ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 12 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 532.5

О СВЯЗИ ЯВЛЕНИЯ ФЛАТТЕРА С ИЗЛУЧЕНИЕМ В ОБЛАСТИ АНОМАЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО ЭФФЕКТОВ ДОПЛЕРА

Б. Е. Немцов

Исследуется задача возбуждения (флаттера) мембраны в потоке жидкости конечной глубины за счет излучения ею длинных гравитационных волн. Показано, что потеря устойчивости возникает из-за преобладания излучения гравитационных волн отрицательной энергии (аномальный эффект Доплера) над волнами положительной энергии.

Хорошо известно, что аномальный эффект Доплера (АЭД) приводит к радиационной неустойчивости элементарных излучателей [1–4]. Особенно просто это обстоятельство иллюстрирует квантовомеханическая аналогия. Для невозбужденной двухуровневой системы, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, процесс излучения волны частоты ω с волновым вектором $\boldsymbol{\varkappa}$ с переходом на верхний энергетический уровень разрешен законами сохранения энергии и импульса.

Действительно, в системе отсчета, связанной с излучателем, закон сохранения энергии принимает вид

$$\hbar(\omega - \boldsymbol{\varkappa v}) + \hbar\omega_0 = 0.$$

Здесь $\hbar(\omega - \boldsymbol{\varkappa v})$ характеризует энергию фотона, ω_0 — частота перехода. Из этой формулы следует хорошо известное условие реализации аномального эффекта Доплера. Как видно из той же формулы, АЭД возможен, если энергия фотона в системе отсчета, связанной с излучателем, отрицательна. Такого рода связь между АЭД и волнами отрицательной энергии (ВОЭ) впервые установлена в работе Незлина [4]. На языке ВОЭ также легко понять, почему возникает «раскачка» элементарного излучателя. Действительно, в связанной с осциллятором системе отсчета он возбуждает волны разных знаков энергии. Излучение ВОЭ приводит к возбуждению осциллятора, а волн положительной энергии — к затуханию его колебаний. Соотношение между излучением волн разных знаков энергии и определяет устойчивость осциллятора.

Вышеизложенное относится к элементарным излучателям. При излучении не элементарных источников, а распределенных систем (например, пучков осцилляторов в среде) излучение отдельной частицы является элементарным актом, определяющим различного рода неустойчивости волн [4–6]. По существу один элементарный акт излучения индуцирует последующие. В частности, если выполнены условия реализации АЭД, то поток невозбужденных осцилляторов вызывает неустойчивость [4]. На языке ВОЭ этой неустойчивости соответствует пересечение дисперсионных кривых волн разных знаков энергии [7]. Отметим, что именно таким образом интерпретируются различного рода неустойчивости сдвиговых течений в гидродинамике [7–9].

В настоящей работе показано, что излучение ВОЭ, т. е. излучение в области АЭД, тесно связано с другим хорошо известным в гидро- и аэродинамике явлением — флаттером упругих конструкций в потоке жидкости или газа. Хотя явление флаттера известно давно [10, 11] и интенсивно изучалось (см, например, [11]), указанная связь, насколько нам известно, в литературе не обсуждалась.

Для выявления указанной связи исследуем конкретную задачу о неустойчивости (линейной стадии флаттера) мембраны в потоке жидкости конечной глубины за счет излучения ею длинных гравитационных волн. Отметим, что рассматриваемая задача представляет определенный интерес, во-первых, в связи с теорией глиссера [12], во-вторых, исследуемая система, по-видимому, единственная в классе задач линейной теории флаттера, где можно получить точные аналитические результаты.

Перейдем к постановке задачи. Пусть слой жидкости глубины H движется со скоростью v в горизонтальном направлении. Дно считается абсолютно жестким всюду, за исключением полосы $0 \leqslant x \leqslant L$. В этой полосе заключена мембрана. Уравнение для вертикальных смещений U мембраны имеет вид [13]

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = -p/\rho a, \tag{1}$$

где ρ, a — плотность материала и толщина мембраны, c — скорость распространения в ней возмущений, p — давление, оказываемое жидкостью на поверхность мембраны. Для дальнейших исследований необходимо выразить давление жидкости через смещение поверхности мембраны. Для этого определим вначале потенциал скоростей в жидкости. Петенциал срокостей φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями на свободной поверхности и дне:

$$(\partial/\partial t + v\partial/\partial x)^2 \varphi + g\partial\varphi/\partial z = 0 |_{z=H}; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \partial\varphi/\partial z = V(x, t)\,[\theta(x) - \theta(x-L)]\,|_{z=0}, \\ V(x, t) = \partial U/\partial t + v\partial U/\partial x. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, $\theta(x)$ — единичная функция. Граничные условия (4) выражают условие непроницаемости мембраны [10, 11].

