

так как использование (9) предполагает, что при большей частоте луч проходит в среде с такими же характеристиками, как и при меньшей частоте. Поэтому для средних широт применение метода ограничено возмущениями, масштабы которых в горизонтальной плоскости велики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий Б. В. Отклик сигнала радиозондирования на ионосферные неоднородности.—Алма-Ата: Наука, 1983.
2. Афраймович Э. Л. Интерференционные методы радиозондирования ионосфера.—М.: Наука, 1982.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.—М.: Наука, 1967.
- 4 Смирнов В. И. Курс высшей математики.—М: Наука, 1974, т. 4, часть 1.

Ростовский-на-Дону государственный
университет

Поступила в редакцию
27 июня 1984 г.

УДК 519.25.517 9

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Л. А. Бунимович

Исследование модели Лоренца — первой диссипативной физической системы, в которой было обнаружено хаотическое поведение траекторий, посвящено большое число работ. В настоящее время свойства этой системы изучены значительно лучше, чем других (модельных, а не абстрактных математических) диссипативных систем. Однако ряд вопросов, связанных с ее динамикой, еще остается открытым. В первую очередь, это касается статистических свойств модели Лоренца*. Как известно [1], существует достаточно много разных (частично — усиливающих друг друга, частично — независимых) свойств стохастичности динамических систем. Некоторые из них были установлены для аттрактора Лоренца в [2, 3]. Цель настоящей работы — исследования остальных (имеющих содержательный смысл с точки зрения физических приложений) статистических свойств модели Лоренца. В частности, в отличие от работ [2, 3], нас будет интересовать статистика траекторий во всей области притяжения аттрактора Лоренца, а не только на нем самом. Кроме того, речь пойдет о полной трехмерной системе Лоренца, а не только о системе с дискретным временем, порожденной преобразованием секущей плоскости $z=r-1$ (r , как обычно, — нормированное число Рэлея) в себя.

Геометрическая структура аттрактора Лоренца Ω была изучена в [4]. Пересечение Ω с плоскостью $z=r-1$ обозначим через Ω_z . Преобразование Пуанкаре T , отображающее Ω_z в себя, как было проверено численно в [5], обладает свойством локальной экспоненциальной неустойчивости (гиперболичности). Используя это свойство в [2], было показано, что на аттракторе Ω_z имеется инвариантная относительно T мера v , по отношению к которой преобразование T является перемешивающим, т. е. временные корреляции $b_f(n) = \int\limits_{\Omega_z} f(T^n x) f(x) dv - (\int\limits_{\Omega_z} f(x) dv)^2$ фазовых функций $f(x)$ стремятся к нулю, $n \geq 1$; $b_f(0) = (\int\limits_{\Omega_z} f(x) dv)^2$.

С точки зрения приложений наиболее важны следующие два вопроса:

- 1) какова величина флуктуаций временных средних фазовых функций;
- 2) с какой скоростью в системе затухают временные корреляции.

В [3] для модели Лоренца с дискретным временем (т. е. для преобразования T) было показано, что (по мере v) случайная величина

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \int\limits_{\Omega_z} f(x) dv \right) \quad (1)$$

имеет асимптотическое (при больших n) гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma_f = \sum_{n=0}^{\infty} b_f(n)$, а для временных корреляций имеет место оценка

* Отметим, что широко используемый при исследовании геометрических свойств системы Лоренца переход к одномерному отображению в этом случае является недостаточным.

$$|b_j(n)| < C_j \exp(-a_1 n^{\alpha_1}), \quad (2)$$

где C_j — константа, зависящая только от $f(x)$, $a_1 > 0$ и зависит от параметров системы, $0 < \alpha_1 < 1$.

Используя развитую в [3] технику, можно показать, что флуктуации временных средних (1) имеют при больших временах гауссово распределение и для фазовых функций, заданных на всей области притяжения аттрактора Ω_z системы с дискретным временем, а не только на нем самом.

По инвариантной мере μ системы с дискретным временем однозначно восстанавливается мера μ на аттракторе Ω полной системы, инвариантная относительно фазового потока $\{S^t\}$. Плотность меры μ в точке y аттрактора Ω имеет вид $d\mu(y) = \langle \tau(x)^{-1}(v(y))^{-1} dv(x) \rangle$, где x — ближайшая к y точка ее отрицательной полутраектории, принадлежащая Ω_z , $\tau(x)$ — время, за которое траектория, выходящая из x , впервые возвращается в Ω_z , $v(y)$ — скорость движения по траектории системы в точке y , $\langle \tau(x) \rangle = \int_{\Omega_z} \tau(x) dv$.

Из эргодичности системы с дискретным временем вытекает, что и соответствующая система с непрерывным временем тоже является эргодической. Вопрос о том, что происходит при таком переходе со свойством перемешивания, является значительно более тонким. Например, если время возвращения $\tau(x)$ принимает счетное число находящихся в резонансе значений, то в спектре системы с непрерывным временем имеется дискретная компонента. Таким образом, временные корреляции в ней вообще не затухают.

Предположим, что система Лоренца с непрерывным временем является перемешивающей. (Результаты многочисленных работ, посвященных численному моделированию этой системы, подтверждают справедливость такого предположения. Отметим, однако, что надежно проверить его только с помощью численного счета нельзя, так как любую динамическую систему можно сделать перемешивающей, немного изменив скорость движения по ее траекториям.) Тогда для ограниченной непрерывной функции $g(y)$, заданной на аттракторе Лоренца Ω , имеет место следующая оценка корреляций $g(y) = g(x)$:

$$|b_g(t)| = \left| \int_{\Omega} g(S^t y) g(y) d\mu - \left(\int_{\Omega} g(y) d\mu \right)^2 \right| < C_g \exp(-a_2 t^{\alpha_2}), \quad (3)$$

где C_g зависит только от $g(y)$, $a_2 > 0$ — от параметров системы Лоренца, $0 < \alpha_2 < \min\{\alpha_1, \operatorname{Re} \lambda\}$, λ — лежащий в правой полуплоскости корень характеристического уравнения в нуле. (Время возвращения на секущую точек, близких к устойчивой сепараторисе нуля, может быть как угодно большим.) Утверждение о гауссовой распределении флуктуаций средних по траекториям для системы Лоренца с непрерывным временем также остается в силе.

В заключение сделаем одно замечание общего характера. При изучении такого тонкого свойства, как скорость убывания корреляций, необходимо предварительное теоретическое исследование, задача которого — определить аналитический вид асимптотики корреляционных функций. На ЭВМ должны затем вычисляться только значения соответствующих констант. В частности, интересно было бы получить численные оценки показателей α_1, α_2 в (2), (3) и исследовать их вариации при изменении параметров системы Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

- Синай Я. Г. — В сб.: Нелинейные волны. / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1979, с. 192.
- Бунимович Л. А., Синай Я. Г. — В сб.: Нелинейные волны. / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1979, с. 212.
- Бунимович Л. А. — In: Nonlinear Dynamics and Turbulence. / Ed. by G. I. Barenblatt et al. — London: Pitman, 1983, p. 71.
- Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. — ДАН СССР, 1977, 234, № 2, с. 336.
- Синай Я. Г., Ул Е. В. — Physica, 1980, 2D, № 1, p. 7.

Институт океанологии
АН СССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1985 г.

УДК 621.371

О ВЛИЯНИИ ТЕНЕЙ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ СЛУЧАЙНО-НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. Л. Белов, В. М. Орлов

Влияние затенений одних элементов поверхности другими на статистические характеристики интенсивности поля, рассеянного случайно-неровной поверхностью, рас-