Уравнение (3) вместе с укороченными уравнениями для интенсивности и нелинейного набега фазы, полученными обычным путем (см., например, [4]),

$$W'_\xi = -W/V; \tag{4}$$

$$\varphi'_\xi = (V^2-1)/V^2, \tag{5}$$

граничными и начальными условиями $W(0,\tau)=A(\tau)$, $\varphi(0,\tau)=0$, $V(\xi,-\infty)=1$ представляют собой замкнутую систему уравнений относительно V, W, φ. Система уравнений (3), (4) эквивалентна следующему нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных:

$$2V^3 V''_{\xi\tau} + 4V^2 V'_\xi V'_\tau + 2V^2 V'_\xi + 2V^2 V'_\tau + V^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$2(V-V_0) - \ln[(V+1)(V_0-1)/(V-1)(V_0+1)] + \xi = 0. \tag{7}$$

Здесь V_0 — частота столкновений на границе плазмы $\xi=0$, которая определяется уравнением

$$2V_0^2 V'_{0\tau} + V_0^2 - 1 - \beta A(\tau) = 0. \tag{8}$$

Решение для безразмерной интенсивности имеет вид

$$W = A(\tau)\exp(-\xi)K(V, V_0); \tag{9}$$

$$K(V, V_0) = (V+1)^2 \exp\{-2(V-V_0)\}/(V_0+1)^2, \tag{10}$$

где K — коэффициент самовоздействия, описывающий искажение формы импульса, вызванное нелинейными эффектами. Выражение для нелинейного набега фазы получаем из уравнения (5), подставляя в него полученное решение для частоты столкновений из (7):

$$\varphi = 2(V_0-V). \tag{11}$$

Из (9), (11) видно, что эволюция импульса в плазме определяется только частотой соударений (или, другими словами, температурой) на границе плазмы и длиной трассы.

Рассмотрим подробнее коэффициент самовоздействия $K(V, V_0)$. Можно показать, что он является монотонно убывающей функцией от V на интервале от 1 до V_0. При этом V монотонно убывает вдоль трассы от величины V_0 (при $\xi=0$) до 1 (при $\xi\to\infty$). Следовательно, коэффициент самовоздействия растет вглубь плазмы от значения $K(V_0, V_0)=1$ при $\xi=0$ до $K(V, V_0)>K(V_0, V_0)$ в любой точке ξ в глубине плазмы, т. е. вдоль всей трассы имеет место просветление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
2. Черногор Л. Ф. — Геофизический сборник АН УССР, 1979, вып. 88, с. 50.
3. Гуревич А. В., Шлюгер И. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 9, с. 1237.
4. Кутуков В. Б., Мальковский Д. Г. Тезисы докладов XIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. Ч. 1. — М.: Наука, 1981, с. 292.
5. Пермяков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 1, с. 146.
6. Гуревич А. В., Милих Г. М., Шлюгер И. С. — ЖЭТФ, 1975, 69, вып. 5(11), с. 1640.

Поступила в редакцию
6 мая 1985 г.

УДК 538.574.3

ИСКАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМЕННЫЙ ЦИЛИНДР

В. Б. Авдеев, Г. В. Гринченко, А. П. Ярыгин

Рассмотрим вопрос об искажении импульса волны, прошедшего через плазменное образование (ПО) в виде радиально-неоднородного цилиндра с электронной концентрацией $N(r) \sim 1/r^2$. Интерес к этой задаче обусловлен тремя обстоятельствами. Во-первых, искажения импульса вызваны совместным действием и дифракции и дисперсии в отличие, например, от известного случая только дифракционных искажений при прохождении импульса за металлическое препятствие. Во-вторых, для указанного ПО имеется возможность использовать строгое решение соответствующей задачи дифракции волн [1], что позволяет обеспечить высокую точность и надежность вычислений при спектральном анализе искажений импульса, особенно в резонансных и близких к ней областях электродинамических размеров ПО. И в-третьих, рассматриваемое ПО является приемлемой моделью при изучении плазменных шнуров, метеорных следов и т. д. и, таким образом, вопрос об искажении импульса на таком ПО может позволить интерпретировать радиофизические результаты, получаемые, в частности, при СВЧ диагностике ряда ПО.

Пусть перпендикулярно к оси ПО вдоль оси $\varphi=0$ (r, φ — полярные координаты, см. рис. 1) из бесконечности падает импульс с синусоидальным заполнением и прямоугольной огибающей.