Ищем решения уравнений (1)—(4) в виде $e^{-i\omega t}$ (причем при вычислениях, как обычно, следует считать $\operatorname{Im}\omega > 0$). Используя стандартную процедуру преобразования Фурье по координате x и выполняя несложные преобразования, приходим к следующему представлению потенциала скоростей:

$$\varphi = \frac{g}{2\pi} \int_0^L V(x')\,dx' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik(x-x')]}{(\omega - kv)^2 - gHk^2}\,dk. \tag{5}$$

При выводе соотношения (5) использовано приближение мелкой воды, которое справедливо, если $H/L \ll 1$.

Исследуем вначале колебания безграничной мембраны. Для этого в интеграле (5) следует сделать замену $x' = \eta + L/2$, $x = x_1 + L/2$, а затем устремить L к бесконечности. Если искать решение уравнения (1) в виде $U \sim e^{ikx_1}$, то, используя связь между давлением и потенциалом

$$p = -\rho_0(\partial/\partial t + v\partial/\partial x)\varphi - \rho_0 g U, \tag{6}$$

из (5) и (1) легко получить

$$(\omega^2-c^2k^2+\rho_0 g/\rho a)[(\omega-kv)^2-gHk^2]=\rho_0 g(\omega-kv)^2/\rho a. \qquad (7)$$

Отметим, что уравнение (7) аналогично дисперсионному соотношению для потенциальных волн в плазме при наличии вращающегося электронного пучка [4].

Исследуем (7) в приближении слабой связи. Простой анализ показывает, что при $v<\sqrt{gH}$ неустойчивость отсутствует. Развитие неустойчивости начинается, если $v>\sqrt{gH}$, причем скорость волн в мембране должна быть близка к скорости медленных волн $c\simeq v-\sqrt{gH}$. При этом инкремент неустойчивости оказывается равным

$$\operatorname{Im}\omega=(\rho_0 g\sqrt{gH}/4\rho ac)^{1/2}, \quad \operatorname{Re}\omega\simeq ck. \qquad (8)$$

Приведенные результаты легко объяснить на языке ВОЭ. Для этого вначале нужно найти знак энергии каждой из взаимодействующих волн, т. е. волн в мембране и волн в потоке жидкости. Поскольку энергия волны пропорциональна $\omega\partial D(\omega,k)/\partial\omega$ ($D(\omega,k)$ — дисперсионное уравнение каждой из волн) [7], из (7) сразу получаем, что волны в мембране обладают положительной энергией ($\omega\partial D/\partial\omega=2\omega^2$), а знак энергии длинных гравитационных волн определяется из соотношения $\omega\partial D/\partial\omega\sim\pm\sqrt{gH}(v\pm\sqrt{gH})$, где (+) относится к быстрой гравитационной волне, а (—) — к медленной. Отсюда сразу следует, что при $v<\sqrt{gH}$ все волны в системе обладают положительной энергией и неустойчивость невозможна. Если же $v>\sqrt{gH}$, то медленная гравитационная волна обладает отрицательной энергией. При этом сильное взаимодействие волн разных знаков энергии возможно при выполнении условий фазового синхронизма, т. е. (в данном примере) когда $\omega\simeq ck=(v-\sqrt{gH})k$. Отсюда и следует, что неустойчивость развивается лишь при $c=v-\sqrt{gH}$. На языке АЭД это условие означает, что мембрана излучает гравитационные волны в области АЭД.

Что изменится при рассмотрении ограниченной мембраны? Для выяснения этого вопроса остановимся на исследовании случая

$$v\gg\sqrt{gH}. \qquad (9)$$

При этом внутренний интеграл (5) при $x<x'$ обращается в нуль, что связано с отсутствием возмущений в области $x<0$ при выполнении условия (9).

Учитывая отмеченное выше обстоятельство, для потенциала скоростей получим

$$\varphi(0,x)=\int_0^x V(x')f(x-x')\,dx', \qquad (10)$$

где

$$f(x)\equiv-(i/2\omega)\sqrt{g/H}\,(e^{ik_1x}-e^{ik_2x}), \quad k_{1,2}=\omega/(v\pm\sqrt{gH}).$$

Первое слагаемое в (10) соответствует излучению гравитационных волн положительной энергии (нормальный эффект Доплера), второе — излучению ВОЭ (аномальный доплер-эффект).

Используя (6), (10), приходим к замкнутому интегродифференциальному уравнению для смещения поверхности мембраны:

$$\left(\frac{\rho_0 g}{\rho a}+\omega^2\right)U+c^2U_{xx}=-\frac{\rho_0}{\rho a}\left(-i\omega+v\frac{\partial}{\partial x}\right)\times$$

$$\times \int_0^x \left[\left(-i\omega + v\frac{\partial}{\partial x'}\right)U(x')\right] f(x-x')\,dx'. \tag{11}$$

Уравнение (11) следует дополнить граничными условиями на линиях закрепления мембраны. Предположим, что мембрана жестко закреплена при $x=0, L$, т. е.

