_{nc}(\tau_{np})$ — время, в течение которого пучок между n-м и $(n+1)$-м отражениями был сходящимся (расходящимся). Если данная серия состоит из N отражений, то τ_n при всех $2 \leqslant n \leqslant N$ имеет порядок N^{-1}. Согласно [6] $\tau_{np} - \tau_{nc} \sim N^{-2}$. Отсюда вытекает, что если возмущение кривизны Г достаточно мало, то неравенство $\tau_{np} \gg \tau_{nc}$ будет, по-прежнему, выполняться для любой серии последовательных отражений от Г. Поэтому рассматриваемый механизм стохастичности может работать и в этом случае. Однако, величина допустимого возмущения кривизны фокусирующих компонент границы зависит от формы всей области. В частности, для «стадиона» с фокусирующими компонентами непостоянной кривизны длина прямолинейных участков границы ∂Q уже не может быть как угодно малой. Другое ограничение состоит в том, что угол поворота касательной к фокусирующей компоненте ∂Q с непостоянной кривизной при переходе от одного ее конца к другому не должен превосходить π. В противном случае у биллиарда в Q могут возникнуть устойчивые периодические траектории. Пример — малая полуось эллипса. При соблюдении указанных условий биллиард в Q является перемешивающим, т. е. свойство стохастичности не нарушается при малых возмущениях фокусирующих компонент границы.

В заключение отметим, что стохастической оказывается динамика лучей и в некоторых волноводах (например, в получающемся из «стадиона» с помощью отражений относительно прямолинейных участков его границы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазуткин В. Ф. Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. — Л: Гос. ун-т, 1981, с. 196.
2. Шнирельман А. И. — УМН, 1974, **29**, № 6, с. 181.
3. Синай Я. Г. — УМН, 1970, **25**, № 2, с. 181.
4. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. — Математический сб., 1973, **90**, № 3, с. 415.
5. Бунимович Л. А. — Функциональный анализ, 1974, **8**, № 3, с. 73.
6. Bunimovich L. A. — Commun. Math. Phys., 1979, **65**, № 2, p. 295.

Институт океанологии
АН СССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1985 г.

УДК 621.396 671

СИНТЕЗ АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ И ФУНКЦИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ЧАСТИ АПЕРТУРЫ

В. И. Короченцев, Б. А. Сальников

Во многих практических задачах необходимо накладывать ограничения на функцию возбуждения или электрические характеристики экранов, в которых расположены антенны. В ряде работ по теории радиолокационных антенн довольно подробно исследованы задачи синтеза при ограничениях на модуль и фазу заданных диаграмм направленности или функции возбуждения. Такие задачи относятся к смешанным задачам синтеза антенн [1].

---

* Мы рассматриваем всюду только локальные (узкие) пучки лучей.