Представляя падающий импульс в виде разложения по плоским волнам и используя решение [1], можно записать выражение $P(t)$ для импульса в любой точке наблюдения ПО в виде

$$P(t) \approx \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} C(\omega)\, e^{i\omega t} A\left(\frac{\omega}{c} r, \varphi, kb\right) d\omega, \quad (1)$$

здесь

$$A\left(\frac{\omega}{c} r, \varphi, kb\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_{\gamma_n}\left(\frac{\omega}{c} r\right) \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}\gamma_n - n\varphi\right)\right], \quad \gamma_n = \sqrt{(kb)^2 + n^2},$$

$$C(\omega) = \frac{i}{2\pi} \frac{\exp[-i(\omega-\omega_0)T]-1}{\omega-\omega_0}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$kb=\text{const}$, $b=b(\omega) \sim 1/\omega$, b — радиус ПО по критической концентрации для волны с частотой ω, $\omega_0=2\pi/T_0$ — частота несущей, $c(\omega)$ и T — спектр и длительность импульса, c — скорость света.

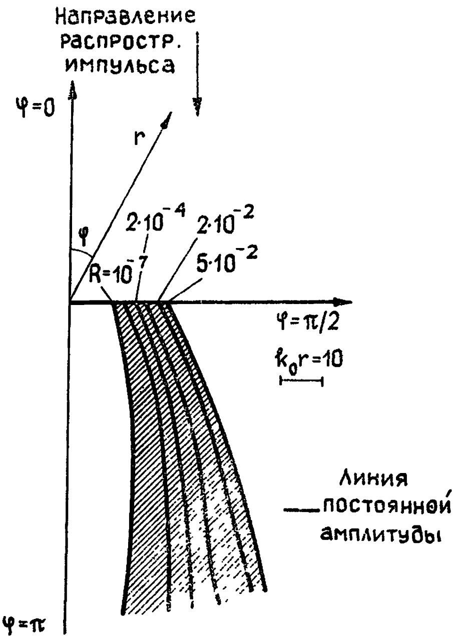

Рис. 1.

Такая аппроксимация для $P(t)$ основывается на том, что реально прием и передача импульсов ведется в конечной ширине частот $\Delta\omega$, причем, как правило, $\Delta\omega = 20/T$. Такой импульс на практике вполне хорошо аппроксимирует прямоугольный. В данной работе полагалось $\Delta\omega=20/T$. Тогда после замены переменных формула (1) примет вид

$$P(t) = \frac{i}{2\pi} e^{i\omega_0 t} \int\limits_{-a\tau/T}^{a\tau/T} R(x_0+y) \exp[i\psi(x_0+y)] \frac{e^{-i(T/\tau)y}-1}{y} e^{iyt/\tau}\, dy, \quad (2)$$

где

$$R(x) = |A(x, \varphi, kb)|, \quad \psi(x) = \arg\{A(x, \varphi, kb)\},$$

$\tau = \frac{r}{c}$, $x_0 = k_0 r$, $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$, $a = 20$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2\pi}\frac{k_0 r}{N}$, $N = \frac{T}{T_0}$ — число колебаний несущей за время T.

Отсюда следует, что огибающая импульса зависит от пяти параметров: $k_0 r, \varphi, kb, N, t/T$. Причем в данной точке наблюдения при фиксированном kb с увеличением N огибающая импульса стремится к прямоугольной. Дальнейший анализ формулы (2) значительно упрощается, если аппроксимировать функции $R(x)$ и $\psi(x)$ элементарными функциями. С этой целью введем $\alpha(x) = (\partial R/\partial x)/R(x)$, $C_1(x) = \partial\psi(x)/\partial x$ и будем рассматривать только точки наблюдения, принадлежащие области тени $D(k_0 r, \varphi, kb)$, в которой $|R(k_0 r, \varphi, kb)| > 10^{-7}$, $\varphi \geqslant \pi/2$. Нижнее ограничение на R определяется тем, что на практике более глубокая тень не представляет интереса из-за ограниченной чувствительности приемника. Область $D(k_0 r, \varphi, kb)$ при $kb = 20$ приведена на рис. 1 (заштрихована). Численный анализ показал, что $\alpha(x)$