$$U(0)=U(L)=0. \tag{12}$$

Используя (11), (12), определим собственные частоты рассматриваемой системы. Уравнение (11) можно решить методом Лапласа (см. также [11]). Используя теорему о свертке, а также граничные условия (12), приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times \int_{-\infty-i\nu}^{\infty-i\nu} \frac{e^{ik'L}\left[(\omega-k'v)^2-gHk'^2\right]dk'}{(\omega^2-c^2k'^2+\rho_0 g/\rho a)\left[(\omega-k'v)^2-gHk'^2\right]-(\omega-k'v)^2\rho_0 g/\rho a}=0. \tag{13}$$

Хотя (13) и решает, в принципе, вопрос о собственных частотах системы, аналитические результаты удаётся получить лишь в приближении слабой связи. В этом приближении (13) можно переписать в виде

$$\int \frac{e^{ikL}}{k^2-k_0^2}dk - \frac{\rho_0 g}{\rho a c^2(v^2-gH)}\int \frac{e^{ikL}(\omega-kv)^2\,dk}{(k^2-k_0^2)^2(k-k_1)(k-k_2)}=0, \tag{14}$$

где введено обозначение $k_0=\omega/c$. Используя теорему о вычетах, после ряда преобразований приходим к следующему выражению для собственных частот колебаний мембраны:

$$\operatorname{Re}\omega_n=\pi nc/L; \tag{15}$$

$$\operatorname{Im}\omega_n=\frac{\rho_0 g\sqrt{gH}}{2\rho a c^2 L}\times$$

$$\times\left\{\frac{k_{2n}^2\left[1-(-1)^n\cos k_{2n}L\right]}{(k_{2n}^2-k_{0n}^2)^2}-\frac{k_{1n}^2\left[1-(-1)^n\cos k_{1n}L\right]}{(k_{1n}^2-k_{0n}^2)^2}\right\}, \tag{16}$$

где k_{2n}, k_{1n}, k_{0n} — волновые числа гравитационных волн и мембраны, определяемые $\operatorname{Re}\omega_n$. Соотношение (16) показывает, что неустойчивость (флаттер) мембраны развивается при преобладании излучения в области АЭД (медленные волны), причем, в отличие от безграничной мембраны, для развития неустойчивости ограниченной мембраны вовсе не обязательно выполнение условия фазового синхронизма между волной в мембране и медленной гравитационной волной на потоке Достаточно лишь, чтобы в среде существовали волны отрицательной энергии. Тем не менее, при выполнении условия фазового синхронизма ($c=v-\sqrt{gH}$) инкременты неустойчивости значительно возрастают (см. (16)), тогда как в случае синхронизма с быстрой волной ($c=v+\sqrt{gH}$) система устойчива. Изменением геометрии излучателя (длины мембраны) легко достигнуть преобладания излучения медленных волн над быстрыми и наоборот. В этом смысле рассматриваемая система аналогична электростатической системе Пирса, состоящей из сетчатого конденсатора, пронизываемого электронным потоком [5]. Следует отметить, что неустойчивость пропадает при $v \to \sqrt{gH}$ ($k_{2n} \to \infty$). Как показывает анализ, проведенный для случая слабой связи, система остается устойчивой и при $v < \sqrt{gH}$.

Приведем в заключение оценки характерных инкрементов неустойчивости. Примем, что $v = 10^3$ *см/с*, $H = 10$ *см*, $a = 0{,}5$ *см*, $c \simeq 10^3$ *см/с*, $\rho_0 \approx \rho$, тогда из (8) имеем: $\mathrm{Im}\,\omega \simeq 7$ c^{-1}, т. е. неустойчивость развивается за время $\tau \simeq 1/7$ *с*.

Автор искренне признателен А. А. Андронову за ряд ценных замечаний по содержанию работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Франк И. М. — ДАН СССР, 1947, **56**, № 6, с. 583.
2. Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я. — ЖЭТФ, 1959, **36**, вып. 6, с. 1823.
3. Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А. — ДАН СССР, 1983, **268**, № 4, с. 827.
4. Незлин М. В. — УФН, 1976, **120**, № 3, с. 484.
5. Андронов А. А., Чугунов Ю. В. — УФН, 1975, **116**, вып. 1, с. 79.
6. Эйдман В. Я. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 7, с. 781.
7. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. — В сб.: Нелинейные волны. Самоорганизация. — М.: Наука, 1983.
8. Cairns R. A. — J. Fluid Mech., 1979, **92**, pt. 1, p. 1.
9. Miles J. W. — Phys. Fluids, 1980, **23** (9), p. 1915.
10. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
11. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.
12. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977. — 650 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1973. — 632 с.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 29 марта 1984 г., в окончательном варианте 8 февраля 1985 г.

FLUTTER EFFECT AND ANOMALOUS AND NORMAL DOPPLER RADIATION

B. E. Nemtsov

The problem of the excitation (flutter) of membrane in the stream of the finite depth liquid is solved. It is shown that an instability of the membrane is concerned with the radiation of slowly gravity waves which carry out negative energy (anomalous Doppler effect).