и $C_1(x)$ на отрезках $\left[k_0 r - \frac{a\tau}{T},\ k_0 r + \frac{a\tau}{T}\right]$ можно считать постоянными при $N \geqslant 20$. Поэтому в области D на отрезках $\left[k_0 r - \frac{a\tau}{T},\ k_0 r + \frac{a\tau}{T}\right]$ $R(x)$ и $\psi(x)$ представим в виде

$$R(x_0+y) = R(x_0)e^{\alpha(x_0)y}; \tag{3}$$

$$\psi(x_0+y) = \psi(x_0) + C_1(x_0)y, \tag{4}$$

где $x_0 = k_0 r$. Подставляя (3) и (4) в (2), получим

$$|P(t)| = \frac{R(x_0)}{2\pi}\left|\int_{-a}^{a} e^{(\alpha(x_0)\tau/T)y}\,\frac{e^{-iy}-1}{y}\,e^{iyt'/T}\,dy\right|, \tag{5}$$

где

$$t' = t + C_1(x_0)\tau.$$

Из выражения (5) следует, что форма огибающей целиком зависит от параметра $\beta(k_0 r, \varphi, kb) = \frac{\alpha(k_0 r, \varphi, kb)\,k_0 r}{2\pi N}$. На рис. 2 представлены огибающие импульсов при $1/12\pi \leqslant \beta \leqslant 1/2\pi$ (огибающие нормированы на $R(k_0 r, \varphi, kb)$). Как видно из рис. 2, огибающая импульса имеет одинаковый качественный характер для различных β. Введем параметр $\delta(\beta)$, равный сумме минимального и максимального отклонения огибающей от единицы (см. рис. 2). Согласно рис. 2, степень искажения импульса (δ) возрастает с ростом β, и при малых β ($\beta < 1/8\pi$) искажением огибающей можно пренебречь. Определим, как искажается огибающая импульса при $N = \text{const}$ в зависимости от $k_0 r, \varphi$ и kb. При $N = \text{const}$ значение β полностью определяется параметром $\gamma = \alpha k_0 r$. Следовательно, чем больше γ, тем больше β и в большей степени искажается огибающая (больше δ). Численные расчеты показали, что в области D в зависимости от изменения $k_0 r, \varphi$ и kb

γ возрастает при $k_0 r \to 0$; если $\varphi = \text{const}$, $kb = \text{const}$,

γ увеличивается с ростом φ, если $k_0 r = \text{const}$, $kb = \text{const}$,

γ возрастает с увеличением kb, если $k_0 r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

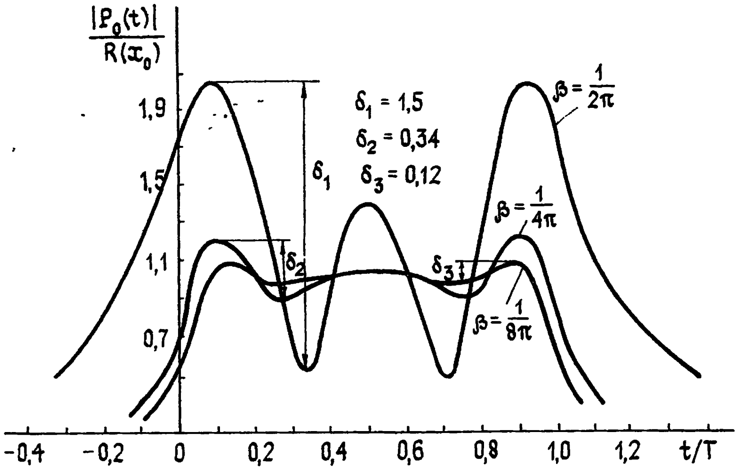

Рис. 2.

Однако для решения ряда прикладных задач важно, кроме того, знать характер зависимости степени искажения импульса для точек наблюдения, расположенных на линиях равной амплитуды. Пример таких линий при $kb = 20$ приведен на рис. 1. В результате численного счета установлено, что γ уменьшается с увеличением φ, если $R = \text{const}$, $kb = \text{const}$. Отсюда следует, что в области D при $kb \leqslant 30$, $N = \text{const}$ максимальное искажение огибающей достигается при $kb = 30$ для точки наблюдения, в которой $\varphi = \pi/2$, $R(x_0) = 10^{-7}$. Расчеты, приведенные для этой точки наблюдения, в частности, показали, что при $N = 20$ параметр δ равен 1,5 (соответствующий график приведен на рис. 2 ($\beta = 1/2\pi$)), при $N = 120$ $\delta \sim 0$ и, следовательно, влиянием плазмы на огибающую можно пренебречь.

Таким образом, приведенные расчеты показали:

1) При перемещении точки наблюдения вдоль луча, исходящего из центра цилиндра в направлении к центру, степень искажения импульса возрастает.

2) При удалении от центра цилиндра вдоль линии постоянной амплитуды (R=const) степень искажения импульса уменьшается.

3) Для точек наблюдения с заданными угловой координатой и амплитудой импульса с ростом kb степень искажения импульса возрастает.

4) Если $kb \lesssim 30$ и число колебаний несущей $N \gtrsim 120$, то искажения огибающей не превышают 10%.

В заключение отметим, что полученные при помощи численных расчетов условия неискажения импульса согласуются с грубыми оценками условий неискажения импульса в неоднородном плазменном слое толщины b. Такое соответствие указывает на то, что искажение импульса в плазме в основном обусловлено явлением дисперсии, а не дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Б. В., Ярыгин А. П. — В сб.: Рассеяние электромагнитных волн. — Таганрог: ТРТИ, 1983, вып. № 4, с. 40.
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
10 апреля 1985 г.

УДК 517.9

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ЛУЧЕЙ В РЕЗОНАТОРАХ

Л. А. Бунимович

Пусть Q — ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей ∂Q. Рассмотрим в Q биллиардную задачу, т. е. динамическую систему, порожденную равномерным и прямолинейным движением материальной точки внутри Q с условием упругого отражения от ∂Q. Скорость частицы, без ограничения общности, можно считать по модулю равной единице. Ясно, что эта система является гамильтоновой и, тем самым, объем в ее фазовом пространстве инвариантен относительно динамики.

Известно [1], что если Q выпукла и ее граница является достаточно гладкой, то биллиард в Q обладает континуальным семейством каустик, сгущающимся к границе ∂Q. Более того, совокупность траекторий, касающихся этих каустик, имеет положительный объем в фазовом пространстве биллиарда. Отсюда вытекает, в частности, что данная динамическая система не эргодична. С помощью каустики биллиарда в Q можно построить [1] бесконечную серию квазимод для оператора Лапласа в Q (с нулевым граничным условием), локализованных в окрестности этой каустики. С другой стороны [2], если биллиард в Q эргодичен, то собственные функции оператора Лапласа асимптотически (при больших волновых числах) равномерно распределены в Q.

Если граница ∂Q является строго выпуклой внутрь области, то биллиард в Q называется рассеивающим (или биллиардом Синая). В [3, 4] было показано, что биллиарды в таких областях обладают очень сильными стохастическими свойствами. Для «хороших» фазовых функций в рассеивающих биллиардах затухают временные корреляции (т. е. имеет место свойство перемешивания), откуда, в частности, вытекает свойство эргодичности.

Механизм стохастичности в биллиардах Синая является совершенно естественным: если на выпуклую внутрь области стенку падает пучок параллельных лучей, то после отражения от нее этот пучок станет расходящимся и будет отставаться расходящимся (локально)* при всех последующих отражениях от границы. В результате длина фронта этого пучка растет, а при отражениях от границы скачком увеличивается его кривизна. Поэтому узкий вначале пучок траекторий равномерно «размазывается» по всему фазовому пространству рассеивающего биллиарда.

С другой стороны, если граница ∂Q содержит выпуклую во вне Q стенку, то, отражаясь от нее, параллельный пучок фокусируется и становится сходящимся, т. е. траектории в нем не только не разбегаются, но даже имеют тенденцию к сближению. Поэтому ранее считалось, что биллиарды в выпуклых областях не могут быть эргодическими. Однако в [5, 6] было показано, что имеется принципиально другой механизм, приводящий к стохастизации в некоторых классах биллиардов в выпуклых областях. Цель данной работы показать, что этот механизм является грубым, т. е. продолжает работать, если немного возмутить границу области.

Механизм стохастичности биллиардов в областях, имеющих выпуклые вовне стенки, состоит в том, что если достаточно долго подождать, то сходящийся пучок

---

* Если биллиард — рассеивающий, то граница ∂Q имеет особые точки (концы гладких компонент ∂Q). Поэтому особые точки возникают со временем и на фронте рассматриваемого пучка лучей.